数理解析研究所講究録
第 145 巻 1972 年 168-171

C-双曲型定数係数偏微分作用素について

京大 数研 柏原正樹

定数係数偏微分方程式

$$P(D_x)\,u(x) = f(x)$$

において，その基本解 $E(x)$ で，その singular support が propre cone に入るものがある時，$P(D_x)$ を C-hyperbolic と呼ぶ。もっと正確に，

$E(x) \in \Gamma(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}/\mathfrak{A})$

で　$P(D)E(x) = \delta(x) \quad (\text{in } \Gamma(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}/\mathfrak{A}))$

$\operatorname{supp} E(x) \subset \Gamma$

ここに Γ は $\mathbb{R}^n$ の convex closed cone で

$$\Gamma \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, \vartheta \rangle \leq 0\} = \{0\},$$

を満たすような $E(x)$ の存在する時，$P(D_x)$ を，covector ϑ 方向に C-hyperbolic と呼ぶ。

それについて，次の定理が成りたつ。

定理 1　$P(D_x)$ が ϑ 方向に C-hyperbolic であるためには，次の互に同値な2条件が成りたつことが必要十分。

(1)　十分小さな正な ε があって

$$P_m(\xi + it\vartheta) \neq 0$$

が，$0 < t < \varepsilon|\xi|$　をみたす任意の正な t と実の covector ξ に対して成立する。

(2)　τ に関する m 次方程式

$$P_m(\xi + \tau\vartheta) = 0$$

の実根の数（重複度もこめて）が，ϑ に平行でない実 covector ξ によらず一定である。

（但し $P_m(\xi)$ は $P(D)$ の主要部である。）

(1), (2) が十分条件であることは，基本解 $E(x)$ を，具体的に，

$$E(x) = \int \sum_{j,k} \frac{a_{j,k}(x,\xi)}{P_m(\xi + i\vartheta_0)^j (\langle x,\xi\rangle + i0)^{n-k}} \omega(\xi)$$

の形に構成することによって証明される。

逆に，(1), (2) が必要条件である事は，Fourier 変換をもちいることにより，常套の手段で示される。　さて，R を，多項式係数有限階偏微分作用素のつくる環，M を

$$M = R \Big/ \sum_{i=1}^{n} R x_i P(D) = Ru$$

とおく。但し，u は $R \ni 1$ に対応する M の生成元である。

M の元 m で $Q(x, D_x)m = 0$，$\sigma(Q)(0, \vartheta) \neq 0$ を満すような $Q(x, D_x) \in R$ の存在するものの集合を N とおく。N は M の R-submodule である。

（$\sigma(Q)$ は Q の主要部）

その時，次の定理が成立つ。

定理 2　$P(D)$ が ϑ 方向に C-hyperbolic なら

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow RE(x) \longrightarrow 0$$

は，R modules の exact sequence である。

但し，$E(x) \in \Gamma(\mathbb{R}^n ; \mathcal{B}/\mathcal{A})$ は，1 頁の条件を満す基本解（unique!）であり，従って $RE(x)$ は $\Gamma(\mathbb{R}^n ; \mathcal{B}/\mathcal{A})$ の R-submodule である。$M \to RE(x)$ は $u \mapsto E(x)$ により定義される R-linear homomorphism。

i.e. $M/N \simeq RE(x)$

更に，M/N は，日ゆる maximally overdetermined system である。

（i.e. $\dim S\text{-}S(M/N) = n-1$）

（証明）

最後の，M/Nが maximally overdetermined になることは略して，上の exactness のみ証明する。

1) $N \ni Q(x, D_x)u$ とする.

その時，$Q(x, D_x)E(x) = 0$ をいおう。

代数的考察より十分大きな自然数 l をとると

$$P(D_x)^l Q(x, D_x)u = 0$$

故に

$$P(D)^l Q(x, D_x)E(x) = 0$$

$P(D)^l$ の基本解で strict cone $(-\Gamma)$ に support が入るものがあり，$Q(x, D_x)E(x)$ の support は Γ に入るから $Q(x, D_x)E(x) = 0$

2) 逆に $Q(x, D_x)E(x) = 0$ とおこう。

その時 $Q(x, D_x)u \in N$ をいおう。

l を十分大きな自然数とすれば，

$$P(D)^l Q(x, D_x) = S(x, D_x)P(D_x)$$

となる $S \in R$ がある。

故に

$$S(x, D_x)P(D_x)E(x) = S(x, D_x)\delta(x) = 0$$

故に $S(x, D_x) \in \sum R x_i$

$\therefore$ $Q(x, D_x)u \in N$ q.e.d.