数理解析研究所講究録
第146巻 1972年 142-163


# 初等核の最大値原理

阪大 理 渡辺 毅

よく知られているHuntの定理によって，局所コンパクト空間上の劣Markov核の半群 $(N_t)_{t>0}$ のポテンシャル核 $V=\int_0^\infty N_t\cdot dt$ は完全最大値原理によって特徴付けられる。しかし P.A. Meyer[4] が離散径数の劣Markov半群 $(N^n)_{n=0,1,2,\cdots}$ のポテンシャル核（＝初等核） $G=\sum_{n\geq 0}N^n$ を特徴付ける最大値原理を導入したことはあまり知られていないように思われる。

筆者[5]は近藤[2]の方法を拡張することによってMeyerの諸結果を導いたが，ここでは直接最大値原理に関連する部分について紹介したい。Meyerの理論の確率論的側面については上記[2]，[5]を見て頂きたい。なお、つぎの3点について[5]の所論に修正，追加を行った。

(a) Meyer の結果は任意の可測空間上の固有核 G に対して成立するが，議論が多少煩雑になるので局所コンパクト空間上の局所有界な核に限定した．

(b) 最大値原理を Meyer のもとの形よりやや一般な形で与え，必らずしも劣Markovでない N のポテンシャル核の特徴付けを論じた。それによって Meyer の最大値原理が劣Markov核の初等核を特徴付けている事情がやや分り易くなると思われたからである．しかし内容的に本質的な一般化ではない。

(c) Meyer の定理が Hunt の定理の単なる類似以上のものであることを合成核を例にとって示した（§7）.

## §1. 記号

可算基をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間を E，その Borel 集合の σ-代数を $\mathcal{B}(E)$ とする． $\mathfrak{F}$ （ $C_b$ ）は E 上の有界可測（有界連続）実関数の全体を表わす．コンパクト集合の外で 0 な関数からなるそれぞれの部分族を $\mathfrak{F}_c$，$C_c$ で表わす． E の無限遠点で 0 な $f \in C_b$ の集合を $C_0$ で表わす．

$f \in \mathfrak{F}$ にたいし $f^+$ （ $f^-$ ）はその正の部分（負の部分），

また $S_f=\{f\neq 0\}$ である．$f$ の集合 $A$ への制限を $f|_A$ で表わす．$f|_A$ は $\complement A=E\setminus A$ で $0$ として $E$ 上の関数とも考える．集合 $A$ 上で $f(x)\geq g(x)$ が成り立つことを $[f\geq g]_A$ によって表わす．

$E$ 上の（正の）核 $N$ は $E\times\mathcal{B}(E)$ から $[0,+\infty]$ への関数で，

(i) $\forall A\in\mathcal{B}(E)$ に対し $x\longrightarrow N(x,A)$ は $\mathcal{B}(E)$－可測，

(ii) $\forall x\in E$ に対し，$A\longrightarrow N(x,A)$ は $\mathcal{B}(E)$ 上の測度，

の2条件をみたすものである．さらにこの報告で考える核に対してはつねに次の条件を仮定する．

(iii) $\forall f\in\mathcal{G}_c$ に対し

$$(1.1)\qquad Nf(x)=\int f(y)N(x,dy)\in\mathcal{G}.$$

特に $N1\in\mathcal{G}$ のとき有界核，$N1\leq 1$ のとき劣 Markov 核という．$\forall f\in\mathcal{C}_c$ に対し $Nf\in\mathcal{C}_b$ であるとき連続核，特に $Nf$ がつねに $\mathcal{C}_b$ の部分族 $\mathcal{C}'$ に属するとき $\mathcal{C}'$－連続核と呼ぶ．

一般に核 $N$ に対し

$$(1.2)\qquad D(N)=\{f\in\mathcal{G}\ ;\ N|f|\in\mathcal{G}\}$$

とおく．明らかに $D(N)\supset\mathcal{G}_c$，特に有界核なら $D(N)=\mathcal{G}$

である. $f \in D(N)^+$ のとき $Nf$ を $f$ の <u>N-ポテンシャル</u> と呼ぶ.

## §2. 超過的関数と初等核

$N, G$ が $E$ 上の核で

(2.1) $$G = \sum_{n \geq 0} N^n \quad , \quad N^0 = I$$

であるとき, $G$ を $N$ の<u>ポテンシャル核</u>あるいは<u>初等核</u>という. ここで $I$ は恒等核 ($If = f$), $N^n$ は $N$ の $n$ 回の積を表わす. 明らかに

(2.2) $$G = I + NG = I + GN$$

が成り立つ.

(2.3) $$\mathcal{E}(N) = \{ f \in \mathcal{G}^+ \,;\, Nf \leq f \}$$

とおく. $f \in \mathcal{E}(N)$ を $N$ に関する<u>超過的関数</u>という.

一般の核 $G$ に対し, つぎの条件をみたす $f \in \mathcal{G}^+$ を $G$ に関する<u>準超過関数</u>と呼びその全体を $\overline{\mathcal{E}}(G)$ で表わす.

(2.4) $$\begin{cases} g \in D(G), \quad [f \geq Gg]_{S_{g^+}} \text{ なる限り}, \\ f - g^- \geq Gg \text{ がいたる所で成り立つ}. \end{cases}$$

<u>定理 1</u>. $\mathfrak{G}$ が $N$ の初等核ならば,

$$\mathcal{E}(N) = \overline{\mathcal{E}}(\mathfrak{G}). \tag{2.5}$$

<u>証明</u> (a) $\mathcal{E}(N) \subset \overline{\mathcal{E}}(\mathfrak{G})$. $f \in \mathcal{E}(N)$ を取る.

(i) $g \in D(\mathfrak{G})^+$ の場合. $g^- = 0$ であるから, $[f \geq \mathfrak{G}g]_{S_g}$ から $f \geq \mathfrak{G}g$ を示せばよい. $\hat{f} := f \wedge \mathfrak{G}g \leq \mathfrak{G}g$ であるから $\hat{f}$ も $\mathfrak{G}$-ポテンシャルである; $\hat{f} = \mathfrak{G}\hat{g}$, $\hat{g} \in D(\mathfrak{G})^+$. 明らかに $N\hat{f} \leq N\mathfrak{G}g$. また $x \in S_g$ ならば $\hat{f}(x) = \mathfrak{G}g(x)$ であるから, (2.2) により

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x) - N\hat{f}(x) \geq \mathfrak{G}g(x) - N\mathfrak{G}g(x) = g(x).$$

ゆえに $\hat{g} \geq \hat{g}|_{S_g} \geq g|_{S_g} = g$. これから, $\hat{f} = \mathfrak{G}\hat{g} \geq \mathfrak{G}g$ である.

(ii) $g \in D(\mathfrak{G})$ の場合. 仮定 $[f \geq \mathfrak{G}g]_{S_{g^+}}$ から

$$[f + \mathfrak{G}g^- \geq \mathfrak{G}g^+]_{S_{g^+}} \Rightarrow [f + \mathfrak{G}g^- - g^- \geq \mathfrak{G}g^+]_{S_{g^+}}$$

がえられる. (2.2) により $\mathfrak{G}g^- - g^- = \mathfrak{G}(Ng^-) \in \mathcal{E}(N)$ であるから, (i) によりいたるところ $f + \mathfrak{G}g^- - g^- \geq \mathfrak{G}g^+$ が成り立つ. $\mathfrak{G}g^-$ を移項して $f - g^- \geq \mathfrak{G}g$ がえられる.

(b) $\overline{\mathcal{E}}(\mathfrak{G}) \subset \mathcal{E}(N)$. $f \in \overline{\mathcal{E}}(\mathfrak{G})$ を取る. $D^+(\mathfrak{G}) \supset \mathfrak{F}_c$ であるから, $f \geq g \in D^+(\mathfrak{G})$ なる限り $f \geq Ng$ を示せばよい. $h = g - Ng$ とおけば, $h \in D(\mathfrak{G})$ で $\mathfrak{G}h = g \leq f$. 特に $[f \geq \mathfrak{G}h]_{S_{h^+}}$ だから $f - h^- \geq \mathfrak{G}h = g$.

$f+h \geq f-h^-$ により, $f+h \geq g$. これから $f \geq Ng$.

## §3. Meyer の最大値原理

$G=\sum_{n\geq 0} N^n$ ならば定理 1 により $\overline{\mathcal{E}}(G) \ni 0$ である.
特に $N$ が劣 Markov 核ならば

$$(\mathrm{RM}) \qquad \overline{\mathcal{E}}(G) \ni 1$$

である.(*) これをもう少し一般にして, 与えられた関数 $h \in \mathcal{G}^+$ に対して

$$(\mathrm{RM})_h \qquad \overline{\mathcal{E}}(G) \ni h$$

なる最大値原理を考える。初等核はつねに $(\mathrm{RM})_0$ をみたす. また $\forall c>0$ に対して $(\mathrm{RM})_h \Leftrightarrow (\mathrm{RM})_{ch}$ であること, $(\mathrm{RM})_h$ なら $(\mathrm{RM})_0$ をみたすことが容易に分る.

(RM) は次の形に述べることもできる. これが Meyer [4] によるもとの形である.

$$(\mathrm{RM})' \begin{cases} \text{定数 } a \geq 0,\ f, g \in D(G)^+ \text{ にたいし} \\ [a+Gf-f \geq Gg]_{S_g} \Rightarrow a+Gf-f \geq Gg \end{cases}$$

---

(*) (RM) は強められた(完全)最大値原理 [Reinforced (complete) maximum principle] の省略である.

(RM) を具体的に確める場合に次の結果が有效である.

<u>Lemma 2</u> (a) (RM)′ が成り立つためには, それが $f, g \in \mathcal{G}_c^+$ に対して成立すれば十分である.

(b) $G$ が連続核とする. (RM)′ が成り立つためには, それが $f, g \in C_c^+$ に対して成立すれば十分である.

<u>証明</u> (a) $f, g \in \mathcal{G}_c^+$ に対して (RM)′ を仮定する. $f, g \in D(G)^+$ で

$$(3.1) \qquad [\, a + Gf - f \geq Gg \,]_{S_g}$$

であるとする. $f$ に増加する $\{f_n\} \subset \mathcal{G}_c^+$, $E$ に増加するコンパクト集合列 $\{K_n\}$, $\varepsilon > 0$ を取り

$$E_n = \{ \varepsilon + Gf_n - f_n \geq Gf - f \} \cap K_n, \qquad g_n = g|_{E_n}$$

とおく. 明らかに $g_n \in \mathcal{G}_c$, $g_n \to g$,

$$[\, a + \varepsilon + Gf_n - f_n \geq Gg_n \,]_{S_{g_n}}$$

である. 仮定によりいたる所

$$a + \varepsilon + Gf_n - f_n \geq Gg_n.$$

$n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ として $\quad a + Gf - f \geq Gg.$

(b) $f, g \in C_c^+$ に対して (RM)′ を仮定する. $a = 0$, $g = 0$ としてこれを適用すれば $Gf - f \geq 0$, $\forall f \in C_c^+$. これから $(G - I)$ も正の連続核であることが分る. あとは Meyer [3, p203, T4; p204, No 5(b)] と同様の証明で (RM)′

が $f, g \in \mathcal{G}_c^+$ で成立することが分る.

最大値原理 $(RM)_0$ をみたす核 $G$ の性質を調べる.

<u>Lemma 3</u> (a) $g \in D(G)^+$ ならば, $Gg,\ Gg-g \in \mathcal{E}(G)$.

(b) $G-I$ も(正の)核である.

(∵) (a) $Gg$ についても殆ど同様であるから $Gg-g$ の場合を示す.

$h \in D(G)$, $[Gg-g \geq Gh]_{S_h^+}$ を仮定すれば,

$[0 \geq G(h-g)]_{S_{(h-g)^+}}$. $(RM)_0$ により $-(h-g)^- \geq G(h-g)$.

$[(h-g)^- \geq g]_{E \setminus S_h^+}$ であるから $[-g \geq G(h-g)]_{E \setminus S_h^+}$.

仮定と合せて $Gg-g \geq Gh$.

(b) (a) の議論において $h=0$ とおけばよい.

<u>Lemma 4</u> $g \in D(G)$ とする.

(a) $Gg \leq 0 \Rightarrow Gg-g \leq 0$.

(b) $Gg=0 \Rightarrow g=0$ ($G$ は $D(G)$ から $\mathcal{G}$ への単射である).

(c) 特に $G$ が $(RM)$ をみたすならば, $Gg \leq 1 \Rightarrow Gg-g \leq 1$.

(∵) $f \in \overline{\mathcal{E}}(G)$ とする. $f \geq Gg$ を仮定すれば

$[f \geq Gg]_{S_{g^+}} \Rightarrow f-g^- \geq Gg \Rightarrow \cancel{0 \geq g^- \geq 0 \Rightarrow g \geq 0}$ $f \geq Gg-g$.

(a), (c) はこれから明らか. (b) は (a) から従う.

<u>Lemma 5</u> $f = Gg \in \overline{\mathcal{E}}(G)$, $g \in D(G) \Rightarrow g \geq 0$.

(∵) $[f \geq Gg]_{S_{g^+}} \Rightarrow f-g^- \geq Gg \Rightarrow 0 \geq g^-$

$\Rightarrow g \geq 0$.

## §4. 主結果

$(RM)_0$ は $G$ が初等核であるための必要条件であるが十分ではない（反例は Meyer [3] にある）．初等核を $G$ の言葉で完全に特徴付けるためには掃散の概念が必要になる．

$A \in \mathcal{B}(E)$, $f \in \overline{\mathcal{E}}(G)$ とする．$G$ に関する $f$ の $A$ への掃散を

$$(4.1) \qquad \overline{H}_A f := \inf \{ g ; [g \geq f]_A , \ g \in \overline{\mathcal{E}}(G) \}$$

によって定義し，擬縮小関数と呼ぶ．実は $\overline{H}_A f \in \overline{\mathcal{E}}(G)$ である．$\overline{H}_A f$ の性質については筆者 [5] を見て頂き度い．特に

$$(4.2) \qquad \lim_{K \uparrow E} \overline{H}_{\complement K} f = 0 \quad (K \text{はコンパクト}, \ \complement K = E \setminus K)$$

の時，$f$ を（掃散の意味での）ポテンシャルという．

次の2つの基本 lemma の証明は次節で行う．

**Lemma 6** $f \in \overline{\mathcal{E}}(G)$ がポテンシャルなら次の性質をもつ．

$$(4.3) \quad \begin{cases} f \geq G g_n , \quad g_n \to g , \quad g_n, g \in D(G)^+ \text{ ならば} \\ G g_n \longrightarrow G g . \end{cases}$$

この性質をもつ準超過関数を一様積分可能（$G$ に関し）であるといい，その族を $\overline{\mathcal{E}}^u(G)$ で表わす．

**Lemma 7** $f \in \overline{\mathcal{E}}^u(G)$ は $G$-ポテンシャルである．

ここに Meyer の主定理がある。

定理 8　核 $G$ が最大値原理 $(RM)_0$ および

(4.4)　$\forall f \in \mathcal{C}_c^+$ なら $Gf$ はポテンシャルである,(*)

という条件をみたすならば $G$ はある核 $N$ の初等核である。$N$ は一意に定まる。特に $G$ が $(RM)$ をみたすならば, $N$ は劣 Markov である。

証明　最後の主張は明らかである。一意性は次のように示される。$G = \sum_{n\geq 0} N_1^n = \sum_{n\geq 0} N_2^n$ ならば $f \in \mathcal{C}_c^+$ に対して $Gf = f + G(N_1 f) = f + G(N_2 f)$, $N_1 f, N_2 f \in D(G)^+$ である。$G$ が単射であるから $N_1 f = N_2 f$. 故に $N_1 = N_2$。

$G$ が初等核であることを示そう。

(4.5)　$$\overline{D}(G) := \{ f \in D(G);\ G|f| \text{ がポテンシャル} \}$$

とおく。$f \in \overline{D}(G)^+$ なら $Gf - f$ がポテンシャルである。したがって Lemma 7, 5 により

(4.6)　$$G\varphi = Gf - f$$

の解 $\varphi \in D(G)^+$ が唯一つ存在する。$\varphi = Nf$ と書く。linear な拡張により, $\overline{D}(G)$ から $\overline{D}(G)$ への非負線形作用素 $N$ が定まり,

---

(*) この条件は実は必要でもある [ 5 ; p218, T22(b)].

$$(4.7)\qquad G(Nf) = Gf - f, \qquad f \in \overline{D}(G)$$

をみたす. iteration により

$$(4.8)\qquad Gf = f + GNf = f + Nf + \cdots + N^n f + G(N^{n+1} f)$$

が得られる. $f \in D(G)^+$, $g_n = N^n f$ とおく. (4.8) により $Gf \geq Gg_n$, $g_n \to 0$ であるから Lemma 6 により $Gg_n \to 0$. ゆえに

$$(4.9)\qquad Gf = \sum_{n \geq 0} N^n f.$$

次に $\overline{D}(G)^+ \ni f_n \downarrow 0$ の時, $0 \leq Nf_n \leq Gf_n \to 0$. 明らかに $\overline{D}(G)$ はベクトル束であるから, Daniell 積分の定理により, $N$ は $\overline{D}(G)$ を可測にする $\sigma$-環上の核を定めることが分る. 定理の仮定により $\overline{D}(G) \supset C_c$ であるから $N$ は $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の核である.

## §5. Lemma 6, 7 の証明

**Lemma 9** $A \in \mathcal{B}(E)$, $g \in D(G)^+$, $A \supset S_g$ ならば,

$$(5.1)\qquad \overline{H}_A Gg = Gg.$$

(∵) $f \in \overline{\mathcal{E}}(G)$, $[f \geq Gg]_A$ とする. 仮定により

$[f \geq Gg]_{S_g} \Rightarrow f \geq Gg.$

Lemma 6 の証明.　$f$ がポテンシャルで

$f \geq G g_n$, $g_n \to g$, $g_n, g \in D(G)^+$ とする. いたる所正の連続関数 $w \in D(G)^+$ を取り. ($x \in E$ を固定して)

$$(5.2) \qquad \int_{\{g_n > Nw\}} G(x, dy)\, g_n(y) = (*)$$

が $N \to \infty$ の時一様に $0$ に近ずくことを示せばよい. 何となれば その時関数列 $\{g_n / w\}$ が有限測度 $w(y)\,G(x, dy)$ の下で一様積分可能になるから.

$f \geq G g_n \geq g_n$ だから $A_N = \{f > Nw\} \supset \{g_n > Nw\}$.
したがって, 上の Lemma を用いて

$$(*) \leq G(I_{A_N} g_n) = \overline{H}_{A_N} G(I_{A_N} g_n) \leq \overline{H}_{A_N} f.$$

$f$ がポテンシャルだから, $\overline{H}_{\complement K} f(x) < \varepsilon$ なるコンパクト集合が存在する. $N$ を十分大きく取れば $[Nw > f]_K$. ゆえに $A_N \subset \complement K$. これから $\overline{H}_{A_N} f(x) \leq \overline{H}_{\complement K} f(x) < \varepsilon$ である.

q. e. d.

Lemma 7 の証明のために若干の準備をする.

$E_0$ を相対コンパクトな $E$ の開集合とする. $G$ の $E_0$ への制限を $G_0$ で表わす. $\inf_{E_0} g > 0$ なる $g \in D(G)^+$ を取り, $h = Gg \geq g$ とおく. $h_0 = h|_{E_0}$. $G$ は $(RM)_h$ をみたすから, $G_0$ は $E_0$ 上で $(RM)_{h_0}$ をみたす. これから

(5.3) $$G_0^h := h_0^{-1} G_0 h_0$$

は $E_0$ 上の有界核で $(RM)_1$ をみたす。したがってこのあとで述べる Lemma 11 により, $\forall f_0^h \in \mathcal{G}(E_0)$ に対し

$G_0^h \varphi_0^h = f_0^h$ の解 $\varphi_0^h \in \mathcal{G}(E_0)$ が存在する。これから,

$\forall f_0 \in \mathcal{G}(E_0)$ に対し

(5.4) $$G_0 \varphi_0 = f_0$$

の解 $\varphi_0 \in \mathcal{G}(E_0)$ が存在する。

Lemma 10　$X$ を Banach 空間, $V$ を $X$ 上の線形作用素とする。もし

(5.5) $$\|(\lambda V + I) f\| \leq \|\lambda V f\|, \quad \forall f \in X, \quad 0 < \forall \lambda < \lambda_0$$

が成り立てば, すべての $\lambda < 2\lambda_0$ に対して逆作用素 $(\lambda V + I)^{-1}$ が存在する。

小さい λ に対しては Neumann 級数が収束するから明らか。あとは (5.5) を用いて接続する。詳しくは [5 p197 ; T 5] にある。

Lemma 11　$G$ が有界核で $(RM)_1$ をみたすならば, $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への逆作用素 $G^{-1}$ が存在する。

(∵) $X = \mathcal{G}$, $V = G - I$ が $0 < \lambda < 1$ に対して Lemma 10 の (5.5) をみたすことを示せば十分である。何となれば, その時 $(\lambda V + I)^{-1} = [\lambda G + (1-\lambda) I]^{-1}$ が $0 < \lambda < 2$

に対して存在する。ここで $\lambda=1$ とおけばよい。

$f\in\mathcal{G}$, $a=[\sup(\lambda Vf+f)]\vee 0$ とおく。$0<\lambda\leq 1$ なら

$$[\,G(\lambda f)=\lambda Vf+\lambda f\leq\lambda Vf+f\leq a\,]_{S_{f^+}}.$$

(RM) により

$$a\geq G(\lambda f)+(\lambda f)^-\geq G(\lambda f)-\lambda f=\lambda Vf.$$

同様に $\lambda Vf\geq[\inf(\lambda Vf+f)]\wedge 0$.

<u>Lemma 7 の証明</u>

$f\in\overline{\mathcal{E}}^u(G)$, $\{E_n\}$ を $E$ の exhaustion とする。(5.4) により, $g_n\in\mathcal{G}^+(E_n)$ が存在して $[\,Gg_n=f\,]_{E_n}$ をみたす。$f\in\overline{\mathcal{E}}(G)$ であるから $f\geq Gg_n$. $m\geq n$ のとき

$[\,Gg_m=Gg_n\,]_{E_n}$, $Gg_m\in\overline{\mathcal{E}}(G)$ だから

$Gg_m-Gg_n\geq 0$. Lemma 4(a) により $G(g_m-g_n)-(g_m-g_n)\geq 0$. 故に $Gg_n-g_n$ は $n$ について増加でその極限が存在する。又 $Gg_n\longrightarrow f$. したがって $g=\lim_n g_n$ が存在する。$f$ が一様積分可能だから

$$f=\lim_n Gg_n=Gg.$$

## §6. 離散径数に対する Hunt の定理

G. Hunt の定理の原形は次の通りである。

<u>定理</u> 核 $V$ が $\mathcal{C}_0$-連続核で $\mathcal{C}_c^+$ 上で完全最大値の原理をみたし, さらに $V$ による $\mathcal{C}_c$ の像が一様ノルムに関して

$\mathcal{C}_0$で稠密ならば，

(6.1) $$V = \int_0^\infty N_t \cdot dt$$

をみたす非負，縮小，強連続な $\mathcal{C}_0$ 上の半群（= Feller半群）$(N_t)_{t\geq 0}$ が唯一つ存在する．

この定理の離散係数の場合の類似を Meyer の定理から導びこう．

<u>定理 12</u>　$G$ が $\mathcal{C}_0$-連続核で，$f, g \in \mathcal{C}_c^+$ に対して Meyer の最大値原理 $(RM)'$ をみたすとする．その時，$G$ は劣 Markov 核 $N$ の初等核である．特に $G$ がつぎのいずれかの条件を満足すれば $N$ も $\mathcal{C}_0$-連続核である．

(i) $G(\mathcal{C}_c)$ が $\mathcal{C}_0$ で稠密．

(ii) $G$ は $\mathcal{F}_c$ を $\mathcal{C}_0$ にうつす．

<u>証明</u>　$G$ が $\mathcal{C}_0$-連続核だから，$G$ は $(RM)'$ をみたす（Lemma 2）．$f \in \mathcal{C}_c^+$ なら $Gf \in \mathcal{C}_0^+$ であるから，$\varepsilon > 0$ に対し十分大きいコンパクト $K$ を取れば $[\varepsilon \geq Gf]_{CK}$．$\varepsilon \in \mathcal{E}(G)$ だから，$\varepsilon \geq \overline{H}_{CK} Gf$．ゆえに $Gf$ はポテンシャルである．定理 8 により $G = \sum_{n\geq 0} N^n$，$N1 \leq 1$．

(i) を仮定する．$f \in \mathcal{C}_c$ なら $N(Gf) = Gf - f \in \mathcal{C}_0$．$Gf$ が $\mathcal{C}_0$ で稠密だから $Ng \in \mathcal{C}_0$，$^\forall g \in \mathcal{C}_0$．

(ii) の場合は少し複雑である．

定理 8 の証明により $Nf$ は

(6.2) $$G g = G f - f$$

の一意解 $g$ である．したがって $f \in \mathcal{C}_c^+$ ならば $g \in \mathcal{C}_0^+$ であることを示せばよい．

（第一段） $E_0$ を相対コンパクトな $E$ の部分集合，$G_0$ を $G$ の $E_0$ への制限とする．仮定(ii) により $G_0$ は $\mathcal{C}_b(E_0)$ 上の線形作用素を定める．又 $G_0$ は $E_0$ 上で（RM）をみたすから $\mathcal{C}_b(E_0)$ の上で逆作用素 $G_0^{-1}$ が存在する．すなわち，$\forall f_0 \in \mathcal{C}_b(E_0)$ に対し

(6.2) $$G_0 g_0 = f_0$$

の一意解 $g_0 \in \mathcal{C}_b(E_0)$ が存在する．

（第二段） $\{E_n\}$ を $E$ の exhaustion とする．(6.2) により $[G g_n = G f - f]_{E_n}$ をみたす一意解 $g_n \in \mathcal{C}_b(E_n)$ が存在する．（$\because$ $Gf - f \in \mathcal{C}_0$）．Lemma 7 の証明で見たように，$g = \lim_n g_n$ が (6.2) の解である．したがって

(α) 収束 $g_n \longrightarrow g$ がコンパクト集合上で一様，かつ

(β) $g$ は $E$ の無限遠で連続 なことを示せばよい．

(β) は $0 \leq g \leq G g = G f - f \in \mathcal{C}_0^+$ から明らかである．

(α) を示すために $K$ をコンパクト集合，$E_n \supset K$ なる $n$ を取れば，$[G g = G g_n]_K$ であるから，$x \in K$ に対して

(6.3) $$G\,|g - g_n|(x) = 2\int_{\{g > g_n\}} g(y)\, G(x, dy).$$

ところが Lemma 7 の証明から $G(g-g_n)-(g-g_n)\geq 0$, $[Gg=Gg_n]_{E_n}$ だから $\{g>g_n\}\subset \complement E_n$. ゆえに

(6.4) $$[\,G|g-g_n|\leq G(I_{\complement E_n}g)\,]_K.$$

$n$ を十分大きく取れば

$$[\,\underbrace{G(I_{\complement E_n}g)}_{}\leq Gg\leq Gf_\wedge\,]_{\complement E_n}.$$
$$\leq\varepsilon$$

(RM) により $G(I_{\complement E_n}g)\leq\varepsilon$. (6.4) から

$$[\,0\leq|g-g_n|\leq G|g-g_n|\leq\varepsilon\,]_K.$$

よって ($\alpha$) が証明された.

## §7. 合成核の場合

定理 8 における条件 (4.4) は必らずしも確かめ易い条件ではない。$G$ が (RM) をみたす場合, $G$ が $C_0$-連続核であることが 1 つの十分条件であることを前節で示したが, 連続核で $C_0$-連続でない初等核がいくらでも存在する. この事情は連続径数の場合も同様であって, この意味で Hunt の定理の条件は強すぎる仮定である. 初等核にたいしては Meyer の定理がこの欠点を補う場合があることを合成核について示すのがこの節の目的である.

$\mu$ を $\underset{\sim}{R}=(-\infty,\infty)$ 上の Radon 測度とする.

(7.1) $$Kf(x):=\int_{\underset{\sim}{R}}f(x+y)\,\mu(dy)$$

で与えられる核を<u>合成核</u>と呼ぶ。合成核はつねに連続核で，$\mu$が有限測度なら $\mathcal{C}_0$-連続核である。推移 $\tau_x$ を $\tau_x f(y) = f(x+y)$ で定義する。核 $K$ が合成核であるための必要十分条件は $Kf(x) = K(\tau_x f)(0)$ が成り立つことである。$K$ を定める測度 $\mu$ は $K(0, A)$ によって与えられる。

$\mu$ を $R$ 上の確率測度，$\mu^{*n}$ を $\mu$ の $n$ 回の合成積 ($\mu^{*0} = \delta$) とし

(7.2) $$\lambda = \sum_{n \geq 0} \mu^{*n}$$

とおく。$\lambda$ が Radon 測度であるとき<u>非再帰的</u>，そうでない時<u>再帰的</u>という。$\mu$ を非再帰，$\mu$ ($\lambda$) による合成核を $N$, $G$ で表わせば

(7.3) $$G = \sum_{n \geq 0} N^n$$

である。つぎの結果が確率論においてよく知られている。

<u>再生定理</u>（例えば Feller [1, Chap. XI]）.

$\mu$ が非再帰的ならば，$\forall f \in \mathcal{C}_c$ に対し

(7.4) $$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} Gf(x) = l_+ \cdot \int f(x)\,dx \\ \lim_{x \to -\infty} Gf(x) = l_- \cdot \int f(x)\,dx \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $l_\pm$ はつぎのように与えられる。

(a) $\int |x| \mu(dx) = \infty$ かつ非再帰なら $l_\pm = 0$.

(b) $\int |x|\,\mu(dx) < \infty$ の場合

(i) $\int x\,\mu(dx) = 0$ なら再帰的.

(ii) $\int x\,\mu(dx) > 0$ なら非再帰的で

$$l_+ = 0, \qquad l_- = \left[\int x\,\mu(dx)\right]^{-1}.$$

(iii) $\int x\,\mu(dx) < 0$ なら非再帰的で

$$l_+ = \left[-\int x\,\mu(dx)\right]^{-1}, \qquad l_+ = 0.$$

したがって上の case (a), (ii) (iii) では $G$ は $\mathcal{C}_0$-連続核ではない。しかし

$$(7.5)\quad \begin{cases} \mathcal{C}_r = \{ f \in \mathcal{C}_b : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ 存在} \} \\ \mathcal{C}_l = \{ f \in \mathcal{C}_b : \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ 存在} \} \end{cases}$$

とおけば, $G$ は $\mathcal{C}_r$ (又は $\mathcal{C}_l$)-連続核になっている. この逆が証明できる.

<u>定理 13</u>　$\lambda$ による合成核が最大値原理 (RM) をみたす $\mathcal{C}_r$ (又は $\mathcal{C}_l$)-連続核ならば, 劣 Markov 合成核 $N$ の初等核である。この時 $\lambda(\underset{\sim}{R}) = \infty$ と $N1 = 1$ が同等である。

<u>証明</u>. (a) 先ず $G$ が初等核であることを示す. このためには Meyer の定理の条件 (4.4) を確めればよい. $G$ が $\mathcal{C}_r$-連続核とする. $f \in \mathcal{C}_c^+$ に対し

$$\overline{H}_{(-\infty,-a)\cup(a,\infty)} Gf \le \overline{H}_{(-\infty,a)} Gf + \overline{H}_{(a,\infty)} Gf^{(*)}$$

十分大きい $a$ をとると $[Gf \le \varepsilon]_{(a,\infty)}$ したがって、$\overline{H}_{(a,\infty)} Gf \le \varepsilon$ である。次に $a$ を十分大きく取れば

$$|Gf(y) - Gf(z)| < \varepsilon \quad , \quad \forall y, z < -\frac{a}{2}$$

が成り立つ。したがって $y < -a$ なら

$$Gf(y) \le Gf(y+\frac{a}{2}) + \varepsilon$$

である。したがって $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\overline{H}_{(-\infty,-a)} Gf(x) \le Gf(x+\frac{a}{2}) + \varepsilon.$$

∴ $a \to -\infty$ の時 $\overline{H}_{(-\infty,-a)} Gf(x) \to 0$ である。

(b) 上で $G = \sum_{n\ge 0} N^n$ を示したが、この $N$ が合成核であることを示そう。$Nf$ は方程式

(7.6) $$Gf = f + G g.$$

の一意解であるから、$g(x) = N(\tau_x f)(0)$ が (7.6) の解であることを示せば十分である。

(7.7) $$\begin{aligned} Gg(x) &= \int g(x+y)\,\lambda(dy) = \int N(\tau_{x+y} f)(0)\,\lambda(dy) \\ &= \int \left( \int N(0,dz)\, f(x+y+z) \right) \lambda(dy) \\ &= \int N(0,dz) \cdot G\tau_x f(z) = N(G\tau_x f)(0). \end{aligned}$$

---

(*) ここで (i) $u, v \in \overline{\mathcal{E}}(G) \Rightarrow u+v \in \overline{\mathcal{E}}(G)$, (ii) $u \in \overline{\mathcal{E}}(G) \Rightarrow \overline{H}_A u \in \overline{\mathcal{E}}(G)$ という性質を用いる。これは [5] に証明してある。

$G = I + NG$ により

$$G(\tau_x f)(0) = \tau_x f(0) + NG(\tau_x f)(0).$$

$\tau_x f(0) = f(x)$, $G(\tau_x f)(0) = Gf(x)$ と (7.7) により,

$g(x) = N(\tau_x f)(0)$ が (7.6) の解である.

(c) $N1 = \mu(R) < 1$ から $\lambda(R) < \infty$ を示せばよい.

$N' = c^{-1}N$, $c = \mu(R)$ とおけば $N'$ は Markov 核で

$G = \sum c^n N'^n$. 故に $\lambda(R) = G1 = \sum c^n N'^n 1 = \sum c^n < \infty$.

## 文献


[1] W. Feller: An introduction to probability theory and its applications, vol 2, New York, Wiley, 1966.

[2] 近藤亮司: Markov chain の potential kernel, Seminar on Probability, vol 28 [Topics in Markov chains (上)], 1968, p. 30—78.

[3] P. A. Meyer: Probability and potentials, Waltham, Blaisdell, 1966.

[4] ―――――: Caractérisation des noyaux potentiels des semi-groupes discrets, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), 225—240.

[5] 渡辺 毅: Markov連鎖のポテンシャル核と埋蔵鎖の射影極限, Seminar on Probability, vol 32 [Topics in Markov chains (下)], 1970, p. 189—243.