数理解析研究所講究録
第 146 巻 1972 年 164-176

局所コンパクト空間上の adapted cone に関する測度の掃散と dilation について

お茶の水大理　渡辺　ヒサ子

§1. 序

K は locally convex 線型位相空間の compact, convex, metrizable subset とする。P. Cartier, J.M. Fell と P.A. Meyer は K 上の二つの positive Radon measure λ, μ に対して、次の (a), (b) は同値であることを証明した。

(a) μ は λ の balayage である。

(b) $\lambda T = \mu$ となる dilation T が存在する。

ここで、K の Borel σ-field 上の Markov kernel T が dilation であるというのは、K 上の任意の点 x に対して、$\varepsilon_x T$ の重心が x であることをいう。

また、P.A. Meyer は K が compact, metrizable の場合に balayage と dilation の意味を拡張することにより、やはり (a), (b) は同値であることを証明した。

ここでは、locally compact, σ-compact K に対しても、

adapted coneの理論を使うことによって、上の定理を拡張できることを述べる。

§2. adapted cone と測度の掃散について.

Ω は locally compact, σ-compact とする。Ω 上の実数値連続関数の全体を $C(\Omega)$ で表わし、compact support を持つ実数値連続関数の全体を $C_K(\Omega)$ で表わす。$C^+(\Omega)=\{f\in C(\Omega);\ f\geqq 0\}$ $C_K^+(\Omega)=\{f\in C_K(\Omega);\ f\geqq 0\}$ とおく。

$C^+(\Omega)$ の関数 u, v に対して、どんな $\varepsilon>0$ に対しても

$$x\in K^c \implies v(x)\leqq \varepsilon u(x)$$

であるような compact $K\subset\Omega$ が存在するとき、$v\prec u$ と書く。

P は $C^+(\Omega)$ の convex cone とする。P が次の条件を満足するとき、P は adapted cone と呼ばれる。

(i) $\forall x\in\Omega,\ \exists g\in P\quad g(x)>0,$

(ii) $\forall g\in P,\quad \exists h\in P,\ g\prec h.$

$C^+(\Omega)$ に属する関数 g に対して、

$$H_g=\{f\in C(\Omega);\ \exists\alpha>0\quad |f|\leqq\alpha g\}$$

とおく。このとき、H_g は線型空間となり、ノルムを

$$\|f\|_g=\{\inf\alpha;\ \exists\alpha>0,\ |f|\leqq\alpha g\}$$

で定めることにより、H_g は Banach 空間となる。cone $P\subset C^+(\Omega)$

に対して、$H_P = \bigcup_{g \in P} H_g$ とおけば、H_P は vector space である。H_P に Banach 空間 $\{H_g\}_{g \in P}$ の inductive limit の位相を導入する。すなわち、

$H_P \supset O$ が open $\Longleftrightarrow$ $\forall g \in P$, $H_g \cap O$ は H_g で open.

μ は Ω 上の正値測度とする。μ が P-可積分であるとは、P のどんな元 f に対しても、$\mu(|f|) < +\infty$ が成り立つことである。P-可積分であるような正値測度の全体を $\mathfrak{M}_P^+$ で表わす。特に P が adapted cone の時には、H_P 上のどんな positive linear form も $\mathfrak{M}_P^+$ の measure として表わされる。[6]

C を $C(\Omega)$ の cone とする。Ω 上の正値測度 λ, μ に対して、どんな $f \in C$ に対しても $\mu(f) \leqq \lambda(f)$ であるとき、$\lambda \prec \mu$ と書き、μ は C に関する掃散であるという。$C(\Omega)$ 上の cone C, P は $P \subset C \subset H_P$ を満足すると仮定する。$g \in H_P$ に対して、

$$\hat{g}(x) = \inf\{f(x) \,;\, f \geqq g,\ f \in C\}$$

と定義する。このとき、$|\hat{g}(x)| < +\infty$ である。$x \in \Omega$ に対して、写像；$g \longrightarrow \hat{g}(x)$ は H_P 上の sublinear function である。特に C が inf-stable ならば、すなわち

$$f, g \in C \implies \inf(f, g) \in C$$

を満足するならば、Ω 上の関数 $x \longrightarrow \hat{g}(x)$ は上半連続関数である。

Proposition 1.

C は $C(\Omega)$ の inf-stable cone，P は $C^+(\Omega)$ の adapted cone で $P \subset C \subset H_P$ を満足すると仮定する．λ, μ は Ω 上の P-integrable positive measure とするとき，次の２条件は同値である。

(i) $\lambda \prec \mu$,

(ii) $\mu(g) \leqq \int \hat{g}(x) d\lambda(x) \quad \forall g \in H_P$.

Proposition 2.

C は $C(\Omega)$ の cone，P は $C^+(\Omega)$ の adapted cone で $P \subset C \subset H_P$ を満足するとき．どんな $x \in \Omega$ に対しても．

$$\hat{g}(x) = \sup_{\substack{\varepsilon_x \prec \mu \\ \mu \geqq 0}} \int g \, d\mu$$

（証明） $\varepsilon_x \prec \mu$ ならば．$f \geqq g$ なる $f \in C$ に対して．$\mu(g) \leqq \mu(f) \leqq f(x)$ だから．$\sup_{\varepsilon_x \prec \mu} \mu(g) \leqq \hat{g}(x)$ が成り立つ．

逆に．$x \in \Omega$ を fix して．写像 $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}(x)$ は H_P 上の sub-linear function である。従って．$g \in H_P$ に対して．Hahn-Banach の拡張定理により，H_P 上の linear form L で．g に対しては $L(g) = \hat{g}(x)$ であり．H_P のどんな φ に対しても．$L(\varphi) \leqq \hat{\varphi}(x)$ であるような L が存在する。また P は adapted だから．どんな $\varphi \in H_P$ に対しても．$\mu(\varphi) = L(\varphi)$ であるような

正値測度μが存在する. $f(x)=\sup_{\substack{\varphi\le f\\ \varphi\in C_K(\Omega)}}\varphi(x)$ だから どんな

$f\in C$に対しても

$$\int f\,d\mu=\sup\left\{\int\varphi\,d\mu\ ;\ \varphi\le f,\ \varphi\in C_K(\Omega)\right\}$$

である。また $C_K(\Omega)\subset H_P$ だから

$$\int f\,d\mu=\sup L(\varphi)\leqq\sup\hat{\varphi}(x)\leqq f(x).$$

従って $\varepsilon_x\prec\mu$ である。特に $\mu(g)=\hat{g}(x)$ だから.
$\hat{g}(x)\leqq\sup_{\varepsilon_x\prec\mu}\mu(g)$ が成り立つ.

(証終)

§3. H_Pのseparability.

どんな$x\in\Omega$に対しても $f(x)>0$ であるようなΩ上の関数fをstrictly positiveであるという.

Proposition 3

Ωはlocally compact, σ-compact, Pは$C^+(\Omega)$のadapted coneでstrictly positive fを含むとする。そのとき$C_K(\Omega)$はH_Pで稠密である。

(証明)、Uを$\varphi\in H_P$の近傍とする。$H_u\ni\varphi$であるようなどんな$u\in P$に対しても、$U\cap H_u$はH_uにおけるopen setだから、$\{h;\|\varphi-h\|_u<\varepsilon\}\subset U\cap H_u$なる$\varepsilon>0$が存在する。従って、$C_K(\Omega)$が$H_P$で稠密を証明するためには、次の2条件を満足する$u\in P$が存在することがわかればよい。

(i) $H_u\ni\varphi$,

(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\{h;\|\varphi-h\|_u<\varepsilon\}\cap C_K(\Omega)\neq\phi$.

$\varphi\in H_v$であるようなvに対して、$|\varphi|\leqq\|\varphi\|_v v$であり、$P$はadaptedだから、$v\uparrow\prec u$なる$u\in P$が存在する。すなわち、どんな$\varepsilon>0$に対しても、あるcompact set Kがあって、

$$x\in K^c \Longrightarrow v(x)\leqq\varepsilon u(x)$$

を満足する。Ω上で$f>0$であるような$f\in P$は存在するから、必要ならこのfをかえることにより、K上で$u>0$と仮定してよい。従って、ある$\lambda>0$に対して、Ω上で

$|\varphi|\leqq(\lambda+\varepsilon\|\varphi\|_v)u$が成り立つ。すなわち、$\varphi\in H_u$である。さらに、$K$上$|\varphi|\leqq g$なる$g\in C_K^+(\Omega)$は存在する。

$h=\sup(-g,\inf(\varphi,g))$とおけば、$h\in C_K^+(\Omega)$であり、$\|\varphi-h\|_u<\varepsilon\|\varphi\|_v$を満足する。　　　　(証終)

Proposition 4.

Ωは locally compact, σ-compact, metrizable とする。
cone P は次の条件(*)を満足する;

(*) $\forall x\in\Omega$, $\exists f\in P$, $f(x)>0$ 。

このとき、可算集合 $D\subset C_K(\Omega)$ で D は H_P の位相で $C_K(\Omega)$ で稠密であるような D が存在する。

(証明) $\{K_n\}$ は $\bigcup_n K_n=\Omega$ かつ $K_n\subset K_{n+1}^i$ を満足する compact set の増大列とする。各 $C(K_n)$ は一様収束の位相で可分だから、次の条件を満足するような可算集合 $D_n\subset C_K(\Omega)$ が存在する;

(a). $\forall h\in D_n$, $\mathrm{Supp}\, h_n\subset K_{n+1}$,

(b). $\{h|K_n\,;\,h\in D_n\}$ は一様収束の位相で $C(K_n)$ で稠密。

$D'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\{-h;\, h\in D_n\}\cup D_n\right\}$, $D=\{\sup(h_1, \inf(h_2,h_3))\,;\,h_i\in D'\}$
とおく。Dは可算集合である。

$C_K(\Omega)\ni\varphi$ を考える。φ の support は K_n に含まれるとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して、$h_1\in D_{n+1}$ で K_{n+1} 上で $|\varphi-h_1|<\varepsilon$ なる $h_1\in D_{n+1}$ が存在する。また K_n 上で $h_2\geqq|\varphi|$ であり、$\mathrm{Supp}\, h_2\subset K_{n+1}$ なる $h_2\in D_{n+1}$ が存在する。$f=\sup(-h_2, \inf(h_1,h_2))$ とおけば、$f\in D$ であり、K_{n+1} 上で $|\varphi-f|<\varepsilon$ であり、K_{n+1}^c 上で $|\varphi-f|=0$ である。また K_{n+1} 上で $v\geqq 1$ なる $v\in P$ は存在し、Ω上で $|\varphi-f|<\varepsilon v$ だから $\|\varphi-f\|_v<\varepsilon$ である。

従って. D は $C_K(\Omega)$ で H_P の位相で稠密である. （証終）

Proposition 3 と Proposition 4 より. 次の系が得られる.

系. Ω は locally compact, σ-compact, metrizable とし. $C^+(\Omega)$ の cone P は strictly positive f を含む adapted cone とする。そのとき. H_P は separable である.

§4. Strassen の定理の拡張.

E は vector space, $\mathfrak{A}$ は directed set (order $\prec$) で $\mathfrak{A} \ni \alpha$ に E の subspace E_α が対応していて. 次の条件を満足するものとする;

(a). $\alpha \prec \beta \Longrightarrow E_\alpha \subset E_\beta$,

(b). $E = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha$.

(c). 各 E_α は norm $\|\ \|_\alpha$ を持つ Banach space.

このとき. E に Banach space $\{E_\alpha\}$ の inductive limit の位相を導入する.

また. $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ は measure space とする。$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $\lambda(K_n) < +\infty$ を満足するような集合の増大列 $\{K_n\}$ が存在するとする。

S_E は E 上の sublinear function の全体とし. p は Ω より S_E の中への写像; $\omega \longrightarrow p_\omega$ とする. p が条件 (C) を満足する

とは、各 α に対して 次の条件 (i), (ii), (iii) を満足している Ω 上の関数 $f_\alpha \geqq 0$ が対応していることをいう。

(i). g_α は λ-可積分,

(ii). $\forall K_n$, $\| g_\alpha | K_n \|_\infty < +\infty$,

(iii). $\exists M(\alpha) > 0$ constant,

$$|P_\omega(x)| \leqq M(\alpha) \| x \|_\alpha g_\alpha(\omega), \quad \forall x \in E_\alpha, \ \forall \omega \in \Omega.$$

次の定理1, 2は H. Watanabe [7] で証明されている。

定理1.

vector space E は Banach space $\{E_\alpha\}$ の inductive limit で表わされ、この位相で separable とする。$(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ は positive, complete, σ-finite measure λ を持つ measure space とする。Ω から S_E の中への写像 P: $\omega \longrightarrow P_\omega$ は条件 (C) を満足するものとする。

$$S(x) = \int P_\omega(x) \, d\lambda(x)$$

とおく。このとき、$x' \in E'$ に対して、次の (a), (b) は同値である;

(a). $\langle x', x \rangle \leqq S(x)$, $\quad \forall x \in E$.

(b). 次の条件を満足する Ω から、E' の中への写像 $\omega \longrightarrow x'_\omega$ が存在する;

(i). $\forall x \in E$, $\omega \longrightarrow \langle x'_\omega, x \rangle$ は λ-measurable,

(ii) $\langle x'_\omega, x\rangle \leqq P_\omega(x) \qquad \forall x\in E,\ \forall\omega\in\Omega,$

(iii) $\langle x', x\rangle = \int\langle x'_\omega, x\rangle d\lambda(\omega) \qquad \forall x\in E.$

定理2.

定理1で特にEがordered vector spaceであれば、E上のpositive linear form x'に対して、(ii)のx'_ωもpositiveであるようにできる。

§5. dilationの存在.

Ωはlocally compact, σ-compactとし、Pは$C^+(\Omega)$のconvex coneとする。P-integrable positive Radon measureの全体を$\mathcal{M}_P^+$で表わす。また、Cは$C(\Omega)$のconeとし、$P\subset C\subset H_P$とする。Cone Cに関する$\mathcal{M}_P^+$の中の掃散によるorderを$\prec$で表わす。Ω上のBorel σ-field上のkernel TがC-dilationであるとは、Ωの各元ωに対して $\varepsilon_\omega\prec\varepsilon_\omega T$であることをいう。ここで、$\varepsilon_\omega$は$\omega$におけるpoint measureである。

定理3.

Ωはlocally compact, σ-compact, metrizableとする。$C^+(\Omega)$のconvex cone Pは、strictly positive fを含む

adapted cone とする。また $C(\Omega)$ の cone C は $H_p \supset C \supset p$ を満足する inf-stable cone とする。このとき、$\mathcal{M}_p^+ \ni \lambda$, μ に対して、次の (a), (b) は同値である。

(a) $\lambda \prec \mu$

(b). $\lambda T = \mu$ となる dilation T が存在する。

(証明). Vector space H_p は Banach spaces $\{H_g\}_{g \in p}$ の inductive limit として表わされ、§3 の系により、separable である。$f \in H_p$ に対して、$\hat{f}(\omega) = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in C}} g(\omega)$ とおけば、$\hat{f}$ は上半連続であり、λ-integrable である。$f \longrightarrow \hat{f}(\omega)$ は sublinear function で proposition 2 により、$\hat{f}(\omega) = \sup_{\varepsilon_\omega \prec \theta} \langle \theta, f \rangle$ である。また proposition 1 により、(a) は次の (a)′ と同値である;

(a)′ $\mu(f) \leqq \int \hat{f}(\omega)\, d\lambda(\omega)$ 。

従って、(a)′ と (b) が同値であることがわかればよい。

(b) $\longrightarrow$ (a)′.

T は dilation で $\mu = \lambda T$ だから、$\varepsilon_\omega \prec \varepsilon_\omega T$ であり、任意の $f \in H_p$ に対して、

$$\langle \mu, f \rangle = \int \langle \varepsilon_\omega T, f \rangle \, d\lambda(\omega)$$

が成り立つ。従って、

$$\langle \mu, f \rangle \leqq \int \hat{f}(\omega)\, d\lambda(\omega).$$

(a)$'$ $\longrightarrow$ (b).

定理2を使う。$(\Omega, \mathfrak{B})$はΩ上のλ-measurable setより generateされるσ-fieldとして、$E = H_p$とする。$P_\omega(f) = \hat{f}(\omega)$とおく。$\{K_n\}$は$\Omega$のcompact setからなる増大列で$\bigcup_n K_n = \Omega$, $K_n \subset K_{n+1}^{i}$を満足するものとする。Pの元vはλ-可積分であり、$v \in C(\Omega)$だから、各K_iへのrestriction $v|K_i$はboundedである。また、任意の$f \in H_v$に対して

$$|P_\omega(f)| \leqq \|f\|_v v(\omega)$$

だから、Pは条件(C)を満足する。従って、定理2を適用できる。また、H_p上のpositive linear formはΩ上のP-可積分正値測度として表現されることと、H_pのseparabilityに注意すれば、C-dilation Tの存在が証明される。

文献

[1]. P. Cartier, J. M. G. Fell and P. A. Meyer; Comparaison des mesures portées par un ensemble convexe compact. Bull. Soc. M. France, 92 (1964), 435–445.

[2] G. Choquet: Le problème des moments. Semi. Choquet, 1 (1962).

[3] G. Choquet; Lectures on Analysis, Vol 1, 2. (Benjamin, 1969).

[4]. A. I. Tulcea and C. I. Tulcea; Topics in the Theory of liftings. (Springer, 1969).

[5]. P.A. Meyer; Probability and potentials. (Blaisdell, 1966).

[6] G. Mokobodzki and D. Sibony; Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel. Sémi. Choquet, 6 (1966/67).

[7] H. Watanabe; Liftings and a generalized Strassen's theorem. Natu. Sci. Rep. Ochanomizu Uni. (To appear).

[8]. V. Strassen; The existence of probability measures with given marginals. Am. M. Stat, 36 (1965), 423–439.