数理解析研究所講究録
第 146 巻 1972 年 198-205

倉持ポテンシャルについて

北大 理　田中　博

§1. 序

リーマン面の倉持境界点は Constantinescu – Cornea[1] により内点のような性質を持つことが指摘されている. 一般的には, Green ポテンシャルの局所的な性質はそのままでは倉持境界まで含めては成り立たないけれども, 倉持境界を含めて, ポテンシャル論が展開され, Green ポテンシャルに類似な結果がいくつか得られている.

この小論では, Green ポテンシャルに関する二, 三の性質が倉持境界点を内点のように考えて成り立つことを述べる. なお, 本稿の内容はすべて [4] で発表される予定である.

§2. 倉持核 g_a と諸原理

R は hyperbolic な Riemann 面とする. R^* で R の倉持コンパクト化をあらわす. その倉持境界を Δ $(=R^*-R)$ であらわす. R の一つの閉円板 K_0 を固定し, $R_0 = R - K_0$ とおく. さらに $R_0^* = R^* - K_0$ とおく. このとき R_0^* で倉持核 g_a

($b \in R_0^*$) が定義される.

$\tilde{g}_b$ の性質 [1]:

(a) $(a, b) \longrightarrow \tilde{g}_b(a)$ は $R_0^* \times R_0^*$ 上で下半連続である.

(b) $\tilde{g}_b(a) = \tilde{g}_a(b)$.

(c) 各 $b \in R_0^*$ に対して, $a \longrightarrow \tilde{g}_b(a)$ は R_0 上の正値全優調であり, $R_0 - \{b\}$ 上で調和である.

(d) $b_1, b_2 \in R_0^*$ $(b_1 \neq b_2)$ に対して, $\tilde{g}_{b_1}$ と $\tilde{g}_{b_2}$ とは比例しない.

R_0^* 上の (positive) measure μ に対して $\int \tilde{g}_b(a) d\mu(b)$ が恒等的に $+\infty$ に等しくないとき, これを倉持ポテンシャルといい, $\tilde{p}^\mu(a)$ であらわす. さらに, $\langle \mu, \nu \rangle = \int \tilde{p}^\mu d\nu$, $\|\mu\|^2 = \langle \mu, \mu \rangle$ とおく.

Δ_1 で Δ の minimal point の全体をあらわし, $\Delta_0 = \Delta - \Delta_1$ とおく. Δ_1, Δ_0 は Borel 集合である. R_0^* 上の measure μ は $\mu(\Delta_0) = 0$ であるとき canonical であるという. 任意の μ に対して, $\tilde{p}^\mu = \tilde{p}^\nu$ となる canonical measure ν が一意的に存在する.

R_0^* のコンパクト部分集合 K に対して，K の
容持容量 $\tilde{C}(K)$ は

$$\sup\{\mu(K);\ \mu \text{ is canonical and } \tilde{p}^{\mu} \leqq 1\}$$

で定義される.

つぎの諸原理が成り立つ.

(1) エネルギー原理： $\langle \mu, \nu \rangle \leqq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$.

(2) 優越原理： μ は canonical measure で，$\tilde{p}^{\mu}$ は μ − 有限とする. 非負全優調和函数 s に対して，μ-a.e. に $\tilde{p}^{\mu} \leqq s$ が成り立つならば，R_0^* 上 $\tilde{p}^{\mu} \leqq s$ が成り立つ.

(3) 平こう原理： R_0^* のコンパクト部分集合 K に対して，次の条件を満すその台 S_χ が K に含まれている canonical measure χ がただ一つ存在する.

(i) $\tilde{p}^{\chi} \leqq 1$.

(ii) K 上容持容量 0 の F_σ − 集合を除いて，$\tilde{p}^{\chi} = 1$ が成り立つ.

(iii) $\tilde{C}(K) = \chi(K) = \|\chi\|^2$.

§3．掃散分布の性質

s を R_0 上の非負全優調和函数とする．s の閉集合 $F(\subset R_0)$ 上への reduced function を $s_{\widetilde{F}}$ であらわす．任意の μ に対して，$\tilde{p}^{\mu}_{\widetilde{F}}=\tilde{p}^{\mu_F}$ となる canonical measure μ_F がただ一つ存在する．その台 $S\mu_F$ は $\overline{F}$（$\overline{F}$ は F の R^* に於る closure）に含まれている．μ_F を μ の F 上への掃散分布という．

補題．$F(\subset R_0)$ は閉集合とし，μ は R_0^* 上の canonical measure とする．このとき $\nu=\mu|\overline{R-F}$，$\lambda=\mu-\nu$ とおけば，つぎが成り立つ．

$$\mu_F=\nu_F+\lambda,\quad S\nu_F\subset\overline{F}\cap\overline{R-F}.$$

ただし，$\mu|\overline{R-F}$ は μ の $\overline{R-F}$ への制限をあらわす．

証明．

(i) まず $S\nu_F\subset\overline{F}\cap\overline{R-F}$ を示す．$S\nu_F\subset\overline{F}$ だから，$S\nu_F\subset\overline{R-F}$ を示せば十分である．a を $R_0^*-\overline{R-F}$ の任意の点とする．そのとき a の開近傍 U で $\overline{U}\cap\overline{R-F}=\phi$ となるものが存在する．$G=U\cap R$ とおく．このとき

$$\tilde{p}^{\nu_F}_{\widetilde{R_0-G}}=\tilde{p}^{\nu_F}\qquad\text{on}\quad R_0$$

が示される．これより $(\nu_F)_{R_0-G}=\nu_F$ が得られる．
従って，$\nu_F(U)=0$ である．h が任意であるから $\nu_F(R_0^*-\overline{R-F})=0$ である．故に
$S\nu_F\subset\overline{R-F}$ が成り立つ．

(ii) $\lambda_F=\lambda$ を示す．任意の $h\in R_0^*-\overline{R-F}-\Delta_0$ に対して $(\tilde{g}_h)_{\tilde{F}}=\tilde{g}_h$ だから，

$$\left(\int\tilde{g}_h d\lambda\right)_{\tilde{F}}=\int(\tilde{g}_h)_{\tilde{F}}d\lambda=\int\tilde{g}_h d\lambda.$$

従って，$\lambda_F=\lambda$ である．故に

$$\mu_F=(\nu+\lambda)_F=\nu_F+\lambda_F=\nu_F+\lambda.$$

系．$\mu_F|(R_0^*-\overline{R-F})=\mu|(R_0^*-\overline{R-F})$．

定理1．μ,ν は R_0^* 上の canonical measure とし，s は R_0 上の非負全優調和函数とする．R_0^* の開集合 G に対して（ただし，$\overline{G}\cap K_0=\phi$），$G\cap R_0$ 上 $\tilde{p}^\mu=\tilde{p}^\nu+s$ ならば，$\mu|G\geqq\nu|G$ である．

証明．

D を R 内の開円板で $K_0\subset D$ かつ $\overline{D}\cap\overline{G}=\phi$ なるものとする．このとき $s_{\widehat{R_0-\overline{D}}}$ はポテンシャル $\tilde{p}^\lambda$ に等しい．

したがって，$G\cap R_0$ 上 $\tilde{p}^{\mu}=\tilde{p}^{\nu}+\tilde{p}^{\lambda}$ が成り立つ．
補題の系より，$\mu|G=(\nu+\lambda)|G \geqq \nu|G$.

系．$s_{\widehat{R_0-G}}=s$ ならば，$\mu|G=\nu|G$ である．特に，$G\cap R_0$ 上 $\tilde{p}^{\mu}=\tilde{p}^{\nu}$ ならば，$\mu|G=\nu|G$ である．

§4. 応用

定理2. K を R_0^* のコンパクト部分集合とし，$\mathrm{Int}(K)$ で K の R_0^* に於ける内点の全体をあらわす．このとき

$$\tilde{C}(K)=\tilde{C}(K-\mathrm{Int}(K))$$

が成り立つ．

証明．

$\tilde{C}(K-\mathrm{Int}(K))\leqq\tilde{C}(K)$ だから，逆向きの不等号を示せばよい．χ で K の平こう分布をあらわす．このとき (ii) より

$$\tilde{p}^{\chi}=1 \qquad \text{on} \qquad \mathrm{Int}(K)\cap R_0$$

である．定理1の系で，$\mu=\chi$，$\nu=0$，$s=1$，$G=\mathrm{Int}(K)$ とおくことにより，$\chi(\mathrm{Int}(K))=0$ を得る．従って，

$$\tilde{c}(K-\mathrm{Int}(K)) \geqq \chi(K-\mathrm{Int}(K))$$
$$= \chi(K) = \tilde{c}(K).$$

定理3. b_0 を non-minimal point とする. μ を $\tilde{g}_{b_0}$ の canonical associated measure とするとき, $S_\mu \subset \bar{\Delta}_0$ が成り立つ. ただし, $\bar{\Delta}_0$ は Δ_0 の R_0^* に於る closure をあらわす.

証明.

$S_\mu \not\subset \bar{\Delta}_0$ と仮定する. そのとき R^* の開集合 U で $\bar{U} \cap \bar{\Delta}_0 = \phi$ かつ $\mu(U \cap \Delta) > 0$ となるものが存在する. さらに, R_0 の閉部分集合 F で $F \cap \bar{\Delta}_0 = \phi$ かつ F は $\bar{U}$ の近傍であるものが存在する. b_0 が $\overline{R_0 - F}$ に含まれているから, [3] の Lemma より, R_0^* 上の measure ν で, $S_\nu \subset \bar{F} \cap \overline{R-F}$ かつ
$$(\tilde{g}_{b_0})_{\tilde{F}} \leqq \tilde{p}^\nu \leqq \tilde{g}_{b_0}$$
となるものが存在する. $\bar{F} \cap \bar{\Delta}_0 = \phi$ であるから, $S_\nu \cap \bar{\Delta}_0 = \phi$ である. 従って, ν は canonical である. $U \cap R_0$ 上 $\tilde{p}^\nu = \tilde{p}^\mu$ だから, 定理1の系より $\nu|U = \mu|U$ が従う.

$\mathcal{P}_\nu \cap \overline{U} = \phi$ だから，$\nu(\overline{U} \cap \Delta) = 0$ である．
これは $\mu(\overline{U} \cap \Delta) > 0$ に矛盾する．故に
定理は証明された．

注意： non-minimal Martin boundary point に関しては池上氏[2]の結果がある．

文　献

[1] C. Constantinescu and A. Cornea: Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.

[2] T. Ikegami: On the non-minimal Martin boundary points, Nagoya Math. J., vol. 29 (1967).

[3] H. Tanaka: Some properties of Kuramochi boundaries of hyperbolic Riemann surfaces, J. F. Sci. Hokkaido Univ., vol. XXI (1970).

[4] H. Tanaka: Notes on the balayaged measure on the Kuramochi boundary, to appear in J. F. Sci. Hokkaido Univ.