数理解析研究所講究録
第147巻 1972年 11-30

Orbit-preserving transformation groups for a flow

小和田 正 (津田塾大)

§0. 序言

与えられた可測な flow T に対して T の orbits を保つ Ω 上の bimeasurable な変換の全体 G を導入しその構造と T の性質との関係を調べるのがこの講演の目的である。
いくつかの点で flow T の性質は G とかかわりをもつことが、具体的な flow を調べる時に遭遇するのであるが、この話では、flow のエルゴード性, スペクトル型, エントロピー, 及び flow の time change の問題と G の関係が論ぜられる。G は変換の普通の積について群をなしているが、以下の議論では群構造をくわしく調べることはなされていない。むしろどんな元を含むかとかどんな部分群を含むかといった程度でしか与えられていない。一つの原因は、G に flow T の性質を調べるのに望ましい topology が入るのか不明な事である。Ω に topology が入っていて, それについて連続な G の変換に制限した群を考えれば充分なのかも知れないが今の段階ではそういう設定をすることは出来なかった。たとえば flow T を time change してえられる flow がもとの flow T と同型かという問題で同型写像の連続性がどの程度期待出来るかということなどにかかわるのである。

G の導入の動機のもう１つとして, E. Hopf 以来 Ya. G. Sinai Anosov 等によりあつかわれて来た transverse fields の概念がある

。その特別な場合として与えられた flow $T=(\Omega,\mathcal{B},P,T_t)$ に対し flow $Z=(\Omega,\mathcal{B},P,Z_t)$ が交換関係 $T_tZ_s\omega=Z_{\tau(t,s,\omega)}T_t\omega$ が成立する時 Z を T の transversal flow という。Z 達の性質から flow T の性質を明らかにしようというのが彼等の考え方であるが、我々は transversal commutation を相対的なものと認識するという立場に立って、Z を調べるのに交換関係をみたす変換群 $\{T_t\}$ を含むより広い群 G を導入するものである。したがって彼等の立場に相対的な立場にたっている。

一般にエルゴード理論に於いては、一ケの自己同型に対する研究手段に比べて flow に対する研究手段は少ないように思われるが、我々の方法がどの程度 flow の研究に役立つものかは今後の研究をまたねばならない。

§1 定義

$(\Omega,\mathcal{B}_\Omega,P)$ を standard space, P を確率測度とする。空間 $(\Omega,\mathcal{B}_\Omega,P)$ 上の自己同型の群 $\{T_t\}$ が $(\mathcal{B})$可測, 又は単に可測 flow であるとは,

$$\{(t,\omega)\mid T_t\omega\in E\in\mathcal{B}_\Omega\}\in\mathcal{B}_R\times\mathcal{B}_\Omega\quad \text{for } {}^\forall E\in\mathcal{B}_\Omega$$

が成立することである。ここで $\mathcal{B}_R$ は実直線 R 上の topological Borel field である。以下で単に flow というときも可測な flow を意味するものとする。

定義 1.1　O_ω を点 $\omega \in \Omega$ の flow $\mathcal{T}$ に関する orbit, 即ち $O_\omega = \{T_t\omega ; -\infty < t < \infty\}$ とする。σ を orbit を保つ Ω 上の両可測な変換；　$\sigma O_\omega = O_\eta$　, $\omega, \eta \in \Omega$,
とするとかゝる σ の全体 G は普通の変換の積に関して群になる。変換 $\sigma \in G$ は orbit-preserving であるという。特に

$$\sigma O_\omega = O_\omega$$

をみたす σ の全体 G_s は G の部分群をなしているが変換 $\sigma \in G_s$ は strictly orbit-preserving であるという。記号 C で、全ての T_t $(-\infty < t < \infty)$ と交換可能な両可測変換を表わすことにする。明らかに C は G の部分群になっている。
更に $\mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{A}_s$ を Ω 上の automorphisms 全体と G 及び G_s との共通集合とする。$\mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{A}_s$ はそれぞれ G 及び G_s の部分群をなしている。

上に定義した変換群達は次の意味で flow $\mathcal{T}$ の invariant になっている。即ち flow $\mathcal{T}^0 = (\Omega^0, \mathcal{B}^0, P^0, T_t^0)$ が flow $\mathcal{T}$ と同型（$\theta T_t^0 \theta^{-1} = T_t$）になっていれば，$\theta G^0 \theta^{-1} = G$，$\theta G_s^0 \theta^{-1} = G_s$，等々　である。

§2. flow の時間変更と群 G

群 G は以下に述べる意味で flow の時間変更 (time change)

と密接な関係をもっている。

定義2.1 関数 $\tau=\tau(t,\omega)$; $R\times\Omega\to R$ が次の三条件をみたす時 flow T の time change function と呼ぶ.

(1) $\tau(t,\omega)$ は a.e ω に対して finite valued 且つ $R\to R$ の1対1の写像である.

(2) $\tau(t+s,\omega)=\tau(t,\omega)+\tau(s,T_{\tau(t,\omega)}\omega)$ a.e ω

(3) $\tau(0,\omega)=0$ a.e ω.

T の time change function の全体を $\mathfrak{F}$ と書くことにする。特に τ が $\mathcal{B}$-可測のとき <u>measurable</u> time change function と云う。

変換 $\sigma\in G$ は次の式

$$\sigma T_t\sigma^{-1}\omega=T_{\tau_\sigma(t,\omega)}\omega$$

で関数 $\tau_\sigma(t,\omega)$ を定義するが

Prop. 2.1 1) $\tau_\sigma=\tau_\sigma(t,\omega)$ は flow T の time change function である

2) $\tau_{\sigma_1\sigma_2}(t,\omega)=\tau_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_2}(t,\sigma_1^{-1}\omega),\omega)$ a.e ω

を得る。このようにして我々は写像: $\sigma\to\tau_\sigma$ $(G\to\mathfrak{F})$ を得る。更に $S_t\equiv\sigma T_t\sigma^{-1}$, $Q(E)\equiv P(\sigma^{-1}E)$ とおくことにより新しい flow $S^\sigma=(\Omega,\mathcal{B},Q,S_t)$ がつくられるが明らかに S^σ は T に同型な可測な flow である。

$\mathcal{F}(G) = \{T_\sigma \in \mathcal{F} ; \sigma \in G\}$ とおく。もし $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in C$ ならば $\sigma_1 \sim \sigma_2$ とかくことにすれば，$\sim$ は同値関係であることは容易にわかる。今 $\sigma_1 \sim \sigma_2$ とすれば

$$T_{\tau_{\sigma_1}(t,\omega)}\omega = \sigma_1 T_t \sigma_1^{-1}\omega = \sigma_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1 T_t \sigma_1^{-1}\omega$$
$$= \sigma_2 T_t \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma^{-1}\omega = \sigma_2 T_t \sigma_2^{-1}\omega = T_{\tau_{\sigma_2}(t,\omega)}\omega$$

従って $\tau_{\sigma_1}(t,\omega) = \tau_{\sigma_2}(t,\omega)$ a.e. ω となる。この事から quotient group $G/\sim$ から $\mathcal{F}(G)$ への写像

$$[\sigma] \to T_\sigma \in \mathcal{F}(G)$$ （$[\sigma]$は σを代表元とする class）

は bijection であることがわかる。

time change function $\tau \in \mathcal{F}$ が measurable ならば

$$S_t\omega \equiv T_{\tau(t,\omega)}\omega$$

によって S_t を定義すると後述するように（定理3.3），$\{S_t\}$ は bimeasurable ~~function~~ transformations の 1-parameter group になるが $\tau \in \mathcal{F}(G)$ になる為の条件は不明である。以上をまとめて

命題　群 $G/\sim$ の元は flow T の time changed flow $S^{[\sigma]}$ をひきおこし $S^{[\sigma]}$ は Tに同型になる。又 写像 $G/\sim \ni [\sigma] \to T_\sigma \in \mathcal{F}(G)$ は bijection になっている。

問題は $\mathcal{F}(G)$ の $\mathcal{F}$の中での characterization である。

§3 コホモロジー $H^1(\mathcal{T}, R)$ と time change function

この節では flow $\mathcal{T}$ の time change function の class を characterize する為に コホモロジー $H^1(\mathcal{T}, R)$ を導入する。便宜上 一般の力学系のコホモロジーを定義しておく。

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間、$\mathcal{G}$ を X 上の両可測変換で $\mu(E)=0$ の時は $\mu(gE)=0$、$E \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{G}$ をみたすものの群とする。又 Σ を或る群とする。$\mathcal{G} \times X$ から Σ への写像 φ が

$$\varphi(g_2 g_1, \omega) = \varphi(g_1, \omega)\varphi(g_2, g_1\omega)$$

をみたすとき、φ を力学系 $(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{G})$ の群 Σ に関するコサイクルと呼ぶ。この時コサイクルの全体を記号 $\tilde{H}^1(\mathcal{G}, \Sigma)$ で表わす。コサイクル φ 及び $\psi \in \tilde{H}^1(\mathcal{G}, \Sigma)$ がコバンダリー h に関して互いにホモローグであるとは、

$$\varphi(g, \omega) h(\omega) = \psi(g, \omega) h(g\omega)$$

をみたす X 上の関数 $h = h(\omega)$ が存在する事を云う。

明らかにホモローグの関係は同値関係である。コサイクルのこの関係による同値類のなす群を $\mathcal{G}$ の Σ に関するコホモロジーと呼び $H^1(\mathcal{G}, \Sigma)$ で表わす。

特に flow $\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, T_t)$ に対して群 $\{T_t\}$ の実加法群 R に関するコホモロジー $H^1(\mathcal{T}, R)$ を考えよう。

time change function $\tau \in \mathfrak{F}$ に対して、時間変数についての逆関数 φ を、

$$\varphi(u, \omega) = t \quad \text{if} \quad \tau(t, \omega) = u$$

で定義する。容易に

補題 3.1　φ は次の条件をみたす

a)　$\varphi = \varphi(u, \omega)$ は u について $R \to R$ の1対1の上への写像である (a.e ω)。

b)　$\varphi(u+v, \omega) = \varphi(u, \omega) + \varphi(v, T_u \omega)$　　a.e ω.

c)　$\varphi(0, \omega) = 0$　　a.e. ω.

を得る。φ を τ に対応する (flow T の) additive functional と呼ぶ。つまり additive functional とは $H^1(T, R)$ のコサイクルである。特に $\mathfrak{F}(G)$ に対応する additive ftl. について次の事がわかる。

補題 3.2　$\tau_\sigma \in \mathfrak{F}(G)$ 及び $\tau_{\sigma^{-1}}$ に対応する add. ftl. $\varphi_{\sigma^{-1}}$ について　$\tau_\sigma(t, \sigma\omega) = \varphi_{\sigma^{-1}}(t, \omega)$　a.e. ω が成立する。

上の補題から τ_σ は $\varphi_{\sigma^{-1}}$ が可測の時且つその時に限り可測になることがわかる。二つのコサイクル φ 及び ψ が互いにホモローグになる為の十分条件を与えよう。

定理 3.1　共に可測なコサイクル φ と ψ が条件

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(t,\omega)-\psi(t,\omega)]\,dt<\infty \quad a.e\,\omega$$

をみたすならば φ と ψ は互いにホモローグである。

証明　$$\tilde{h}(\omega)\equiv\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(t,\omega)-\psi(t,\omega)]\,dt$$

$$B=\{\omega\mid \tilde{h}(\omega)<\infty\}$$

とおけば $T_tB\subset B$ でかつ

$$\tilde{h}(T_t\omega)=\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(s,T_t\omega)-\psi(s,T_t\omega)]\,ds$$

$$=\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(t+s,\omega)-\varphi(t,\omega)-\psi(t+s,\omega)+\psi(t,\omega)]\,ds$$

$$=\tilde{h}(\omega)-\varphi(t,\omega)+\psi(t,\omega)$$

$P(B)=1$ だから h を $\tilde{h}$ の1つの measurable version とすれば

$$\varphi(t,\omega)+h(T_t\omega)=\psi(t,\omega)+h(\omega)\quad a.e\,\omega.$$

逆に

定理 3.2　flow $\mathcal{T}$ は ergodic であるとする。共に可測なコサイクル φ と ψ が可積分なコバンダリー h に関してホモローグならば

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(s,\omega)-\psi(s,\omega)]\,ds<\infty\quad a.e\,\omega$$

証明 $\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s[\varphi-\psi]ds = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s[h(T_s\omega)-h(\omega)]ds$

$= \int_\Omega h(\omega)dp - h(\omega)$ 。

以下では~~物~~特に $\mathfrak{F}(G_s)$ に属す time change function の characterization について述べる。

Ω 上の実可測関数 $f=f(\omega)$ が条件

(C) $F_\omega(t)=f(T_t\omega)-f(\omega)+t$ が t について R から R 上への1対1なる関数

をみたすとき f は admissible であると云う。

f を admissible function としたとき

$$\sigma\omega = T_{f(\omega)}\omega \quad , \omega\in\Omega$$

によって Ω 上の変換 σ を定義する。

定理3.3 f を admissible function とし、Ω 上の変換 σ を

$$\sigma\omega = T_{f(\omega)}\omega \quad , \omega\in\Omega$$

によって定義すると σ は strictly orbit-preserving transf. on Ω である、即ち $\sigma\in G_s$.

証明 $\mathcal{T}^*=(\Omega^*, \mathcal{B}_\Omega^*, P^*, T_t^*)$ を $\mathcal{T}$ の S-表現とする。又 θ をその天井関数、$G(p.t)=t$ 及び

$F(p,t) = \theta(p)$ とおく。但し pは basic space Ω°の元 θは ceilling function とする。 basic automorphism は Tで表わす。

$M^* = \{(p,t) \mid p \in M \quad M \subset \Omega^\circ\}$ 又は $M^*(a,b) =$

$$\{(p,t) \mid a \leq G(p,t) < b\} \cap M^*$$ とおく。又

$$W_m = \{(p,x) \in \Omega^* \mid \quad \sum_{k=0}^{m-1} \theta(T^k p) \leq f(p,x) + b < \sum_0^m \theta(T^k p)\} \quad (m \geq 1)$$

$$W_0 = \{(p,x) \in \Omega^* \mid \quad a + f(p,x) \leq G(p,x) < f(p,x) + b < \theta(p)\}$$

とし特に MをΩ°の measurable set, $TM = N$ とおく。

σが fimeasurable を云う為には $M^*(a,b) = \bigcup_0^\infty (M(a,b) \cap \cancel{M_m} W_n)$ だから たとえば $\sigma(M^*(a,b) \cap W_1)$ が Ω°の Borel set なることを云えば ~~　~~ 十分である。（Ω on standerd space だから Ω°に Borel structure が入り Tは両可測にとれ $M^*(a,b)$ なる形の Borel sets で Borel field は生成される。

$f(p,x)$ は Ω上の admissible function fを Ω^*にうつしかえたものである） しかるに

$$\sigma(M^*(a,b) \cap W_1) = (M^* \cap W_0) \cup$$
$$\cup \lim_{n \to \infty} \left\{ \bigcup_{k=0}^\infty N^* \cap [k2^{-n} \leq b + f(p,x) - \theta(T^{-1}p) < (k+1)2^{-n}] \cap \right.$$
$$\left. \cap [k2^{-n} + a - b \leq G(p,x) < (k+1)2^{-n}] \right\}$$

より $\sigma(M(a,b) \cap M_1)$ は $\mathcal{B}$-可測である。$(M^*(a,b) \cap W_m)$ について ~~　~~ も同様である。又 σ^{-1}の可測性についても類似に考えられるから省略する。

以下では σが1対1なることを云う。

$\sigma\omega = \sigma\xi$, $\omega, \xi \in \Omega$ とする、即ち $T_{f(\omega)}\omega = T_{f(\xi)}\xi$ である。
$t \equiv f(\omega) - f(\xi)$ とおけば, $\xi = T_t\omega$ だから

$$\sigma\xi = \sigma T_t\omega = T_{f(T_t\omega)+t}\,\omega = \sigma\omega = T_{f(\omega)}\,\omega$$

従って $f(T_t\omega) - f(\omega) + t = 0$。故に $t = 0$ 即ち $\xi = \omega$。
任意の $\xi \in \Omega$ に対し 元 $\omega \in O_\xi$ と時間 $s \in R$ をえらんで
$\xi = T_s\omega$ と表わす。$t \equiv s - f(T_t\omega)$ となるように t を
えらべるから $\xi = T_{f(T_t\omega)+t}\,\omega = T_{f(T_t\omega)}T_t\omega = \sigma T_t\omega$
即ち σ は onto mapping である。以上のことから $\sigma \in G_s$
が云えた。

$\sigma \in G_s$ を与えれば $\sigma\omega = T_t\omega$ となる時間 t が存在するがこれを $f_\sigma(\omega)$ と表わす。関数 $\mathcal{F}_\omega(t) \equiv f_\sigma(T_t\omega) - f(\omega) + t$ は明らかに1対1である。f_σ の可測性は不明である。

命題3.1 time change function $\tau_\sigma \in \mathcal{F}(G_s)$ は次の形をしている; $\tau_\sigma(t, \sigma\omega) = f_\sigma(T_t\omega) - f_\sigma(\omega) + t$ a.e. ω。

普通の時間を φ_0 で表わす, 即ち $\varphi_0(t, \omega) = t$, $^\forall\omega \in \Omega$.
当然 φ_0 は $\tilde{H}^1(J, R)$ の元である。これを用いて time change function τ が G_s の元から induce される為の十分条件を与える。

定理3.3 φを $\tau\in\mathfrak{F}$ に対応する additive ftl. とする。もし φ が φ_0 に admissible なコバウンダリーに関してホモローグなら τ は G_δ の元から induce される 即ち $\tau\in\mathfrak{F}(G_\delta)$ である。

証明. $\varphi(t,\omega)=f(T_t\omega)-f(\omega)+\varphi_0(t,\omega)$ とする。f が admissible だから前の結果から $\sigma\in G_\delta$ が存在して $f=f_\sigma$。又 σに対応する time change function を τ_σ とすると $\varphi(t,\omega)=\tau_\sigma(t,\sigma\omega)=\varphi_{\sigma^{-1}}(t,\omega)$ a.e. ω である。故に $\tau(t,\omega)=\tau_{\sigma^{-1}}(t,\omega)$ を得る。

以上から

定理3.4 time change function τ に対応する φ が可測で且つ

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi(t,\omega)-t]\,dt<\infty \quad \text{a.e. } \omega$$

ならば τ は G_δの元から induce されて、τによる time changed flow は flow T に metrically isomorphic になる。

これ迄の議論を A. Kolmogorov と I. Arnold が研究したトーラス上の flow の time change の問題へ応用してみよう。

M_2を2次元トーラス，$\mathcal{B}$をtopological Borel field，$dxdy$をnormalized Lebesgue measure，T_tを微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma \quad (\gamma \text{ は irrational number}) \end{cases}$$

によって定義される変換群とし flow $T = (M_2, \mathcal{B}, dxdy, T_t)$ を与える。又 $K(x,y)$ を R^2 上の周期1の関数で

$$\left.\begin{array}{l} 0 < K(x,y) \in C^{(k)} \quad (k \geq 3) \\ \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\,dxdy = 1 \end{array}\right\}$$ を仮定する。

additive ftl $\varphi = \varphi(t,x,y)$; $\varphi(t,x,y) = \int_0^t K(x+s, y+\gamma s)\,ds$ を考えよう。time changed flow $S = (M_2, \mathcal{B}, Q, S_t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{K(x,y)}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\gamma}{K(x,y)} \\ dQ(x,y) = K(x,y)\,dxdy \end{cases}$$

に対し「flow T と S は同型か」というのが我々の問題である。それに対して次の結果を得る。

定理3.5　γ に対して $H, L > 0$ が存在して

$$|m + n\gamma| > \frac{L}{(|m|+|n|)^H}, \quad 0 < H < k-2$$

がすべての整数 m, n について成立するものとする。この時 flow T と flow S は測度論的に同型である。

証明　$K(x,y)=\sum_{m,n} c_{m,n}\, e^{2\pi i(mx+ny)}$ を $K(x,y)$ の Fourier 展開とする

$$\varphi(t,x,y) = t + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} c_{m,n}\,\frac{e^{2\pi i(m+n\gamma)t}-1}{2\pi i(m+n\gamma)}\, e^{2\pi i(mx+ny)}$$

より

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S[\varphi-t]\,dt = \sum \frac{c_{m,n}}{2\pi i(m+n\gamma)}\, e^{2\pi i(mx+ny)}$$

を得る。右辺が絶対収束することを示そう。

$K(x,y)$ を偏微分することによって Fourier 係数 $c_{m,n}$ の評価式が次のように得られる。

$$2^{k-1}\pi^k(|m|+|n|)^k|c_{m,n}| \le \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Max}\frac{\partial^k}{\partial x^k}K,\ \mathrm{Max}\frac{\partial^k}{\partial y^k}K\right\} \equiv M$$

$$\therefore\quad \frac{|c_{m,n}|}{2\pi|m+n\gamma|} \le M\Big/ 2^k\pi^{k+1}L(|m|+|n|)^{k-H}$$

$N(j)$ を $|m|+|n|=j$ となる格子点 (m,n) の個数とすれば

$$N(j)\le 2^2(j+1)\le 2^3 j$$

したがって

$$\frac{M}{2^k\pi^{k+1}L}\sum(|m|+|n|)^{H-k} \le \frac{M}{2^k\pi^{k+1}L}\overset{\text{トル}}{\sum} N(j)(j)^{H-k}$$

$$\le \frac{M}{2^k\pi^{k+1}L}\,2^3\cdot\sum j^{H-k+1}$$

$0<H<k-2$ より右辺は収束する。よって前定理より J は S に同型であることが結論される。

§4 コサイクル f_J in $H^1(G_\delta, R)$

この節では flow J によって決まる群G_δのコサイクルf_Jを考察する。え$\sigma\in G_\delta$に対し$f_\sigma=f_\sigma(\omega)$, $\sigma\omega=T_{f_\sigma(\omega)}\omega$が対応することを前にみたが$\{f_\sigma;\sigma\in G_\delta\}$は次の性質をみたすことが容易にわかる。

補題4.1 $f_{\sigma_2\sigma_1}(\omega)=f_{\sigma_1}(\omega)+f_{\sigma_2}(\sigma_1\omega)$ a.e ω

$G_\delta\times\Omega$からRへのmappingを

$$f_J(\sigma,\omega)\equiv f_\sigma(\omega)$$

で定義すれば上の補題から$f_J\in\tilde{H}^1(G_\delta,R)$である。$\tau_\theta\in\mathcal{F}(G_\delta)$に対し, $G_\delta\times\Omega\to R$なるmapping $\tau_\theta\circ f_J$を

$$(\tau_\theta\circ f_J)(\sigma,\omega)=\tau_\theta(f_J(\sigma,\omega),\omega)$$

で定義すると

補題4.2 $\tau_\theta\circ f_J$はf_Jにホモローグな$\tilde{H}^1(G_\delta,R)$のコサイクルである。

証明。 $\tau_\theta\circ f_J(\sigma_2\sigma_1,\omega)=\tau_\theta(f_J(\sigma_2\sigma_1,\omega))$

$$=\tau_\theta(f_J(\sigma_1,\omega),\omega)+\tau_\theta(f_J(\sigma_2,\sigma_1\omega),T_{f_J(\sigma_1,\omega)}\omega)$$
$$=(\tau_\theta\circ f_J)(\sigma_1,\omega)+(\tau_\theta\circ f_J)(\sigma_2,\sigma_1\omega)$$

又 $\tau_\theta(t,\omega)=f_\theta(T_t\omega)+f_\theta(\omega)+t$ に於いて $t=f_J(\sigma,\omega)$ とおくことにより

$$\tau_\theta\circ f_J(\sigma,\omega)=f_\theta(T_{f_J(\sigma,\omega)}\omega)-f_\theta(\omega)+f_J(\sigma,\omega)$$
$$=f_\theta(\sigma\omega)-f_\theta(\omega)+f_J(\sigma,\omega)$$

即ち $\tau_\theta \circ f_J$ はコバンダリー f_θ に関して f_J にホモローグである。

逆に

補題4.3 コサイクル $g = g(\sigma, \omega) \in \tilde{H}^1(G_s R)$ が admissible コバンダリー $h = h(\omega)$ に関してコサイクル f_J にホモローグならば G_s の元 θ が存在して $\tau_\theta \circ f_J = g$ a.e. ω

証明 $\theta\omega \equiv T_{h(\omega)}\omega$, $\omega \in \Omega$ で θ を定義する。$\theta \in G_s$ であり $\tau_\theta(t, \omega) = h(T_t\omega) - h(\omega) + t$ である。これから

$$
\begin{aligned}
(\tau_\theta \circ f_J)(\sigma, \omega) &= h(T_{f_J(\sigma,\omega)}\omega) - h(\omega) + f_J(\sigma, \omega) \\
&= h(\sigma\omega) - h(\omega) + f_J(\sigma, \omega) \\
&= g(\sigma, \omega) .
\end{aligned}
$$

以上の二つの補題から J と同じ trajectories をもつ flow が J に同型になる為の条件を次のような形で与えることが出来る。

定理4.1 $S = (\Omega, \mathcal{B}, Q, S_t)$ を flow J と同じ軌道をもつ flow とする。もしコサイクル f_S と f_J が admissible なコバンダリーに関してホモローグならば S と J は同型である。又 g が admissible コバンダリーに関して f_J にホモローグならば、J に同型な J の time changed flow S が存在して $g = f_S$ である。

§5. 力学系 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ と flow $\mathcal{T}$ のエントロピー

この節では力学系 $\mathcal{A}=(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ の構造と $\mathcal{T}$ のエントロピー $h(\mathcal{T})$ との関係について述べる。A の定義は次の通りである。

timechange functions $\tau_\sigma(t,\omega) \in \mathcal{F}(\mathfrak{A})$ が $\forall\omega$ について微係数 $\left.\dfrac{d\tau_\sigma(t,\omega)}{dt}\right|_{t=0} \neq 0$ をもつ時 class $\mathcal{F}(A)$ に属すという

$A = \{\sigma \in \mathfrak{A} \mid \tau_\sigma \in \mathcal{F}(A)\}$ とおく。

$$\lim_{h\to 0}\,[\tau_\sigma(t+h,\omega) - \tau_\sigma(t,\omega)]/h = \lim_{h\to 0}\tau_\sigma(h, T_{\tau_\sigma(t,\omega)}\omega)/h$$

だから $\tau_\sigma \in \mathcal{F}(A)$ は任意の t で微分可能である。又

$\sigma_1, \sigma_2 \in A$ ならば

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau_{\sigma_1\sigma_2}(t,\omega)}{t} = \lim_{\tau_{\sigma_2}\to 0}\frac{\tau_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_2}(t,\sigma_1^{-1}\omega),\omega)}{\tau_{\sigma_2}(t,\sigma_1^{-1}\omega)}\lim_{t\to 0}\frac{\tau_{\sigma_2}(t,\sigma_1^{-1}\omega)}{t}$$

より $\sigma_1\sigma_2 \in A$ を得る。又 $t = \tau_{\sigma^{-1}}(\tau_\sigma(t,\sigma\omega),\omega)$ だから

$$\lim_{s\to 0}\frac{\tau_{\sigma^{-1}}(s,\omega)}{s} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tau_\sigma(t,\sigma\omega)} = \frac{1}{\tau'_\sigma(0,\sigma\omega)}$$

即ち $\sigma^{-1} \in A$, if $\sigma \in A$ である。したがって A は群をなしていることがわかる。明らかに 群 $\{T_t\} \subset A$ だから 力学系 $\mathcal{A}=(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, A)$ は $\mathcal{T}=(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, P, T_t)$ の拡張になっている。

補題5.1 (Ya. G. Sinai) τ_σ を ergodic flow $\mathcal{T}$ の time change function で $\sigma\in\mathcal{A}$ とすれば

$$\tau_\sigma(t,\omega)=\lambda t \quad \text{a.e. } \omega$$

定理5.1 flow $\mathcal{T}$ は ergodic なるものとする。もし $\mathcal{T}$ のエントロピー $h(\mathcal{T})$ が $0<h(\mathcal{T})<\infty$ ならば

$$\mathcal{A}=\mathfrak{N}\cap\mathcal{C}$$

証明. $\mathcal{S}=(\Omega,\mathcal{B}_\Omega,P,S_t)$ を $\tau_\sigma\in\mathcal{A}$ による $\mathcal{T}$の time changed flow とする。

$$h(T_1)=h(S_1)=h(T_\lambda)=\lambda h(T_1)$$

従って $\lambda=1$ 。故に $S_t\omega=\sigma T_t\sigma^{-1}\omega=T_t\omega$, 即ち $\sigma\in\mathcal{C}$ 。
一方 $\mathcal{A}\supset\mathfrak{N}\cap\mathcal{C}$ は明らかである。

定理5.2 $\mathcal{J}=\mathcal{A}\cap\mathcal{G}_1$, 但し $\mathcal{T}$ は ergodic なるものとする。

証明. $\sigma\in\mathcal{A}\cap\mathcal{G}_1$ とする。$\tau_\sigma(t,\omega)=f_\sigma(T_t\omega)-f_\sigma(\omega)+t$

$$\sigma \cancel{T_t\omega = T_{f_\sigma(T_t\omega)+t}\,\omega = T_t\sigma\omega}$$

であるが上の補題から $f_\sigma(T_t\omega)-f_\sigma(\omega)+t=\lambda t$ a.e. ω
となる。$\mathcal{T}$ が ergodic だから $f_\sigma(\omega)=c$ (const) a.e. ω 従って
$\sigma\omega=T_{f_\sigma(\omega)}\omega=T_c\omega$ より, $\sigma=T_c$ a.e. ω 。

系5.1 flow $\mathcal{T}$ は ergodic であるとする。もし或る T_{t_0} と交換可能でない自己同型 $\sigma\in A$ が存在すれば エントロピー $h(\mathcal{T})$ は zero or infinite である。

上の系で二通りの可能性 $h(\mathcal{T})=0$, $h(\mathcal{T})=\infty$ が有り得るが実際にどちらの場合も起り得る。後者の例としては $\mathcal{T}$ が Brown運動の flow がある。前者の例としてはロバチェフスキー平面上の horocycle flow などがある。

エントロピーが正の力学系について前の定理から $A=\mathfrak{A}\cap\mathcal{C}$ であるが、必しも $A=\mathcal{T}$ とはならない。その観点から flow ではなくて automorphism について、これ迄の類似な approach をすることによって次の結果を述べることが出来る。

例5. $\mathcal{T}=(\Omega,\mathcal{B},P,T)$ を普通の two sided Bernoulli shift の力学系とし、状態は有限ヶ $x_1,\dots,x_n$ をとりそれが出現する確率をそれぞれ $p_1,\dots,p_n$ とする。状態空間 $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ の1つの permutation を L とし、Ω 上の変換 σ_L を

$$\sigma_L(\dots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\dots)=(\dots,L\omega_{-1},L\omega_0,L\omega_1,\dots)$$

で定義する。又 K を Ω 上の連続(discrete top. について)な変換の全体とする。

定理5.2. 群 $A \cap K$ が T と 全ての σ_L によって生成されるのは $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ の時且その時に限る。又 $p_i \neq p_j$ となる pair p_i, p_j が存在すれば $A \cap K = \{T^m\}$ となる。

state が一様分布しているときは $\{T^m\} \subsetneq A$ となっている訳である。従ってこの時 力学系 A は $\{T^m\}$ の nontrivial な拡張になっている。

以下では A の structure によって flow J のスペクトル型がきまることがあることを示す。下の定理の例として horocycle flow などを考えられたい。

定理5.3 J を ergodic flow とする。
もし A が 1-parameter subgroup $\{\sigma_s \mid \sigma_s \in \mathcal{C}\}$ を含むならば J は連続スペクトルをもつ。