数理解析研究所講究録
第147巻 1972年 66-81

RANDOM WALKS

阪大 理 渡辺 毅

§1. 序

D. S. Ornstein の論文[1]について紹介する。紹介というよりも原論文を読むための手引きといったつもりで，標準的でないものでも記号は原論文のまま用いる。

Random walk の状態空間 E は，d-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ または d-次元整数点の空間 $\mathbb{Z}^d$ である。もっと一般に局所コンパクト Abel 群 G を考えることもある。E上の random walk とは E に値を取る独立同分布の確率変数の部分和 $(S_n)_{n\geq 0}$ のことである。独立確率変数の和の理論は確率論の歴史と共に古いものであるが，絶えず確率論の新らしい研究テーマを提供してきた。最近の一つの重要な研究テーマとして，random walk $(S_n)_{n\geq 0}$ が時間的に一様な Markov 過程の特別なクラスであることに着目し，その到達確率やポテンシャル核の特性を調べることがあげられる。このような研究方向は，F. Spitzer が

50年代の半ばからの一連の研究（その大部分は [2] にまとめられている）において $E=\underset{\sim}{Z}^d$ の場合に体系的理論をつくり上げたことによって確立した。Spitzer の理論は従来から知られたきた吸収問題，Erdös-Feller-Pollard の再生定理，Chung-Erdös の再帰性判定条件の拡張あるいは改良ばかりでなく，新らしい型の極限定理（複数）~~や~~や再帰walk のポテンシャル核に関する結果を含んでいる。

Ornstein の論文の目的はつぎの2点である。

(1) Spitzer の理論を $\underset{\sim}{R}^1$ 上の random walk に拡張する。

(2) Combinatorial method による統一的な取扱いを与えていること。

Radom walk の研究に Fourier 解析が有効であることはよ知られており Spitzer の方法も Fourier 解析に負うところが多い。Port-Stone [3] は Spitzer の方法が $E=\underset{\sim}{R}^1$ や $E=G$ の場合にも拡張できることを示した。Ornstein は Fourier 解析を全く用いないで combinatorial method による新らしい証明を与えたのである。大雑把に言って，

combinatorial method = 原始的ポテンシャル論

であり，これは random walk 以外の Markov 鎖への拡張の可能性を含むものである。この点から見て，Ornstein の論文は今後も十分研究の余地があると思われる。特に再帰walk

の研究において Ornstein が導入した "Schema de remplissage" の方法は一般の再帰 Markov 鎖の研究の有力な方法であることが知られてきている (Meyer [4], [5]) が, そのポテンシャル論的把握はなお十分とは思われない.

記号および用語

- 状態空間 E は実数空間 $\underset{\sim}{R} = (-\infty, \infty)$ である.
- u, v etc. は $\underset{\sim}{R}$ 上の確率測度を表わす.
- $(X_n)_{n \geq 1}$ は互に独立で, 分布 u の実確率変数列.
- $S_n = x + X_1 + \cdots + X_n$ $(S_0 = x)$ は x から出発する random walk を意味する. S_n において出発点 x を明示しないが, その代り基本測度に出発点を添字として書く. $\underset{\sim}{P}^x(\cdot)$ は x から出発する $(S_n)_{n \geq 0}$ の基本測度を表わす.
- 関数 f, 測度 v (いずれも $\underset{\sim}{R}$ 上の) に対し
$$Tv = u * v, \quad Tf = u * f, \quad (* \text{ は合成積}).$$
すなわち T は u による合成積作用素である.
- $$u^{(n)} = u * \cdots * u \quad (n \text{ 回})$$
- ψ_A は集合 A の定義関数, $\overline{\psi}_A$ は ψ_A による積作用素, すなわち関数または測度を集合 A に制限する作用素である: $\overline{\psi}_A f = f$ on A, $= 0$ on $\underset{\sim}{R} \setminus A$.
$\overline{\psi}_A v(B) = v(A \cap B)$.

- $\psi_A' = 1 - \psi_A = \psi_{\mathbb{R}\setminus A}$. $\overline{\psi}_A'$ の意味も上と同様.
- $\tilde{f}(x) = f(-x)$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ を $\int f$, $\nu(A)$ を $\int_A \nu$ とも表わす. また $\int f\cdot\nu$ は $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\nu(dx)$ である.
- δ_x は $\{x\}$ における単位測度.
- $T_A := \inf\{n \geq 0;\ S_n \in A\}$ は集合 A への到達時間である. x から出発する walk についての S_{T_A} の分布 ρ_x^A を調和測度という. その combinatorial な表示は

$$\rho_x^A(B) = \int_B \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\psi}_A (T\overline{\psi}_A')^i \delta_x$$

で与えられる. $A \cap B = \phi$ の時, ($\mathbf{P}^x$ の下で) B より先に A に達する確率を $h_x(A, B)$ と書く. 明らかに

$$h_x(A, B) = \rho_x^{A\cup B}(A)$$

である.

- S_n が $n \geq 1$ で B に達する前に A を訪問する平均回数を $H_x(A, B)$ で表わす. 確率論的表示と combinatorial 表示はそれぞれ,

$$H_x(A, B) = \mathbf{E}^x\Big[\sum_{n < T_B'} \psi_A \circ S_n\Big]$$
$$= \int_A \sum_{i=0}^{\infty} (\overline{\psi}_B' T)^i \delta_x ,$$

ここで $T_B' = \inf\{n \geq 1;\ S_n \in B\}$, $\cancel{T_A}$

・ u が算術的であるとは，u がある $\delta > 0$ の整数倍の上に全測度をもつことである．

・ u が非算術的とする．I は有限区間を表わす．そのとき $\sum_{n\geq 0} u^{n}(I)$ は (a) すべての I に対して無限大であるか，(b) すべての I に対して有限であるかのいずれかである．(a) の時 u，あるいは対応する random walk (S_n) は再帰的，(b) のとき非再帰的であるという．

§2. 調和測度に関する極限定理(*)

以下全体を通じて，u が非算術的であることを仮定する．

定理 1 A, B を有界 Borel 集合で $A \cap B = \phi$ とする．その時

(2.1) $$\int_{t}^{t+1} h_x(A,B)\,dx$$

は $t \to +\infty$, $t \to -\infty$ において極限をもつ．

この定理の証明において基本的な役割を果す次の補題は興味深い．

補題(**) 有限区間 I, 実数 a, $\varepsilon > 0$ が与えられた時，番号 n, k が存在し

(*) [1] の §1 および §2.

(**) [1] の §0, T7 (p. 11).

(2.2) $$\int | u^{(n)} * \psi_I - u^{(n+k)} * \psi_{I+a} | < \varepsilon .$$

これは I 上の一様分布から出発した random walk の時刻 n における分布と，I+a 上の一様分布で出発した walk の $n+k$ における分布が十分近いことを意味している．u の絶対連続部分が 0 でない時には，(2.2) よりも強い

(2.3) $$\lim_{n\to\infty} \int | u^{(n)} * (\delta_0 - \delta_a) | = 0$$

という関係が示される．これは異なる 2 点から出発した random walk が長時間の後には殆んど同じ分布にしたがうことを意味している．

A ⊃ B とする．定理 1 によって

(2.4) $$L^A(B) = \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \rho_x^A(B)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} h_x(B, A\setminus B)\,dx$$

が存在する．$\int_t^{t+1} \rho_x^A(\cdot)\,dx$ は絶対連続な測度であるから，Vitali-Hahn-Saks の定理によって $L^A(\cdot)$ も絶対連続な測度になる．すなわち

<ins>系</ins>　任意の有界集合 A に対し，A 上の絶対連続な測度 L^A が存在して，(2.4) を満す．

A, B に制限をつけると $h_x(A, B)$ の極限の存在が証明される．

<u>定理 2</u>　A, B が有限区間（閉，開，半開いずれでもよい）で $A \cap B = \phi$ とする．この時

(2.5)　　$\lim_{x \to \infty} h_x(A, B)$ および $\lim_{x \to -\infty} h_x(A, B)$

が存在する．

<u>系</u>　A が有限区間ならば，ρ_x^A は $x \to \infty$ のとき (2.4) で定義される測度 L^A に漠収束する．

定理 1，2 の双対として次の定理が示される．

<u>定理 3</u>　A, B が有限区間ならば，次の各極限が存在してすべて有限である．

(a)　　$\lim_{y \to \infty} H_x(B+y, A)$,　　$\lim_{y \to -\infty} H_x(B+y, A)$,

(b)　　$\lim_{y \to \infty} H_y(B, A)$,　　$\lim_{y \to -\infty} H_y(B, A)$.

<u>注意</u>　u が非再帰的ならば，上の結果は $A = \phi$ の場合にも成り立つ．これは Feller-Orey の再生定理（Feller [6], Chap. XI, §9）に他ならない．

§3. 再帰的な walk のポテンシャル核 (*)

この節ではまずつぎの2つの仮定をおく．

(*) [1] の §3 および §5.

(3.1)　uは再帰的である。

(3.2)　uが0でない絶対連続部分をもつ。

次の定理はuが非再帰的な場合のFeller-Oreyの再生定理$^{(*)}$の再帰的walkにおける類似である。

定理4　fが有界な台をもつ有界関数であって、$\int f = 0$をみたすとする。このとき

(a)　$\sum_{i=1}^{n} T^i f$はある極限関数$\bar{f}$に有界収束する。

(b)　$\lim_{x\to\infty} \bar{f}(x)$および$\lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x)$が存在し、これらの値は

$$(3.3)\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \bar{f}(x) = \pm \frac{\int x f}{\int x^2 u},$$

で与えられる。

(*)　この定理はつぎのように述べられる。fが有界な台をもつ有界関数ならば、uが非再帰的であることから

(a)　$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T^i f(x)$が存在するが、さらに

(b)　$\lim_{x\to\infty} \bar{f}(x)$, $\lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x)$が存在し、

(c)　$\int x u$が存在して、>0ならば $\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \bar{f}(x) = \dfrac{\int f}{\int x u} \\ \lim_{x\to-\infty} \bar{f}(x) = 0 \end{cases}$,

$\int x u$が存在しないときは、$\lim_{x\to\pm\infty} \bar{f}(x) = 0$.

命題 (a) がエルゴード定理

$$(3.4)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} T^i f(x)}{\sum_{i=1}^{n} T^i g(x)} = \frac{\int f}{\int g} \qquad (f, g > 0)$$

を含むものであることに注意しておく。

Ornstein は (a) の証明の第1段階として次の Lemma を証明している。

<u>補題</u>　I が有限区間とする。f は I に台をもち，$|f| \le 1$，$\int f = 0$ なる関数とする。この時 $B > 0$ が存在して

$$(3.5)\qquad \left| \sum_{i=1}^{n} T^i f(x) \right| < B, \quad \forall n, \forall x$$

である。この B は f に無関係に選ぶことができる。

Ornstein はこの Lemma の証明において，彼と Chacon がエルゴード定理の証明で用いた論法を適用している。

$f = f^+ - f^- = r - h$ に対し，$(r_n, l_n)_{n\ge 1}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{cases} r_1 = r, & l_1 = 0, \\ r_n = T r_{n-1} - l_n, & l_n = T r_{n-1} \wedge \left(h - \sum_{i=1}^{n-1} l_i\right). \end{cases}$$

この時

(1)　$r_n \ge 0$，$l_n \ge 0$.

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ は局所積分可能である。

(3)　$\sum_{i=1}^{\infty} l_i = h$ a.e.

(4) $\sum_{i=1}^{\infty} r_i$ は a.e. 有界である。

これから

$$\sum_{i=1}^{n} T^i f^+ = \sum_{i=1}^{n+1} r_i(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n-i} T^j l_i\right)(x)$$
$$< \sum_{i=1}^{\infty} r_i(x) + \sum_{i=1}^{n} T^i h(x),$$

したがって，$\sum_{i=1}^{n} T^i f$ は上に a.e. 有界である。$-f$ に同様の議論を行うことによって $\sum_{i=1}^{n} T^i f$ が下に a.e. 有界なことも示される。$\left|\sum_{i=1}^{n} T^i f(x)\right|$ がすべての x に対して有界であること，その bound が f に無関係に選べることは比較的簡単に示される。

v のポテンシャル核と Poisson 方程式に関する結果をまとめておく。

定理 5

(3.6) $\quad l_n = C_n \cdot dx - \sum_{i=0}^{n} u^{(i)}, \qquad C_n = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} u^{(i)}$

とおく。一般に測度 v の絶対連続部分の密度関数を v'' と表わす。

(a) $\quad l_n''(x) = C_n - \left(\sum_{i=0}^{n} u^{(i)}\right)''$ は $n \to \infty$ のときある極限関数 $l_\infty(x)$ に局所 (L^1) 収束する。

(b) $\quad L_{\pm\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} \int_x^{x+1} l_\infty(x)\,dx$ が存在し，$-\infty \leq L_{\pm\infty} < \infty$ である。さらにつぎのいずれかである。(i) $L_{+\infty} = L_{-\infty} = -\infty$，(ii) $L_{+\infty}$，$L_{-\infty}$ の一方が有限で残りが $-\infty$。

(c) l_n はある Radon 測度 l に収束する.（任意の有界 Borel 集合 B に対し $l_n(B)\to l(B)$ という意味で.）あきらかに $l''(x)=l_\infty(x)$.

(d) r は有界な台をもつ非負有界関数とする。このとき $g=l*r$ は下に有界な関数で，Poisson 方程式

$$(3.17)\qquad Tg-g=r$$

の解である. ∎

(e) ϕ は有界な台をもつ非負関数，$f\geq c$ および g が

$$Tf-f=Tg-g=\phi$$

を満すとする。この時

$$f-g=ax+b \qquad \text{a.e.}$$

である。特に $\int x^2u=\infty$ の時は $f-g=b$ a.e.

§4. 再帰性に関する Spitzer 判定条件(*)

Chung-Fuchs による再帰性判定条件はよく知られている (Feller [6] p. 577). u の Fourier 変換 $\int e^{ix\theta}u(dx)$ を $\hat{u}(\theta)$ で表わす. u が非再帰的であるための必要十分条件は，

(*) [1] の §4. なおこの節の結果は高次元でも成り立つ.

$$(4.1)\qquad \overline{\lim_{t\to 1}} \int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t\hat{u}(\theta)}\right) d\theta < \infty , \quad \exists\, a>0$$

なることである。

<u>定理 6</u>　u が非再帰的であるための必要十分条件は，

$$(4.2)\qquad \int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{u}(\theta)}\right) d\theta < \infty , \quad \exists\, a>0$$

なることである。

(4.2) の左辺は (4.1) で形式的に lim を積分の中に入れたものであるが，証明ははるかに難しくなる。

<u>補題 A</u>　u が絶対連続部分をもつ場合に証明すれば十分である。

これを示すには u を多少変更して，絶対連続部分をもつ u_0 で

$$\left| \frac{1}{1-t\,\hat{u}(\theta)} - \frac{1}{1-t\,\hat{u}_0(\theta)} \right| \leq C , \quad 0\leq t\leq 1, \quad |\theta|<a$$

をみたすものが存在することを示す。Chung–Fuchs の判定条件により，再帰性は u と u_0 に対して変らない。また (4.2) の収束発散も u と u_0 に対して同じである。したがって u の代りに u_0 について議論すれば十分である。

(4.1) と Fatou の補題から，

<u>補題 B</u>　u が非再帰的ならば，(4.2) が成り立つ。

<u>補題 C</u>　f がつぎの条件を満足するとする。

(4.3) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ は原点について対称であり、} \hat{f}(\theta) \text{ は } (-a, a) \text{ に台} \\ \text{を持つ。さらに、} \int |f| \leq 1,\ \int f = \int x f = 0, \\ \int x^2 |f| < \infty \text{ を満足する。} \end{array}\right.$

このとき

$$(4.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} \leq \int_{-a}^{a} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\hat{u}(\theta)}\right) d\theta$$

が成り立つ。

何となれば

$$\text{左辺} = \lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} \hat{f} \sum_{1}^{n} \widehat{u^{(i)}} = \int_{-a}^{a} \hat{f}(\theta) \frac{1}{1-\hat{u}(\theta)} \leq \text{右辺}.$$

以上により、次の補題を示せば定理が証明されたことになる。

<u>補題 D</u>　u が絶対連続部分をもつ再帰的な分布であるとする。このとき、任意の $a>0$ と $K>0$ に対して、(4.3) の条件を満足する f が存在して

$$(4.5) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f \cdot \sum_{i=1}^{n} u^{(i)} \geq K$$

をみたす。

k は非負、対称、$\int k = 1$、$\hat{k}$ が $(-a, a)$ に台をもつ任意の関数、$I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で χ_I をその定義関数とする。

$b>1$ に対して

$$g(x)\begin{cases} = 1 & x\in[b-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}]\cup[-b-\frac{1}{2}, -b+\frac{1}{2}] \\ = -2 & x\in[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ = 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義する。 $f=g*k*\psi_I$ が(4.3)の条件を満足することは容易に分る。 b を十分大きく取ることによって，f が(4.5)を満すことを示すのが証明の眼目である。この部分の証明~~X~~は，定理4の補題で用いた論法を精密化することによって示される。

§5. "Schema de remplissage" について

Ornstein が定理4の補題および定理6の補題Dで用いた論法は再帰的Markov過程の研究に重要な道具を提供するものである。Meyer [4] はこれを "Schema de remplissage"（穴埋めの図式）と呼んでいる。定義と基本的な結果を以下に説明する。

λ, μ が2つの正測度，P が劣Markov核であるとする。$(\lambda_n, \mu_n)_{n\geq 0}$ を次のように定義する。

$$\lambda_0=(\lambda-\mu)\vee 0, \qquad \mu_0=(\mu-\lambda)\vee 0,$$
$$\lambda_1=(\lambda_0 P-\mu_0)\vee 0, \qquad \mu_1=(\mu_0-\lambda_0 P)\vee 0,$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{n+1}=(\lambda_n P-\mu_n)\vee 0, \qquad \mu_{n+1}=(\mu_n-\lambda_n P)\vee 0.$$

Meyerはこの図式の意味をつぎの説明している。分布μの穴に分布λの土を注ぐ。$\lambda\wedge\mu$の土が穴に落ちる。したがって$\lambda_0=\lambda-\lambda\wedge\mu$は残っている土，$\mu_0=\mu-\lambda\wedge\mu$はまだ埋められていない穴の部分を示す。$\lambda_0$の土を空中に吹きあげもう一度穴埋めの作業を行う。この結果$\lambda_0 P$の分布で土が落ちて来る。$\lambda_0 P\wedge\mu_0$の土が穴に落ち，$\lambda_1=\lambda_0 P-\lambda_0 P\wedge\mu_0$の土が残り，$\mu_1=\mu_0-\lambda_0 P\wedge\mu_0$の部分が埋らないで残る。前と同じ仕方で$\lambda_1$の土を空中に吹きあげ，以下同じ作業を繰り返す。明らかにλ_n，μ_nは減少し

(5.1) $$\mu_\infty=\lim \mu_n,\qquad \lambda_\infty=\lim \lambda_n$$

が存在する。

どのような条件があれば穴が完全に埋められるか，すなわち$\mu_\infty=0$になるかを問うことは自然である。λの全測度がμの全測度より大きくなければならないことは自明であるが，それ以上のことはPの性質による。

定義 2つの有界測度α，βが与えられているとする。すべての有界，（Pに関して）超過的な関数fに対して

$$\beta(f)\le\alpha(f)\qquad(\alpha(f)\text{は}\int f(x)\alpha(dx)\text{を表わす})$$

が成り立つとき，$\beta\dashv\alpha$と表わす。

つぎの定理はH. Rootによる。

__定理__ $\mu_\infty = 0$ であるための必要十分条件は $\mu \dashv \lambda$ なることである。

特に有界な超過的関数が定数に限る場合（Pが再帰的な場合）には，λとμの全測度が同じであればλは完全に使われて穴が埋まる。

文献

[1] D.S. Ornstein: Random walks I, Trans. Amer. Math. Soc., 138 (1969), 1-43.

[2] F. Spitzer: Principles of random walk, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.

[3] S. Port and C. Stone: Potential theory of random walks on abelian groups, Acta Math. 122 (1969), 19-144.

[4] P.A. Meyer: Travanx de H. Rost en théorie du balayage, Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Math. No. 191, Springer, Heidelberg (1971), 237-250.

[5] ――――――: Solutions de l'équation de Poisson dans le cas recurrent, ibid., 251-269.

[6] W. Feller: An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, Wiley, New York, 1966.