数理解析研究所講究録
第147巻 1972年 82-110

コンパクト位相群上の変換の分解

城西大 理 青木統夫

1. 序

Abramov は quasi-discrete spectrum をもつ保測変換の概念を導入し，これらの変換に対して一つの理論を作った。[2] Hahn, Parry [12] の中で，彼等はコンパクト空間上の位相同型に対して類似の理論を展開している。T はコンパクト・連結・距離・可換群上のエルゴード的アフィン変換とし，更に $\eta(T)$ は factor $T_{\eta(T)}$ が quasi-discrete spectrum をもつような最大な分解とする。Parry [15], Walters [21] は $T_{\pi(T)}$ が 0-エントロピを持つような最大な分割 $\pi(T)$ と $\eta(T)$ が一致すること証明した。本論では，コンパクト・可換群上の totally エルゴード的アフィン変換は quasi-discrete spectrum をもつ factor と完全正のエントロピを持つ factor との skew product と isomorphic であることを証明する。このような T が 0-エントロピと完全正のエントロピの factor に分解できるかどうか分からない。(講演の中に誤りがあったので訂正します。)

2. 準 備

Gはコンパクト・アーベル群，そしてmはG上の完備化された Haar 測度とする。確率空間$(G, \mathcal{E}, m)$を考える。ここで$\mathcal{E}$はGの開集合全体から成生されたσ－代数の完備化である。G上のアフィン変換とは次のようなものである。

$$T(x) = a + A(x) \quad , x \in G$$

ここで，AはGからG上への endomorphism で，$a \in G$とする。Tはm－保測変換である。HはGの部分群とする。$\zeta(H)$はHの coset の全体としたとき，$\zeta(H)$は可測分割である。（ここでの可測性は Rohlin の意味ではないことに注意する。）$H_1 \subset H_2$ ならば，$\zeta(H_1) \geqslant \zeta(H_2)$，$\zeta(G)$は$G$の自明な分割，$\zeta(0)$は$G$の各点分割である。$H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ であるとき，$\zeta(\vee H_n) = \wedge \zeta(H_n)$。ここで$\vee H_n$は$H_n$を含む最小の位相群を表わす。コンパクト Hausdorff 空間W上の homeomorphism $B \ (W \longrightarrow W)$が次の条件をみたすとき，$B$は distal であるという。任意の整数列$\{n_j\}$，$x, y, z \in W$に対して，

$$\lim B^{n_j}(x) = \lim B^{n_j}(y) = z$$

ならば，$x = y$。distal homeomorphism の連続な image である homeomorphism は又 distal である。W上にB－不変な確率測度（Borel）が唯一つ存在するとき，Bは uniquely

エルゴード的であるという。本論をとおして，Γ は G の character group を表わし，endomorphisms とそれの双対は同じ記号で表わすことにする。$Z(\lambda)$ は整数を係数にもつ多項式環を表わす。T が totally エルゴード的，quasi-discrete spectrum をもつならば，T は distal である[12]。

$$\Gamma_n = \{ f \in \Gamma \ : \ (A - I)^n f = 0 \}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

は Γ の部分群である。$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ならば，T は quasi-discrete spectrum をもつ。逆も成立する。X は距離つけ可能，B は distal そして P－不変（確率（Borel）測度）であれば，$h_P(T) = 0$ [15]。T が G 上の invertible アフィン変換，G は dense orbit $\{T^n x\}$ をもつならば，T は m－エルゴード的である[7]。T は m－totally エルゴード的アフィン変換，有限 A－orbit をもつ $f(\in \Gamma)$ はつねに $A(f) = f$ である[13]。T が m－totally エルゴード的である必要十分条件は次をみたすことである。a と $(A - I)G$ を含む最小な位相群は G と一致し，$f \in \Gamma$ に対して，$A^k(f) = f$ ならば，$A(f) = f$ である[13]。endomorphism A が m－エルゴード的ならば，A は完全正のエントロピをもつ，そして $(A - I)G = G$ である。故に，$(A - I)(b) = -a$ をみたす $b \in G$ が存在して，

$$T(b + x) = b + A(x), \quad x \in G$$

であるから，T は完全正のエントロピをもつ。$\lambda \in \sigma(S(H))$

は group partition $\varsigma(H)$ によって成生されたσ-代数とする。

$$\mathfrak{p}(T,P) = \wedge_{j=0}^{\infty} T^{j} \vee_{\alpha} \{\alpha : h_P(T,\alpha)=0\}$$

を定義する。G が距離づけ可能ならば，(G, ε, P) はルベッグ空間である。このとき，$\mathfrak{p}(T,P)$ は $T_{\mathfrak{p}(T,P)}$ が 0-エントロピをもつ maximum のσ-代数である [16]。$T_{\mathfrak{B}(T,P)}$ は完全正のエントロピをもつσ-代数 $\mathfrak{B}(T,P)$ が存在するとき，$\mathfrak{p}(T,P)$ と $\mathfrak{B}(T,P)$ は P-independent である [16]。

$$\alpha(T) = \wedge_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\varsigma(0))$$

は $T^{-1}(\alpha(T)) = \alpha(T)$ なるもっとも細い分割であって，

$$\alpha(T) = \alpha(A) = \wedge_{n=0}^{\infty} A^{-n}(\varsigma(0)) = \varsigma(\vee_{n=0}^{\infty} \operatorname{kernel} A^{n})$$

をみたす。これより，$\alpha(T)$ は group partition である。このことから，

$$\mathfrak{p}(T,m) \subset \sigma\text{-}alg(\varsigma(F))$$

である。ここで $\varsigma(F)$ は $\alpha(T) = \varsigma(F)$ をみたす G の部分群 F から成る group partition である。E は Γ の部分集合，A は G 上の automorphism とする。E を含む A-不変な最小な部分群を $gp\{A,E\}$ で表わす。E が可算集合ならば，$gp\{A,E\}$ は可算集合である。$gp\{A,E\}$ の双対空間 F はコンパクト・アーベル群で，距離づけ可能であって，A-不変である。A が G から G 上への endomorphism のとき，$A(gp\{A,E\}) \subset gp\{A,E\}$ である。Γ を含む最小の divisible group を Γ_d で表わす。$\gamma' \in \Gamma_d$

に対して，$kf' \in \Gamma$ なる整数 $k \neq 0$ が存在するから，A は Γ_d 上の automorphism A' を lifted することができる。即ち，$f' \in \Gamma_d$，$0 \neq k$ は $kf' \in \Gamma$ なる整数とする。A' は $kA'(f') = A(kf')$ によって定義したものである。このことから，アフィン変換 $T = a + A$ は Γ_d の双対空間 G_d 上のアフィン変換 $T'(x') = a' + A'(x')$ の factor になっている。

3. 最大部分の一代数

G は character group Γ を持つコンパクト・アーベル群，T は G 上のアフィン変換とする。

<u>定理 1</u>　T は m-totally エルゴード的であれば，

$$\mathfrak{P}(T, m) = \sigma\text{-}alg\left(S\left(ann\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\right)\right)\right)$$

である。

この定理を示すために次の補題を準備する。

<u>補題 1</u>　Γ は有限次元トーラスの character group，そして φ は Γ から Γ の中への homomorphism とする。Γ' は Γ の部分群，すべての $g \in \Gamma'$ に対して $\varphi(g) = 0$ をみたすものとする。このとき Γ' は Γ の直積因子である。

証明．G は n-次元トーラスとする。次をみたす Γ の

base $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が存在する。

$$\Gamma' = \{v_1^{e_1}\} \times \{v_2^{e_2}\} \times \cdots \times \{v_k^{e_k}\},$$

ここで，$e_1, e_2, \cdots, e_k$ はある整数，$\{v\}$ は v を成生えとする自由巡回群である。今 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は G の monothetic generator とする。このとき，$T_a = T_{a_1} \times \cdots \times T_{a_n}$ はエルゴード的，故に T_{a_j}, $j = 1, 2, \cdots, n$, もエルゴード的である。G は連結であるから，$T_{a_j e_i}$ はエルゴード的である。ここで，$T_{a_1 e_j} \times \cdots \times T_{a_n e_j}$ もエルゴード的であることを示すことができる。$v_j \in \Gamma'$ に対して，

$$0 = \varphi(v_j^{e_j})(x) = \varphi(v_j)(x^{e_j}) \quad , x \in G \ 。$$

$b = (a_1^{e_j}, \cdots, a_n^{e_j})$ とおく。このとき $\varphi(v_j)(b) = 0$ 故に $\varphi(v_j)(x) = 0$ $(x \in G)$ である。このことから，$e_j = 1$ $j = 1, 2, \cdots, k$, であるから，

$$\Gamma' = \{v_1\} \times \cdots \times \{v_k\} \ 。$$

故に，Γ' は Γ の直積因子である。

補題2　G は有限次元のトーラスとする。$T(x) = a + A(x)$ は G から G 上へのアファイン変換とする。T が m-totally エルゴード的，quasi-discrete spectrum をもつならば，A は次の行列によって与えられた automorphism と isomorphic である。

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{Vmatrix}$$

証明．$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ であることに注意する。Gは有限次元であるから，$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{k}\Gamma_n$ となる整数 $k>1$ が存在する。

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset \Gamma_k = \Gamma$$

である。補題1によって，

$$\Gamma_j = \{w_1\}\times\cdots\times\{w_{h_j}\},$$
$$j = 1, 2, \cdots, k\ ;\quad h_k = n$$

をみたすΓの base $w_1, w_2, \cdots, w_n$ が存在する。群$\{w_j\}$は$\{\psi_j\}$に isomorphic である。ここで，ψ_jは次の関数である。

$$\psi_j(x_j) = \exp[2\pi i(p_j x_j)],$$
$$p_j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots 。$$

故に，

$$\Gamma_j \sim \{\psi_1\}\times\cdots\times\{\psi_{h_j}\},\quad j = 1, 2, \cdots, k$$

である。簡単のため，$\Gamma_j = \{\psi_1\}\times\cdots\times\{\psi_{h_j}\}$, $j = 1, 2, \cdots, k$, と仮定する。[4]の定理2.1によって，Aは次の三角行列によって与えられた automorphism と同型であることが分かる。

$$\begin{Vmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{Vmatrix}$$

次の補題は[13]の中に述べられているものとほとんど同じである。しかし，ここではGの連結性は仮定しない。

<u>補題 3.</u> TはG上のinvertibleアフィン変換とする。もしTがm-totallyエルゴード的ならば，

$$\mathfrak{p}(T,m) = \alpha\text{-alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\cup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n)))$$

である。

証明、 2つの部分に分けて証明する。

(I) Gが距離づけ可能の場合。$f \notin \cup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$，すべての$0 \neq P \in Z(\lambda)$に対して，$P(A)f \neq 0$のとき，$gp\{A,f\}$は単位元の他は有限のorbitをもたない。$gp\{A,f\}$は$G/\text{ann}(gp\{A,f\})$のcharacter group，$T$は$G/\text{ann}(gp\{A,f\})$上のアフィン変換をinduceする。その変換は完全正のエントロピをもつ。故に，$\mathfrak{p}(T,p)$と$\alpha\text{-alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(gp\{A,f\})))$は$P$-independentである。これ故に，

$$\Gamma' = \{f \in \Gamma : P(A)f = 0 \text{ for some } 0 \neq P \in Z(\lambda)\}$$

とおくとき，

$$\mathfrak{p}(T,m) \subset \alpha\text{-alg}(\mathcal{S}(\text{ann}(\Gamma')))$$

である。以後，$\Gamma = \Gamma'$と仮定することにする。A'はΓを含む最小のdivisible group Γ_d上のAによってinduceされたautomorphismとする。$T(x) = a + A(x)$はΓ_dのcharacter

とするとき,

$$G_d = G_{d1} \times G_{d2}$$

である。この分割に対応して, T'が次のように分割される。

$$T' = T'_1 \times T'_2 。$$

T'_2が完全正のエントロピをもつことを示すために, T'が m-totally エルゴード的であることを示す。(mはG_d上のHaar測度) Γは有限 A-orbits として fixed elements だけをもつから, 同じことがΓ_d, A'-orbits に対しても成立する。次に, $(A'-I)f'=0$, $f'(a')=0$ をみたす character $f' \neq 0$ が存在したとすると, ある整数 $k \neq 0$ に対して,

$$0 \neq f = kf' \in \Gamma$$

であるから, $f(a')=0$, $f(Ax')=f(x')$ が成立する。fは ann(Γ) の cosets 上で一定な値をとる character である。そして

$$f(a)=0, \quad f(Ax)=f(x) 。$$

しかし, a, $(A-I)G$ を含む最小な群は G と一致するから, $f \equiv 0$ となり矛盾する。故に, T'は totally エルゴード的である。これ故に, T'_1, T'_2 も totally エルゴード的である。特に, A'_2 はエルゴード的であるから, T'_2 は完全正のエントロピをもつ。他方,

$$\Gamma_{d1n} = \{ f' \in \Gamma_{d1} : (A'-I)^n f' = 0 \}, n=1,2,\cdots$$

group G_d 上のアフィン変換

$$T'(x') = a' + A'(x'),\quad x' \in G_d$$

の factor である。すべての $f' \in \Gamma_d$ に対して，$P(A')f' = 0$ なる $0 \neq P \in Z(\lambda)$ が存在する。$p'(\lambda)$，$\lambda - 1$ は互に素である $p' \in Z(\lambda)$，$\lambda - 1$ に対して

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^n p'(\lambda)$$

とできる。このときある整数 $k \neq 0$ に対して，

$$u(\lambda)(\lambda - 1)^n + v(\lambda)p'(\lambda) = k$$

なる u，$v \in Z(\lambda)$ が存在することが知られている。故に，

$$u(A')(A' - I)^n(f'/k) + v(A')p'(A')(f'/k) = f'$$

である。

$$f_1' = u(A')(A' - I)^n(f'/k),$$
$$f_2' = v(A')p'(A')(f'/k)$$

とおく。このとき，$p'(A')f_2' = 0$，$(A' - I)^n f_1' = 0$ である。

$$\Gamma_{d1} = \{f' \in \Gamma_d : (A' - I)^n f' = 0 \text{ for some } n \geq 1\}$$
$$\Gamma_{d2} = \{f' \in \Gamma_d : p'(A')f' = 0 \text{ for some } p'(\lambda) \text{ prime to } \lambda - 1\}$$

を定義する。このとき，$A'(\Gamma_{d1}) = \Gamma_{d1}$，$A'(\Gamma_{d2}) = \Gamma_{d2}$ そして $\Gamma_d = \Gamma_{d1} \times \Gamma_{d2}$ である。

$$G_{d1} = G_d / ann(\Gamma_{d1}),$$
$$G_{d2} = G_d / ann(\Gamma_{d2})$$

とおくとき,

$$\Gamma_{d1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{d1n}$$

であるから, T_1'は 補題1, [8] によって0-エントロピーをもつ。即ち,

$$p' = \lambda - alg(S(ann(\Gamma_{d1})))$$

は $T_{p'}$ が0-エントロピーをもつような最大な λ-代数である。故に,

$$p(T, m) \subset p' = \lambda - alg(S(ann(\Gamma \cap \Gamma_{d1})))$$

である。結果的に,

$$\Gamma \cap \Gamma_{d1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$$

を示すことができるから,

$$p(T, m) = \lambda - alg(S(ann(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))$$

である。

(II) G が距離つけ可能でない場合。(I) と [3] から示すことができる。

<u>補題 4</u> $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ とする。このとき, T は dictal である。

証明は [4] にのべられている。

補題5. T は invertible アフィン変換, m-totally エルゴード的とする。このとき, $\mathfrak{p}(T,m)$ は $h_m(T_{\mathfrak{p}(T,m)})=0$ なる最大な σ-代数である。

証明. 補題3によって, $\mathfrak{p}(T,m) = \sigma\text{-}alg(\mathfrak{s}(ann(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n)))$ が成立する。一般性を失うことなく, $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ と仮定する。ここで, T は 0-エントロピーをもつことを証明する。任意の $E \in Ⓗ$ (ここで Ⓗ は Γ の可算個の元から成るすべての集合の族とする) に対して, $gp\{A, E\}$ は可算である。$gp\{A,E\}$ の双対空間 G_E はコンパクト・アーベル群で, 距離づけ可能である。T によって induce された G_E 上のアフィン変換を T_E によって表わすことにする。このとき, T_E は distal である。故に, T_E は 0-エントロピーをもつ。G から G_E への projection を φ_E で表わすとき,

$$\varphi_E^{-1}(\mathfrak{p}(T_E, m_E))$$

は $\mathcal{E}$ の σ-部分代数である。但し, m_E は G_E 上の Haar 測度とする。

$$\bigvee_{E \in Ⓗ} \varphi_E^{-1}(\mathfrak{p}(T_E, m_E)) = \mathcal{E}$$

であることは明らかである。$\mathfrak{R}$ は $\mathcal{E}$ の有限代数とする。$D \in \mathfrak{R}$ に対して, $m(B_n \triangle D) < 1/n$ となる $E_n \in Ⓗ$, $B_n \in \varphi_{E_n}^{-1}(\mathfrak{p}(T_{E_n}, m_{E_n}))$ が存在する。$E = \bigcup_n E_n$ とおくと, $E \in Ⓗ$ そして $D \in \varphi_E^{-1}(\mathfrak{p}(T_E, m_E))$ である。故に,

$h_m(T, \alpha) = 0$ である。これで証明された。

ς は確率空間 $(G, \mathcal{E}, m)$ の可測分割，φ_ς は G から G/ς 上への projection とする。もし ς が $T^{-1}(\varsigma) \leq \varsigma$ をみたしているならば，T は G/ς 上の factor transformation を induce する。$\alpha(T) = \varsigma(F)$（F は G のある部分群）のとき，$T_{\varsigma(F)}$ は G/F 上の invertible アフィン変換である。G から G/ς への projection を φ_ς で表わすことにする。

<u>補題 6</u>、T は m-totally エルゴード的アフィン変換とするとき，

$$p(T, m) = \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(\cup_{n=1}^{\infty} T_n)))$$

である必要十分条件は

$$\varphi_\varsigma^{-1}(p(T_{\varsigma(F)}, m/\varsigma(F))) = \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(\cup_{n=1}^{\infty} T_n) \cap F))$$

が成立することである。

証明．G は距離づけ可能とする。

$$\varphi_\varsigma^{-1}(p(T_{\varsigma(F)}, m/\varsigma(F)))$$
$$= \wedge\text{-}alg(\varsigma(F)) \cap p(T, m)$$

そして

$$\wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(\cup_{n=1}^{\infty} T_n) \cap F)$$
$$= \wedge\text{-}alg(\varsigma(F)) \cap \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(\cup_{n=1}^{\infty} T_n)))$$

であるから，補題 4, 5 から，

$$\wedge - alg(S(ann(\cup_{n=1}^{\infty} T_n))) \subset \mathcal{P}(T, m)$$

そして

$$T^{-1}(S(F)) = S(F)$$

より

$$\mathcal{P}(T, m) \subset \wedge - alg(S(F))$$

である。これ故に，G が距離づけ可能の場合には示された。

次に，G が距離づけ可能でない場合を示す。

$\mathcal{B}$ は任意の有限代数（$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(T, m)$）とする。このとき，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\cup\{\alpha : h_m(T, \alpha) = 0\}$$

によって生成された代数の有限代数 $\mathcal{B}'$ が存在して，

$$h_m(T, \mathcal{B}) \leq h_m(T, \mathcal{B}') + \delta$$

が成立する。$\mathcal{B}'$ はある整数 n に対して

$$\vee_{j=1}^{n}\{\alpha_j : h_m(T, \alpha_j) = 0\}$$

に含まれる。そして $\mathcal{B}'$ は次のような形の atom をもつ。

$$B_u = \cup_{j=1}^{p} \cap_{i=1}^{n} B_{uiv},$$

$$u = 1, 2, \cdots, k \ 。$$

故に，

$$h_m(T, \mathcal{B}) \leq h_m(T, \mathcal{B}') + \delta \leq \sum_{j=1}^{n} h_m(T, \alpha_j) + \delta$$

であるから，

$$h_m(T, \mathcal{B}) = 0$$

である。一方，

$$\mathcal{E} = \bigvee_{E \in \mathbb{H}} \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(gp\{A, E\})))$$

であるから，ある $E \in \mathbb{H}$ が存在して

$$\mathcal{B} \subset \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(gp\{A, E\})))$$

である。$gp\{A, E\}$ の双対空間 G_E に対して，その上に induce したアフィン変換を T_E そして G_E 上の Haar 測度を m_E で表わす。このとき g_E は G から G_E 上への projection として，

$$\mathcal{B} \subset g_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E))$$

である。

$$T_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E)) = \mathcal{P}(T_E, m_E)$$

であるから，

$$\mathcal{P}(T, E) = \bigvee_{E \in \mathbb{H}} g_E^{-1}(\mathcal{P}(T_E, m_E))$$

である。すべての $E \in \mathbb{H}$ に対して，G_E は距離づけ可能であるから，

$$\mathcal{P}(T_E, m_E) = \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(gp\{A, E\} \cap (\cup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n))))$$

そして

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(T, m) &= \bigvee_{E \in \mathbb{H}} \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(gp\{A, E\} \cap (\cup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))) \\ &= \wedge\text{-}alg(\varsigma(ann(\cup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)))\end{aligned}$$

である。これで証明された。

4. アフィン変換の分解

この節では，Gはコンパクト・アーベル群 そしてTはアフィン変換（必ずしも1-1ではない）とする。

補題7. Gはコンパクト・完全非連結・アーベル群とする。このとき，Gのアフィン変換 $T(x)=a+A(x)$ が totally エルゴード的である必要十分条件は endomorphism A がエルゴード的であることである。

証明、 A がエルゴード的であれば，Tは強混合的である。故に，Tは totally エルゴード的である。

逆に，Tが totally エルゴード的であれば，Aはエルゴード的であることを示す。Gの一定値でない character $f(x)$ に対して，整数 $n\neq 0$ が存在して

$$(*)\qquad f(A^n x) = f(x) \quad , x\in G$$

とできる。今 (*) をみたす character $f(x)$ が存在したと仮定しよう。Gは完全非連結で,コンパクトであるから，

$$k f(x) = 0 \quad , x\in G$$

をみたすような整数 $k>0$ が存在する。

$$T^{nk}(x) = a + A(a) + \cdots + A^{nk-1}(a) + A^{nk}(x)$$

であるから，次の等式が成立する。

$$f(T^{nk}x) = f(A^{nk}x) + \sum_{j=0}^{nk-1} f(A^j a)$$

$$= f(x) + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(A^{jn}(A^p(a)))$$
$$= f(x) + \sum_{p=0}^{n-1} kf(A^p(a))$$
$$= f(x)\ 。$$

故に，$f(x)$ は T^{nk}－不変である。これは totally エルゴード的であることに矛盾する。

補題 8. G は n－次元トーラス，T は G 上のアフィン変換とする。もし T は m－totally エルゴード的であれば，$G = G_1 \times G_2$ をみたすコンパクト群が存在して，T は次のような skew product transformation と isomorphic である。

$$T(x, y) \sim (B_1(x) + \gamma_1,\ B_2(y) + \varphi(x) + \gamma_2)$$
$$(x, y) \in G_1 \times G_2\ 。$$

ここで B_1 は G_1 から G_1 への automorphism，B_2 は G_2 から G_2 上への endomorphism そして φ は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

証明. ある整数 k に対して，$\bigcup_{j=1}^{\infty}\Gamma_j = \bigcup_{j=1}^{k}\Gamma_j$ であることに注意する。補題1の如く，ある部分群 Υ に対して

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k}\Gamma_j \times \Upsilon$$

である。G の適当な ordered base をえらんだとき，次が成立する。

$$\Gamma_j = \{w_1\} \times \cdots \times \{w_{d_j}\},\ j = 1, 2, \cdots, k,$$

$$\Upsilon = \{w_{d_k+1}\} \times \cdots \times \{w_n\} 。$$

故に，補題2によって A は次の行列によって与えられた automorphism に isomorphic である。

$$\left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline D_3 & D_2 \end{array} \right\|$$

ここで，D_1 は $d_k \times d_k$ の三角行列，即ち

$$D_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

ブロク D_2, D_3 の中は整数である。G_1 は $\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$ の双対空間，G は Υ の双対空間とする。B_1 は行列 D_1 に対応する G_1 から G_1 上への automorphism，B_2 は行列 D_2 に対応する G_2 から G_2 上への endomorphism そして φ は行列 D_3 に対応する G_1 から G_2 の中への homomorphism とするとき，A は次に isomorphic である。

$$(B_1(x),\ B_2(y) + \varphi(x)) \quad ((x, y) \in G_1 \times G_2) 。$$

結果的に，ある $a' = (a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ に対して，T は

$$(B_1(x) + a_1,\ B_2(y) + \varphi(x) + a_2)$$

に isomorphic である。

これで補題は示された。

<u>定理 2.</u>　T はコンパクト・アーベル群上のアフィン変換とする。もし T が m-totally エルゴード的，$h_m(T)>0$ ならば，コンパクト群 G_1, G_2 が存在して，T は次の skew product 変換

$$T(z) \sim (B_1(x)+b_1,\ B_2(y)+\varphi(x)+b_2),$$
$$(x, y) \in G_1 \times G_2$$

に isomorphic である。ここで，B_1 は quasi-discrete spectrum をもつ automorphism，B_2 は完全正のエントロピーをもつ endomorphism そして φ は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

証明．補題7によって，G は完全非連結であると仮定することができる。

証明を3つの部分に分けて行う。

(I)　Γ が endomorphism A に関して finitely generated であると仮定する。即ち，$f_1, f_2, \cdots, f_m \in \Gamma$ が存在して，Γ のすべての元は次の型である。

$$P_1(A)f_1 + P_2(A)f_2 + \cdots + P_m(A)f_m,\quad P_i \in Z(\lambda).$$

$$\Gamma_n = \{P_1(A)f_1 + \cdots + P_m(A)f_m : P_i \in Z(\lambda) \text{ and degree of } (P_i) \leq n,\ i=1, 2, \cdots, m\}$$

とおく。Γ_n は Γ の部分群であって，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$ である。

次に，$A^{-1}(f_i) \in \Gamma_n$, $i=1, 2, \cdots, m$ なる n をとる。

とができる。

$$A^{-1}(Y_n) \subset Y_n$$

そしてもし $H = \mathrm{ann}(Y_n)$ とおくと，

$$A^{-1}(H) \subset H$$

である。$A^j(Y_n)$, $j \geq 0$，は finitely generated である。故に $A^j(Y_n)$，$j \geq 0$，は次のように分割される。$\Gamma_{u(j)}$ は自由巡回群の直積，$\Gamma_{v(j)}$ は有限 order の巡回群の直積としたとき，

$$A^j(Y_n) = \Gamma_{u(j)} \times \Gamma_{v(j)}$$

である。$\Gamma_{v(j)} = \{0\}$ であることを示す。$A(\Gamma_{v(j)}) = \Gamma_{v(j)}$ そして $T(x) = a + A(x)$, $x \in G$, は totally エルゴード的であるから，すべての $f \in \Gamma_{v(j)}$ に対して，

$$A^n(f) = f$$

をみたす n が存在する。$kf(x) = 0$ なる k が存在することも $\Gamma_{v(j)}$ の性質から明らかである。故に，

$$\begin{aligned} f(T^{nk}x) &= f(A^{nk}x) + \textstyle\sum_{j=0}^{nk-1} f(A^j a) \\ &= f(x) + \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} kf(A^p a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。T の totally エルゴード性によって f は一定値である。これは $\Gamma_{v(j)} = \{0\}$ を示している。故に

$$A^j(Y_n) = \Gamma_{u(j)}$$

である。補題 1 によって，

$$A^j(\Upsilon_n) = \Upsilon_{(j)} \times \Gamma_{(j)}$$

である。

$$\Upsilon_n \subset A(\Upsilon_n) \subset \cdots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A^j(\Upsilon_n) = \Gamma$$

であるから，

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^j(\Upsilon_n)$$
$$= \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma_{(j)}\right) \times \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Upsilon_{(j)}\right)$$

である。G_1', G_2' はそれぞれ $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{(j)}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Upsilon_{(j)}$ は character group とすれば，

$$G = G_1' \times G_2'$$

である。

$$G'^{(j)} = G'/A^{-j}(H),$$
$$G_1'^{(j)} = G_1'/ann(\Gamma_{(j)})$$

そして

$$G_2'^{(j)} = G_2'/ann(\Upsilon_{(j)})$$

である。族 $\{G'^{(j)}\}$, $\{G_1'^{(j)}\}$ そして $\{G_2'^{(j)}\}$ は inverse limit systems をもつ。故に，G_∞ は $\{G'^{(j)}\}$ の inverse limit とするとき，G は G_∞ に isomorphic である。$G_{1\infty}$, $G_{2\infty}$ はそれぞれ $\{G_1'^{(j)}\}$, $\{G_2'^{(j)}\}$ の inverse limits とするとき，G_1', G_2' はそれぞれ $G_{1\infty}$, $G_{2\infty}$ に isomorphic である。ここで，$G = G_\infty$, $G_1' = G_{1\infty}$ そして $G_2' = G_{2\infty}$ と仮定する。$G'^{(j)}$, $j \geq 1$, は有限次元トーラスであることに注意する。A_j は A によって induce

された $G^{(j)}$ から $G^{(j)}$ 上への endomorphism とする。inverse limits G_1, G_2 をもつ対応するコンパクト群 $\{G_1^{(j)}\}$, $\{G_2^{(j)}\}$ が存在して，補題8によって endomorphism A_j は次の変換に isomorphic である。

$$(B_1^{(j)}(y),\ B_2^{(j)}(y') + \varphi^{(j)}(y)),\quad (y, y') \in G_1^{(j)} \times G_2^{(j)}\ .$$

ここで，$B_1^{(j)}$ は $G_1^{(j)}$ から $G_1^{(j)}$ 上への automorphism，$B_2^{(j)}$ は $G_2^{(j)}$ から $G_2^{(j)}$ 上への endomorphism そして $\varphi^{(j)}$ は $G_1^{(j)}$ から $G_2^{(j)}$ の中への homomorphism である。$B_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ は

$$B_1(y) = (B_1^{(1)}(y_1),\ B_1^{(2)}(y_2),\ \cdots)$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots) \in G_1$$

によって定義する。B_2 は G_2 から G_2 上への endomorphism で次のように定義する。

$$B_2(y') = (B_2^{(1)}(y_1'),\ B_2^{(2)}(y_2'),\ \cdots)$$

$$y' = (y_1', y_2', \cdots) \in G_2\ .$$

更に，

$$\varphi(y) = (\varphi^{(1)}(y_1),\ \varphi^{(2)}(y_2),\ \cdots)$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots) \in G_1$$

とおく。φ は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

$$A'(y, y') = (B_1(y),\ B_2(y') + \varphi(y))$$

$$(y, y') \in G_1 \times G_2$$

とおく。A は A' と isomorphic であることは容易に示される。

ある $b=(b_1,b_2)\in G_1\times G_2$ が存在して，T は

$$T(z)\sim(B_1(y)+b_1,\ B_2(y')+\varphi(y)+b_2),$$

$$(y,y')\in G_1\times G_2$$

に isomorphic である。B_1 は quasi-discrete spectrum をもつ，B_2 は完全正のエントロピーをもつ。

(II)　G はコンパクト・アーベル群，距離づけ可能とする。Γ は可算，$\Gamma=\{f_1,f_2,\cdots\}$ である。$f_1,f_2,\cdots,f_n\in\Gamma$,

$$gp\{A,f_1,f_2,\cdots,f_n\}$$

は endomorphism A に関して finitely generated である。そして次の包含関係がある

$$A(gp\{A,f_1,\cdots,f_n\})\subset gp\{A,f_1,\cdots,f_n\}。$$

もし

$$H_n=ann(gp\{A,f_1,\cdots,f_n\})$$

とするとき，$A(H_n)\subset H_n$，$A^{-1}S(H_n)\leqslant S(H_n)$ である。

$$\Upsilon_1\subset\Upsilon_2\subset\cdots,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\Upsilon_n=\Gamma$$

そして

$$(*)\qquad H_1\supset H_2\supset\cdots,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}H_n=\{0\}$$

である。T は G/H_n のアフィン変換 T_n を induce する。(I) によって，部分群 G_{1n}, G_{2n} が存在して G_{1n} の character group Υ_{1n}

$$\Upsilon_{1n}=\{f\in\Upsilon_n : (A-I)^m f=0 \text{ for some } m\geq 1\},$$

G_{n2} の character group Υ_{n2}

$$\Gamma = \Upsilon_{n1} \times \Upsilon_{n2},$$

をもつ。そして T_n は

$$(B_1(y) + b_1,\ B_2(y') + \varphi(y) + b_2),\ (y, y') \in G_{n1} \times G_{n2}$$

に isomorphic である。(ｲ) と (Ｉ) の議論から，コンパクト群 G_1, G_2 が存在し，それらの character groups はそれぞれ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, Υ ($\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \times \Upsilon$) である。そして T は

$$(B_1(y) + b_1,\ B_2(y') + \varphi(y) + b_2),\ (y, y') \in G_1 \times G_2$$

に isomorphic である。ここで，B_1 は G_1 から G_1 上への automorphism，B_2 は G_2 から G_2 上への endomorphism そして φ は G_1 から G_2 の中への homomorphism である。

以上で定理は証明された。

<u>注意 1.</u> G は n-次元トーラス ($n = 1, 2, \cdots, \aleph_0$) とする。$T$ は次のようなアフィン変換とする。

$$T(x) = a + A(x),\ x \in G.$$

$a \in G$，A は次の行列によって与えられた automorphism である。

$$\left\| \begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right\| \qquad D_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

D_2 の固有値は1の根ではない。D_1 に対応する automorphism は distal である。故に，このような automorphism は 0−エントロピーをもつ。アフィン変換Tは直積

$$T = T_1 \times T_2$$

に等しい。ここで T_1 は 0−エントロピーをもち，T_2 は完全正のエントロピーをもつ。

注意2. G は character group $Y \times Z$ をもつコンパクト・アーベル群とする。Y は有限 order をもつ巡回群の有限直積，Z は自由巡回群の有限直積とする。$T(x) = a + A(x)$，$x \in G$ とする。$A(Y) = Y$ から，

$$A(z, y) = (D(z), Q(y) + \varphi(z)), \ (z, y) \in Z \times Y$$

である。ここで φ は Z から Y の中へのある homomorphism，D は Z から Z の中への endomorphism，Q は Y から Y の上への automorphism である。このような群と T に対して，位相的エントロピーと metric エントロピーは一致する。このことを示すことは簡単である。

G_1, G_2 はそれぞれ Y, Z の双対空間とする。G_1 は Y に isomorphic である。G_2 は有限次元トーラスである。そして $G = G_1 \times G_2$ である。$A(G_2) \subset G_2$。T' によって T の G_2 への制限を表わす。α^p は直径 $1/p$ の開集合の族とする。α^p は

isometry に関して不変である。$G_1 \times G_2$ の開被覆 $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ に対して refinement $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}^P$ が存在することが知られている。G_1 は有限群であるから，

$$A^N(x) = x, \quad \forall x \in G_1$$

をみたす整数 $N>0$ が存在する。特に，

$$\mathfrak{A}_1 = \{ \{x_1\} : x_1 \in G_1 \}$$

とする。このとき，

$$T^N(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}^P) = T_{a_1}(\mathfrak{A}_1) \times T'^N(\mathfrak{A}^P),$$

T_{a_1} は G_1 上のある translation $(T_{a_1}x_1 = x_1 + a_1)$ とする。このことは

$$h_{top}(T^N, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}^P) = h_{top}(T_{a_1} \times T'^N, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}^P)$$

これ故に

$$h_{top}(T^N) = h_{top}(T_{a_1}) + h_{top}(T'^N)$$

である。$h_{top}(T_{a_1}) = 0$ であることは明らかである。ここで

$$h_{top}(T'^N) = h(T'^N) = h(T^N)$$

を示すことができる。故に，$h_{top}(T^N) = h(T^N)$，そこで $h_{top}(T) = h(T)$ が示される。

<u>注意 3.</u> T はコンパクト・アーベル群からそれへのアフィン変換とするとき，注意 2，[5]，[6] そして [8] によって，$h_{top}(T) = h_m(T)$（m は G 上の Haar 測度）が容易に示される。

参 考 文 献

1. R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. MacAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc 114 (1965) 309 - 319

2. L. M. Abramov, Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum, Amer. Math. Soc. Transl. 39 (1964), 37 - 56.

3. N. Aoki, On two invariant σ - algebras for an affine transformation, Mich. Math. J. 17 (1970), 397 - 399.

4. ———, On generalized commuting order of automorphisms with quasi-discrete spectrum, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 79 - 97.

5. ———, Topological entropy and measure theoretic entropy for automorphisms on compact groups, Math. Systems Theory, 5 (1971), 4 - 6.

6. ———, Topological entropy of distal affine transformations on compact abelian groups, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 11 - 17.

7. ———, On skew product transformations with quasi-discrete spectrum, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971),

555 - 560.

8. K. R. Berg, Entropy of torus automorphisms of topological dynamics, An International Symposum, Benjamin, New York, (1969), 67 - 79

9. ———, Convolution of invariant measures, maximal entropy, Math. Systems Theory 3 (1969), 146 - 150.

10. P. Bilingsley, Ergodic theory and information, John wiely and Sons, New York, 1965.

11. C. Foias, Automorphisms of compact abelian groups as models for measure-preserving invertible transformations, Mich. Math. J. 13 (1966), 349 - 352.

12. F. Hahn and W. Parry, Minimal dynamical systems with quasi-discrete spectrum, J. London Math. Soc. 40 (1965), 309 - 323.

13. D. S. Ornstein, A K-automorphism with no square root and Pinsker's Conjecture, (to appear).

14. ———, A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails, (to appear).

15. W. Pany, On the coincidence of three invariant σ-algebras associated with an affine transformation, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1297 - 1302.

16. W. Parry, Entropy and generators in ergodic theory, Benjamin, New York, 1969.
17. ———, Zero entropy of distal and related transformations, An International Symposium, Benjamin, New York (1969), 383-389.
18. M. S. Pinsker, Dynamical systems with zero or completely positive entropy, Dok. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 1025-1026.
19. L. S. Pontrjagin, Topological groups, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1958.
20. H. Totoki, Ergodic theory, Lecture notes No. 14 Aarhus Univ. 1969.
21. P. Walters, On the relationship between zero entropy and quasi-discrete specturm for affine transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 661-667.