数理解析研究所講究録
第148巻 1972年 1-7

wM－空間に関連する問題

愛媛大　白城高教

はじめにM－空間およびその一般化であるM*－，M$^\#$－，wM－，$w\Delta$－空間の定義をのべる。位相空間Xの被覆の列 $\{\mathfrak{U}_i \mid i=1,2,\cdots\}$ に対して次の2つの条件を考える。

(M_1) ある点 $x \in X$ と任意の i（自然数）に対して $x_i \in St(x, \mathfrak{U}_i)$ をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

(M_2) ある点 $x \in X$ と任意の i に対して $x_i \in St^2(x, \mathfrak{U}_i)$ をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

こゝで $St^2(x, \mathfrak{U}_i) = St(St(x, \mathfrak{U}_i), \mathfrak{U}_i)$ である。

本文において，(完全)正則空間や正規空間の場合には T_1－分離公理がみたされているものとする。Xを位相空間とするとき，XがM－空間であるとは，(M_1) 条件をみたすXの開被覆の正規列（normal sequence）が存在するときをいう。XがM*－空間とは，(M_1) 条件をみたすXの局所有限な閉被覆の列が存在するときをいう（[5]）。XがM$^\#$－空間とは，

(M_1) 条件をみたす X の closure-preserving 閉被覆列が存在するときをいう。([13])。 X が wM-空間とは，(M_2) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([6])。 X が $w\Delta$-空間とは，(M_1) 条件をみたす X の閉被覆列が存在するときをいう。([2])。 次の diagram が知られている。

$$M \Longrightarrow M^* \Longrightarrow M^\# \Longrightarrow wM \Longrightarrow w\Delta$$

一方 $M \not\Leftarrow M^*$，$wM \not\Leftarrow w\Delta$ を示す例が知られている。([10]，[6])。

問 1. $M^\#$-空間であって M^*-空間でないものが存在するか。 wM-空間であって $M^\#$-空間（もしくは M^*-空間）でないものが存在するか。

正規 M^*-空間は M-空間であることが Ishii [5] において証されているが次は未解決である。

問 2.（Ishii [6]）。 正規 wM-空間は M-空間であるか。

X が正規 $w\Delta$-空間であるとき，$w\Delta$-空間を定義する (M_1) 条件をみたす閉被覆列 $\{\mathfrak{U}_i\}$（之を $w\Delta$ の定義列ということにする）において，各 $\mathfrak{U}_i$ が局所有限ならば X は M-空間になる。

問 3. X が正規かつ point-paracompact な $w\Delta$-空間ならば X は M-空間であるか。

完全正則(completely regular)なM^*-空間が完備なuniformityをゆるすならばparacompact M-空間である([12] Lemma 3.6 により明らか)が，これに関連し

問4. 完全正則な$M^\#$-空間(またはwM-空間)が完備なuniformityをゆるすならばparacompact(従ってM-空間)であるか。

次に距離付けにかんする問題をあげる。

空間XがG_δ-diagonalをもつための条件はXの開被覆の列$\{\mathcal{G}_i\}$が存在して，Xの各点xに対し$\bigcap_i St(x, \mathcal{G}_i)=\{x\}$をみたすことである。$X$が$\overline{G}_\delta$-diagonalをもつとは，$X$の開被覆の列$\{\mathcal{G}_i\}$が存在して，$X$の各点$x$に対して，$\bigcap_i \overline{St(x, \mathcal{G}_i)}=\{x\}$をみたすときをいう。[7]において，

空間Xが距離づけ可能 $\rightleftarrows$ XはwMで$\overline{G}_\delta$-diagonalをもつ。

が知られている。

問5. (Ishii [6])。正規wM-空間がG_δ-diagonalをもつならば距離付け可能であるか。

所でこの問5はwM-空間の条件を強めてM-空間としても未解決である。そしてこの場合は次の問6と同値であることが分かる。

問6. 正規，可算コンパクト空間がG_δ-diagonalをもつならば距離付け可能であるか。

Heath は [14] において

「M－空間が G_δ-diagonal をもつならば developable か。」

という問題を提出しているが，空間を Hausdorff 又は正則空間に限定するとき，次と同値になる。

問 6′. Hausdorff（又は正則），可算コンパクト空間が G_δ-diagonal をもつならば距離化可能であるか。

X の開集合のある族 $\mathcal{U}$ が X の pseudobase であるとは X の各点 x に対し $\bigcap\{U\in\mathcal{U} \mid x\in U\}=\{x\}$ がみたされるときをいう。次に X の各点 x に対し x をふくむ X の部分集合の族 $\mathcal{N}_x$ があたえられ，有限乗法的であるとする。$\mathcal{N}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{N}_x$ が X の weak base であるとは，

$P(\subset X)$ が開集合 $\rightleftarrows$ $\forall x\in X-P,\ \exists Q\in\mathcal{N}_x,\ P\cap Q=\phi$

が成立つときをいう。（[1]）。

Hausdorff M^*－空間が点可算（point-countable）pseudo-base をもつならば距離化可能であるが（[12]），

問 7. Hausdorff $M^\#$－（又は wM-）空間が点可算（pseudo-）base をもつならば距離化可能であるか。

この問は次と同値である。

「正則 $M^\#$－（又は wM-）空間が点可算 weak base をもつならば距離化可能であるか。」

Burke の問題（[3]）は問 7 に関連している。

問8.（Burke）。正則 $w\Delta$ −空間が点可算な基をもつならば developable であるか。

かりに問8が肯定的にとかれるならば，問7における「Hausdorff $M^{\#}$（wM）−空間が点可算な基をもつならば距離化可能か」の部分も肯定的にとかれることになる。

距離空間の quotient s−image である空間を q−s 空間であるという（[4]）。[12]において次のことが証される。「正則 M^{*}−空間が q−s 空間ならば距離化可能である。」

問9。正則 $M^{\#}$−（又は wM−）空間が q−s 空間ならば距離化可能であるか。

次の条件を(b)とする：X の開被覆列 $\{\mathfrak{U}_i\}$ が存在して，X の任意のコンパクト集合 K に対し，$x_i \in St(K, \mathfrak{U}_i)$ $(i=1,2,\cdots)$ をみたす点列 $\{x_i\}$ は cluster point をもつ。

上でコンパクトの代りに可算コンパクトを用いて条件(c)を定義できる。これらの条件をみたす空間にかんして，wM−空間に類似した種々の距離化定理がえられる。明らかに wM−空間はこれらの条件をみたし，またこの条件をみたす空間は $w\Delta$ である。$w\Delta$−空間は必ずしもこの条件をみたさないが，

問10. 条件(b)（又は(c)）をみたす空間は wM であるか。

は未解決である。

参考文献

[1] A. Arhangel'skiĭ: Mappings and spaces. Russian Math. Surveys. 21 (1966), 115–162.

[2] C. Borges: On metrizability of topological spaces. Canad. J. Math. 20 (1968), 795–804.

[3] D. Burke: On p-spaces and $w\Delta$-spaces. Pacific J. Math. 35 (1970), 285–296.

[4] T. Hoshina: On the quotient s-images of metric spaces. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 10 (1970), 43–46.

[5] T. Ishii: On M- and M^*- spaces. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 1028–1030.

[6] T. Ishii: On wM-spaces. I, II. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 5–15.

[7] T. Ishii and T. Shiraki: Some properties of wM-spaces. Proc. Japan Acad. 47 (1971), 167–172.

[8] E. Michael and F. G. Slaughter: Σ-spaces with a point-countable separating open covers are σ-spaces. (to appear)

[9] K. Morita: Products of normal spaces with metric spaces. Math. Ann. 154 (1964), 365–382.

[10] K. Morita: Some properties of M-spaces. Proc. Japan Acad. 43 (1967), 869-872.

[11] A. Okuyama: On metrizability of M-spaces. Proc. Japan Acad. 40 (1964), 176-179.

[12] T. Shiraki: M-spaces, their generalizations and metrization theorems. Sci. Rep. T.K.D. Sect A 11 (1971), 57-67.

[13] F. Siwiec and J. Nagata: A note on nets and metrization. Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623-627.

[14] Proposed problems in General topology and its applications. 1 (1971)