

$\Sigma$ -space の一般化と  
閉写像について.

大阪教育大学 奥山 晃弘

§ 1. 序

語を簡単にする爲、空間は全て regular,  $T_1$  空間とする。

位相空間の距離化定理として、次の定理が良く知られている。

(I)  $(T_1)$ 空間  $X$  が距離化可能である爲の必要十分条件は、次の二つの条件をみたす  $X$  の開被ふきの列  $\{U_n: n=1, 2, \dots\}$  が存在する事である。

(i)  $U_{n+1}^* < U_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) (star-refinement)

(ii)  $X$  の各点  $x$  について、 $\{St(x, U_n): n=1, 2, \dots\}$  が  $x$  の近傍基である。

(II) ([6], [12]) (regular  $T_1$ )空間  $X$  が距離化可能である爲の必要十分条件は、次の二つの条件をみたす  $X$  の開被ふきの列  $\{U_n: n=1, 2, \dots\}$  が存在する事である。

- (i) 各  $U_n$  が locally finite である。  
 (2)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  が  $X$  の基となる。

距離空間の一般化として、次の様な空間がある。

定義 I ([3]). 空間  $X$  が上の (i) 及び次の (iii) を満たす開被ふくの列  $\{U_n; n=1, 2, \dots\}$  をもつ時、 $X$  を M-space といい。

(iii)  $X$  の各点  $x$  に対し  $C_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, U_n)$  が countably compact set である。しかも  $\{St(x, U_n); n=1, 2, \dots\}$  が  $C_x$  の基となる。

II ([7]) 空間  $X$  が上の **定理 II** の (i) 及び次の (3) を満たす  $X$  の被ふく (開被ふくとは限らぬ) の列  $\{F_n; n=1, 2, \dots\}$  をもつ時、 $X$  を  $\sigma$ -space といい。

(3)  $X$  の各点  $x$  及び  $x$  を含む任意の  $X$  の開集合  $G$  に対し  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  の中に  $x \in F \subset G$  なる元  $F$  が存在する。この時  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  を  $X$  の network といい。

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) 及び (2)  $\Rightarrow$  (3) より、距離空間は常に M-space 且つ  $\sigma$ -space である。

M-space と  $\sigma$ -space を含み、しかもそれ等の空間のもつ良い性質をもつものとして、次の空間がある。

定義 ([5]) 空間  $X$  が、次の条件をみたす  $X$  の閉被ふくろ  
列  $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$  と  $X$  の閉被ふくろ  $\mathcal{K}$  をもつ時、 $X$  を  $\Sigma$ -space  
という。

- (a) 各  $\mathcal{F}_n$  が locally finite である。
- (b)  $\mathcal{K}$  の元は countably compact set である。
- (c)  $\mathcal{K}$  の任意の元  $K$  及び  $K$  を含む  $X$  の任意の閉集合  $G$  にお  
し  $K \subset F \subset G$  なる  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  の元  $F$  が存在する。この時、  
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  を  $X$  の (mod  $\mathcal{K}$ )-network という。

$\Sigma$ -space に関するものとして、次の定理が証明されている。

定理 A. (Nagami [5]).  $f$  を空間  $X$  から空間  $Y$  の上への  
perfect map とすると、

$$X: \Sigma\text{-space} \iff Y: \Sigma\text{-space}.$$

定理 B (Nagami [5]).  $X_n (n=1, 2, \dots)$  を全て paracompact  
 $\Sigma$ -spaces とすると、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  も paracompact  $\Sigma$ -space である。

$\sigma$ -space は closed, continuous map で移る事は知られている。  
([8], [10])。しかし  $\Sigma$ -space に関しては移る必要がない事を  
Michael [1] が指摘し、次の様な空間を定義した。

定義 ([1]). 空間  $X$  が上の定義の (b), (c) 及び次の (a<sub>2</sub>) をみ  
たす  $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$  と  $\mathcal{K}$  をもつ時、 $X$  を  $\Sigma^\#$ -space という。

(a<sub>2</sub>) 各  $\mathcal{F}_n$  が closure-preserving である。

明らかに、 $\Sigma$ -space は  $\Sigma^\#$ -space であり、 $\Sigma^*$ -space は closed, continuous map で移る事が分かる。ここで、 $\Sigma$ -space と  $\Sigma^\#$ -space の間にあるものとして、次の標記空間が定義出来る。

定義 ([2], [9]). 空間  $X$  が上の定義の (b), (c) 及び次の (a<sub>1</sub>) を満たす  $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$  と  $\mathcal{K}$  を持つ時、 $X$  を  $\Sigma^*$ -space とする。

(a<sub>1</sub>) 各  $\mathcal{F}_n$  が hereditarily closure-preserving である。

ここで集合族  $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$  が hereditarily closure-preserving とは  $B_\lambda \subset A_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) なる任意の族  $\{B_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$  が closure-preserving であるとする。

定義より、 $\Sigma$ -space は  $\Sigma^*$ -space であり、 $\Sigma^*$ -space は  $\Sigma^\#$ -space である。

§ 2. 3つの空間の関連について。

定理 1.  $f: X \rightarrow Y$ : closed, continuous, onto map になると、 $X$  が  $\Sigma^*$ -space ならば  $Y$  も  $\Sigma^*$ -space である。

定理 2.  $X_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が全て paracompact  $\Sigma^\#$ -spaces ならば、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  も  $\Sigma^\#$ -space である。又 paracompact  $\Sigma^*$ -space  $X$

について、 $X \times I$  が  $\Sigma^*$ -space となるのは  $X$  が  $\Sigma$ -space である。

定理3. Lindelöf  $\Sigma^*$ -space は  $\Sigma$ -space である。

定理4. 任意の開集合が  $F_\sigma$ -set であるような  $\Sigma^*$ -space は  $\Sigma$ -space である。

これらの結果は [9] で証明する。

更に、Michael [1] が paracompact  $\Sigma^*$ , non- $\Sigma$ -space  $X$  の例をあげた。その時の  $X$  は  $\Sigma$ -space からの closed, continuous map による image となっているので、定理1により、 $X$  は  $\Sigma^*$ -space となる。この  $X$  に定理2を適用すると、 $X \times I$  は  $\Sigma^*$ , non- $\Sigma^*$ -space の例となる。従って、 $\Sigma^*$ -spaces の class は  $\Sigma$ -spaces の class より真に大きく、 $\Sigma^*$ -spaces の class は  $\Sigma^*$ -spaces の class より真に大きい事が分かる。

又、上の空間  $X$  について、 $X \times I$  から  $X$  への projection は perfect map となるので、§1 の定理 A は  $\Sigma^*$ -space に対しては成立しない事になる。

定理 B が之に関連して、次の問題は未解である。

問題 1.  $X_n$ : paracompact  $\Sigma^*$ -space ( $n=1, 2, \dots$ ) の時、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  は paracompact か?

類似の問題として、

問題 1'.  $X_n$ : sub-paracompact  $\Sigma^*$ -space ( $n=1, 2, \dots$ ) の時、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  は sub-paracompact か?

定理 3 に関連して、 $\Sigma^*$ -space を  $\Sigma^\#$ -space に置きかえては成立し得る事が分かる。しかし定理 4 については、まだ分かっていない。

問題 2. 定理 4 で  $\Sigma^*$ -space を  $\Sigma^\#$ -space に置きかえられるか?

§ 3. 連続写像に関連して。

位相的性質  $\mathcal{P}$  について、 $\mathcal{P}$  をもつ空間の class を  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  で表わし、 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  の元からの closed, continuous map による image とある空間の class を  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^i$  で表わす。この時、§ 1 での  $\mathcal{P}$  の空間について、次の様な関係が得られている。

$$(A) \quad \mathcal{C}_M \cap \mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{\text{metric}}.$$

$$(B) \quad (\text{Morita [4]}), \quad \mathcal{C}_M^i \cap \mathcal{C}_G^i = \mathcal{C}_{\text{metric}}^i$$

例 1.  $\mathcal{C}_{\text{metric}} \neq \mathcal{C}_{\text{metric}}^i$

$$S = \bigvee_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n \text{ disjoint sum, } A = \{0_n \mid n=1, 2, \dots\} \text{ とおき、}$$



## References

1. E. Michael, On Nagami's  $\Sigma$ -spaces and some related matters, Proc. of the Washington State University Conference on General Topology, 15 - 19.
2. E. Michael and F. Slaughter, Jr.,  $\Sigma$ -spaces with a point-countable separating open cover are  $\sigma$ -spaces, to appear.
3. K. Morita, Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann. 154 (1964), 365 - 382.
4. K. Morita, Results related to closed images of M-spaces III, to appear.
5. K. Nagami,  $\Sigma$ -spaces, Fund. Math. 65 (1969), 169 - 192.
6. J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrization, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 1 (1950), 93 - 100.
7. A. Okuyama, Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, sect. A 9 (1967), 236 - 254.
8. A. Okuyama,  $\sigma$ -spaces and closed mappings I, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 472 - 477.
9. A. Okuyama, On a generalization of  $\Sigma$ -spaces, to appear.
10. F. Siwiec and J. Nagata, A note on nets and metrization, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623 - 627.
11. Yu. M. Smirnov, A necessary and sufficient condition for metrization of a topological space, Dokl. Acad. Nauk SSSR 77 (1951), 197 - 200.