数理解析研究所講究録
第148巻 1972年 73-82

Product spaces に関する ある種の問題について

城西大 理、数　厚也正彦

0°. 序

論文[1]で、集合族$\{A_\alpha\}$に対して

(1)　　$\limsup A_\alpha$

という記号を導入し、これを用いて積空間(以下積空間という時は、2つの空間に関するものとする)の正規性を、その factor spaces に移して説明した。また、論文[2]では、(1)を用いて"upper compact"という概念を定義し、これが積空間からその factor space への projection map が closed である条件と密接に結びついていることを示した。更に、[3]では、1938年にČech により提出されて以来の問題に完全な解が与えられたが、その解が得られるまでの過程で、(1)の概念と[2]の結果が大変重要な役割をしている。

これらのことからも視われるように、(1)は比較的重要な概念と思われるにも拘わらず関心が薄いように思われるので、

ここで上記のいきさつを述べながら(1)の概念を改めて紹介し，あわせて，それに関連する，一般に興味を持たれるかも知れないと思われる幾つかの問題を提出したい。

以下では，空間 X，Y 等は少なくとも T_1 空間とする。

1°. $\limsup \mathfrak{F}$ の定義.

$\mathfrak{F} = \{A_x \subset Y \,;\, x \in Z \subset X\}$ を Y の部分集合 A_x の族，A_x は X の部分集合 Z の元 x を添字にもつ，とする。また，$a \in X$ の任意の点，$\mathfrak{N}_a$ を a の近傍系とするとき

(2)
$$\limsup_a \mathfrak{F} = \limsup_a A_x = \bigcap_{U \in \mathfrak{N}_a} \overline{\bigcup_{x \in U} A_x}$$

とおく。

2°. upper compactness

Y が X に対して upper compact であるとは，$\{A_x \neq \phi \,;\, x \in Z \subset X\}$ を空でない Y の部分集合の任意の族，$a \in \overline{Z}$ とするとき，常に

$$\limsup_a A_x \neq \phi$$

であることである。この定義は，Z^c を Z の集積点で Z に含まれていないものの集合とすると，次の様に言いかえても

よい：$\{A_x \neq \phi ; x \in Z \subset X\}$, $Z^c \neq \phi$, なる任意の族に対して

(3) $\forall a\ (\in Z^c)$; $\limsup_a A_x \neq \phi$.

これに関しつぎの定理が得られている。

定理1（[2]）. YがXに対してupper compactである必要十分条件は，X×YからXへのprojection map π_Xが閉であることである。

3°. X×Yのcountable compactness

『積空間X×Yはいかなる場合にcountably compactであるか』という問題は，周知の様に，1938年Čechにより提出された。1953年にNovák [8]により，countable compactnessはproductiveでないという事が示された。そして，[3]で次の定理2が与えられ，この問題は一応解決されたが，この定理が得られたいきさつは次の様なものであった。

いま，一般に，点pが集合 $\mathfrak{H} = \{H_\alpha\}$ のcluster pointであるというのは，pの任意の近傍が $\mathfrak{H}$ の無数の元と交わることである。また，xをXの点，AをYの部分集合とすると

き，$(x, A) = \{(x, y) ; y \in A\}$ とする。

X と Y とを countably compact とすると，次の statements は同値である：

(i) $X \times Y$ は countably compact。

(ii) Z を X の無限部分集合とするとき，$X \times Y$ の部分集合 $\{(x_\alpha, y_\alpha) ; x_\alpha \in Z\}$ は集積点をもつ。

(iii) Z を X の無限部分集合とするとき，$X \times Y$ の部分集合の族 $\{(x, A_x) ; x \in Z\}$ は cluster point をもつ。

(iv) Z は X の部分集合で $Z^c \neq \phi$ とするとき，Y の部分集合の任意の族 $\{A_x \neq \phi ; x \in Z\}$ に対し

$$\exists a (\in Z^c) ; \limsup_a A_x \neq \phi 。$$

この最後の (iv) と 2° の (3) とを比べると，$\forall$ の記号が $\exists$ に代わっているだけである。(3) は，定理 1 により，π_X が閉，即ち，$X \times Y$ の閉部分集合を X に project したものが X で閉集合であることと同値である。従って，statement (i) は，$X \times Y$ の閉部分集合を X に project したものが，X で或る性質をもつことと同値ではないか と気付くことは自然であろう。このことに気付けば，次の定理を得ることはそう困難なことではない。

定理２（［３］）．　XとYを countably compact とする．$X\times Y$が countably compact である必要十分条件は，$X\times Y$の閉部分集合Aに対し$\pi_X(A)$が countably compact であることである．

countable compactness は，最近急速に発展しつつある M-space の理論と必ずしも無縁ではない．例えば，［6］，§5参照．また，長田の『M-space は countably compact space と距離空間の積空間の或る閉部分集合と同相か』という興味ある問題があることも周知であろう．

4°．feeble compactness

空間Xが feebly compact（あるいは lightly compact）であるとは，空でない，そして互に交わらない開集合G_nの族$\mathcal{G}=\{G_n\}$が局所有限ならば，実は$\mathcal{G}$は有限でなければならないことである．feebly compact なら pseudo-compact であるが，空間が完全正則なら逆も成立することは容易に分る．pseudo-compact 空間は色々面白い性質をもつことが知られているが，その多くは完全正則性を仮定している．しかし，それなしにでも成立する興味ある結果も少なくない．例えば，Frolík［4］の Lemma 1.3 はつぎの

様に云ってもよい： f を feebly compact な $X \times Y$ の上の連続実関数とすれば

$$F(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) \quad , \quad G(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

も連続である。

この様な例を後にも一二示すが、これらのことが feeble compactness をここで取り上げた理由であるが、この概念に対しても、また、lim sup 天を用いて便利であることを以下に注意しよう。

5°. formulation

$\mathcal{U} = \{ U_n \subset X \ ; \ n = 1, 2, \cdots \}$, $\{ V_n \subset Y \ ; \ n = 1, 2, \cdots \}$ をそれぞれ空でない，互に交わらない X および Y での任意の開集合族，また，$x \in U_n$ に対し $A_x = V_n$ とする。X と Y が feebly compact のとき，$X \times Y$ が feebly compact である必要十分条件は，$\mathcal{U}$ の或る cluster point a に対して $\limsup_a A_x \neq \phi$ であることである（[4, Lemma 1.2] 参照）。

この formulation を用いると，例えば次の玉野や，或いは Glicksberg の定理は（完全正則性を仮定し，空間はすべて pseudo-compact となっているが，或々の場合にも）

統一的に，しかも容易に得られる。（後者のGlicksbergによる証明は大変簡単とは云えない様に思われる。）

（玉野[11, Theorem 2]）　X を feebly compact とする。X の，P-点でない点はすべて k-点であれば，任意の feebly compact 空間 Y に対して $X \times Y$ は feebly compact である。

（Glicksberg [5, Theorem 3]）　X と Y を feebly compact とする。X が locally $\aleph_\gamma$ compact，Y の P-点でない各点は濃度 $\leq \aleph_\gamma$ の近傍基をもつならば，$X \times Y$ は feebly compact である。

（$X \times Y$ の feeble compactness を与える最近の結果，例えば [9]，[10] 等も上記の Glicksberg の定理を本質的には出ていない様に思われる。）

6°.　問題

(i)　$X \times Y$ の閉部分集合 A に対する $\pi_X(A)$ の性質で $X \times Y$ の性質を特徴付けること。

この問題は，45年秋の浜松での学会でも述べたものであ

るが，定理2の方法である。更に，Aを閉集合以外の性質で同様な問題が考えられる。（A を 0-集合と考えると［11, Theorem 1］の場合となる。）

（ii） X×Y が countably compact となる必要十分条件を更に求めること。

X×Y が pseudo-compact となる必要十分条件は幾つかあるが，countably compact の場合も，必要に応じて色々使い易い形で求めておくことが便利であろう。

（iii） m を無限濃度とする時，X×Y が m-compact となる必要十分条件を求めること。

これは，m = $\aleph_0$ の時既に求まった以上，そう難かしい問題ではないであろう。

（iv） X×Y が feebly compact である必要十分条件を求めること。

これは，一応，5° の formulation で得られたことになっているが，これは X×Y が feebly compact である条件を factor spaces の上でいいかえた形に過ぎない とも云えるので，更に，尤もらしい条件が望まれる。pseudo-compact の場合について得られているので（［11］），これもそう困難な問題ではなかろう。

（v） つぎの Frolík［4］の assertion を証明或いは

改正すること。

[4] にあるこの assertion の証明には follow できない本質的な部分がある。この assertion が誤りである反例は得られていない。従って，それが正しいか誤っているか不明であるが，恐らく大体正しいであろうと思われる。尚，この assertion を本質的に引用している最近の文献 [7] があるので注意が必要である。

$\mathfrak{P}$ を次の性質をもつ完全正則なすべての空間 X の族とする：pseudo-compact で完全正則な任意の空間 Y に対して $X \times Y$ が pseudo-compact である。

また，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする。

[4, Theorem 3.4] 完全正則空間 X が $\mathfrak{P}$ に属する必要十分条件は，X の空でない，互いに交わらない開集合 U_α の任意の無限族は，次の性質をもつ可附番部分族 $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ をもつ：$\mathbb{N}$ の無限部分集合から成る任意の filter $\mathcal{N}$ に対して

$$\bigcap_{N_1 \in \mathcal{N}} \overline{\bigcup_{n \in N_1} U_n} \neq \phi .$$

（注意） この最後の式は 1° の式 (2) と大変よく似ていることに注意。

References

1. Atsuji,M., Necessary and sufficient conditions for the normality of the product of two spaces, Proc. Japan Acad. 45(1969), 894-898.

2. ________, Two spaces whose product has closed projection maps, ibid., 899-903.

3. ________, Necessary and sufficient conditions for countable compactness of product spaces, ibid. (to appear).

4. Frolík,Z., The topological product of two pseudocompact spaces, Czech. Math. J. 10(1960), 339-349.

5. Glicksberg,I., Stone-Čech compactifications of products, Trans. AMS 90(1959), 369-382.

6. Morita,K., Topological completions and M-spaces, Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 10(1970), 271-288.

7. Noble,N., Countably compact and pseudocompact products, Czech. Math. J. 19(1969), 390-397.

8. Novák,J., On the cartesian product of two compact spaces, Fund. Math. 40(1953), 106-112.

9. Scarborouch,C.T.; A.H.Stone, Products of nearly compact spaces, Trans. AMS 124(1966), 131-147.

10. Stephenson,R.M.Jr., Pseudocompact spaces, Trans. AMS 134(1968), 437-448.

11. Tamano,H., A note on the pseudo-compactness of the product of two spaces, Memoirs College Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, 33(1960), 225-230.