数理解析研究所講究録
第149巻 1972年 14-33

誤差関数の逆関数の最良近似式

電総研　戸田英雄，高山文雄

0. はじめに

誤差関数の逆関数の計算については，今年（1971）の3月の研究集会で一松信氏の発表があり，端の付近での特異性から，逆関数はNewton法で解くプログラムが示された。

山内二郎（1965）及び筆者（1967）の最良近似式*は端の方で弱かったので，今回はかなり端の方（確率 $P \fallingdotseq 0.2\times10^{-32}$ 位）まで有効な最良近似式を追加した。

---

*注

Function : $P=1/\sqrt{2\pi}\int_{x(P)}^{\infty}\exp(-t^2/2)\,dt$

Range : $0<P\leq 0.5$

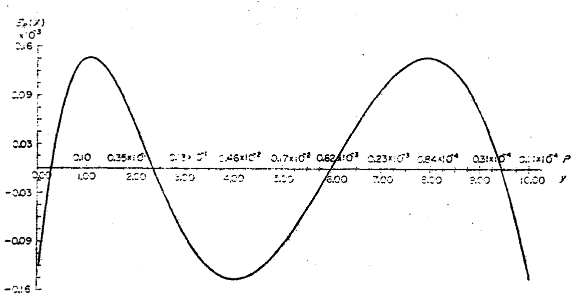
New approximation :

Let $y=-\ln(4P\cdot(1-P))$,

$$x(P)\simeq\left\{y(b_0+b_1y+b_2/(b_3+b_1y))\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$b_0=\ \ 3.702\,993\,4,$
$b_1=-0.029\,489\,901,$
$b_2=\ \ 1.956\,129\,4,$
$b_3=-0.917\,227\,58.$

Error Curve : (Approximation-Function)/(Function) :



1．逆正規積分関数の最良近似式

誤差関数（error function）は普通次のように定義される

(1) $$\mathrm{Erf}\ x = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

(2) $$\mathrm{erf}\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ここでは統計学の応用に即して，次の定義の標準正規分布関数について述べる．

(3) $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \ , \quad P(x) = 1 - \Phi(x)$$

換算は下記の通りである．

(4) $$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

(5) $$\mathrm{erf}\ x = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$$

(6) $$1 - \mathrm{erf}\ x = \mathrm{erfc}\ x = 2P(x\sqrt{2})$$

xの大きい方で（$x \geq 4.2$）で $P(x)$ の計算は，次の式による．

(7) $$P(x) = 1/\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{x^2}{2}} \left[\frac{1|}{|x} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{n|}{|x} \right]$$

逆正規積分関数は，

(8) $$P = 1/\sqrt{2\pi} \int_{x(P)}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$$

とおき，引数Pに対して $x(P)$ を求める．（$x(P)$ は $P \to 0$ のとき主要項が $x \simeq \sqrt{-2\log_e(CP)}$ となる．）

$x(P)$ の近似式として，

(9) $$y = -\log_e 4P\cdot(1-P)$$

とおき，y の区間を与えて（ここでは $y_1 \leq y \leq y_6$ とした）

(10) $$x(P) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} y + r\right)\cdot\left(p_0 + y p_1 + y^2 p_2\right) / (1 + yq) \right\}^{1/2}$$

で求める．このときの誤差を

(11) $$x(P) - \bar{x} = E(y;\, p_0, p_1, p_2, q, r)$$

とかく．区間 $[y_1, y_6]$ で誤差 $|E|$ の max が min になるように，パラメタ p_0, p_1, p_2, q, r を定める．そのために，極値を与える点 y_i $(i = 2, 3, 4, 5)$，すなわち4個の偏差点と (10) 式の 5個のパラメタ の全部で9個の未知数を次の連立方程式を解いて定める．（最良近似式の求め方の原理）

(12) $$\sum_{j=0}^{2} \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial p_j}\right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial p_j}\right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta p_j + \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta q$$
$$+ \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta r = -\left(E(y_i) + E(y_{i+1})\right)$$
$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

(13) $$\frac{\partial E}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 2, 3, 4, 5)$$

Δp_j, Δq, Δr は p_j $(j = 0, 1, 2)$ と q, r の修正量である．

2．最良近似式とその誤差曲線

関数　　$P = 1/\sqrt{2\pi} \int_{x(P)}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,dt$　の逆関数

近似式　　$y = -\log(4P(1-P))$　とおき，

$$x(P) = \{ d_2 + y \cdot (d_3 + y \cdot d_4) + d_1/(y + e_1) \}^{1/2}$$

種類	範囲	ミニマックス誤差(絶対)
(1－1)	$10 \le y \le 20$ $(4.24 \le x \le 6.10)$	$2.352\ 10^{-7}$
(1－2)	$10 \le y \le 30$ $(4.24 \le x \le 7.54)$	$2.461\ 10^{-6}$
(1－3)	$10 \le y \le 40$ $(4.24 \le x \le 8.75)$	$7.632\ 10^{-6}$
(1－4)	$10 \le y \le 50$ $(4.24 \le x \le 9.82)$	$1.547\ 10^{-5}$
(1－5)	$10 \le y \le 60$ $(4.24 \le x \le 10.78)$	$2.544\ 10^{-5}$
(1－6)	$10 \le y \le 70$ $(4.24 \le x \le 11.66)$	$3.707\ 10^{-5}$
(1－7)	$10 \le y \le 80$ $(4.24 \le x \le 12.48)$	$4.995\ 10^{-5}$
(2－1)	$0 \le y \le 30$ $(0 \le x \le 7.54)$	$1.18\ 10^{-3}$
(2－2)	$0 \le y \le 40$ $(0 \le x \le 8.75)$	$1.42\ 10^{-3}$
(2－3)	$0 \le y \le 50$ $(0 \le x \le 9.82)$	$1.59\ 10^{-3}$
(2－4)	$0 \le y \le 60$ $(0 \le x \le 10.78)$	$1.71\ 10^{-3}$
(2－5)	$0 \le y \le 70$ $(0 \le x \le 11.66)$	$1.78\ 10^{-3}$
(2－6)	$0 \le y \le 80$ $(0 \le x \le 12.48)$	$1.83\ 10^{-3}$

1-7) の 最良近似 の OUTPUT の結果

RESULT

D1,D2,D3,D4,Q1 = 0.3101297130347349D 02 -0.3462000441946561D 01 0.1983127810920972D 01
0.5318339775891995D-04 0.9713886314943654D 01

	偏差点 y	$E(y;p_0,p_1,p_2,q,r)$	$E(y;d_1,d_2,d_3,d_4,q_1)$	$E'(y)$
1	0.1000000000000000D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	0.11910708D-03
2	0.1219850214100199D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	-0.58286709D-15
3	0.2039438181146771D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	-0.54123372D-15
4	0.3863359090027883D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	0.69388939D-16
5	0.6534666531854526D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	-0.15265567D-15
6	0.8000000000000000D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	0.14720563D-04

RESULT (2−1) $0 \leqq y \leqq 30$ で $x(P)$ を求める最良近似の OUTPUT 例

D1,D2,D3,D4,Q1 = 0.4427475802502647D 02 -0.4567739481548870D 01 0.2033781074649546D 01
-0.7983207583081582D-03 0.9692925396439944D 01

	偏差点 y	$E(y; p_0, p_1, p_2, q)$	$E(y; d_1, d_2, d_3, d_4, q_1)$	$\lvert E'(y) \rvert$
1	0.0000000000000000D 00	0.00000000D 00	0.00000000D 00	0.00000000D 00
2	y_1 = 0.3138218588808790D 00	-0.11757361D-02	-0.11757361D-02	-0.69730888D-10
3	y_2 = 0.2911715783754899D 01	0.11757361D-02	0.11757361D-02	-0.15265567D-15
4	y_3 = 0.9273232697111082D 01	-0.11757361D-02	-0.11757361D-02	0.76327833D-15
5	y_4 = 0.2153586857176258D 02	0.11757361D-02	0.11757361D-02	0.11102230D-15
6	u = 0.3000000000000000D 02	-0.11757361D-02	-0.11757361D-02	-0.56033722D-03

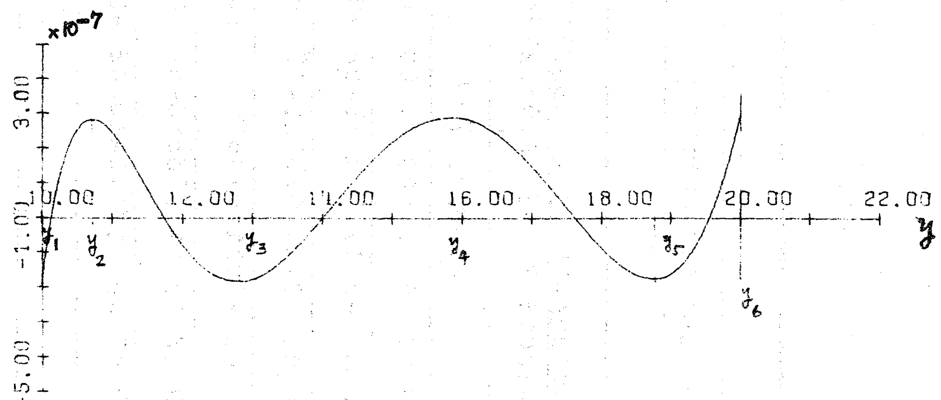
20

(1−1)

$10 \le y \le 20$, $4.2365284 \le x \le 6.1046012$

```
D1 # .17416761D2
D2 #-.28272310D1
D3 # .19665446D1
D4 # .233385610-3
Q1 # .60284165D1
```

絶対誤差 (x(P)−真のx)



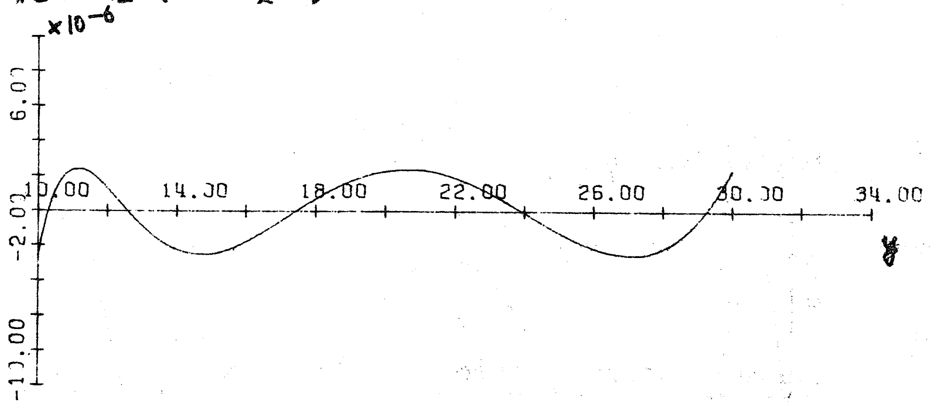
$|\text{min-max error}| = 2.352_{10}{-7}$

(1−2)

$10 \leq y \leq 30$ $4.2365284 \leq x \leq 6.1046012$

```
D1# .20514142D2
D2#-.30047792D1
D3# .19722725D1
D4# .15658027D-3
Q1# .68903534D1
```

絶対誤差 (x(P)−真のx)



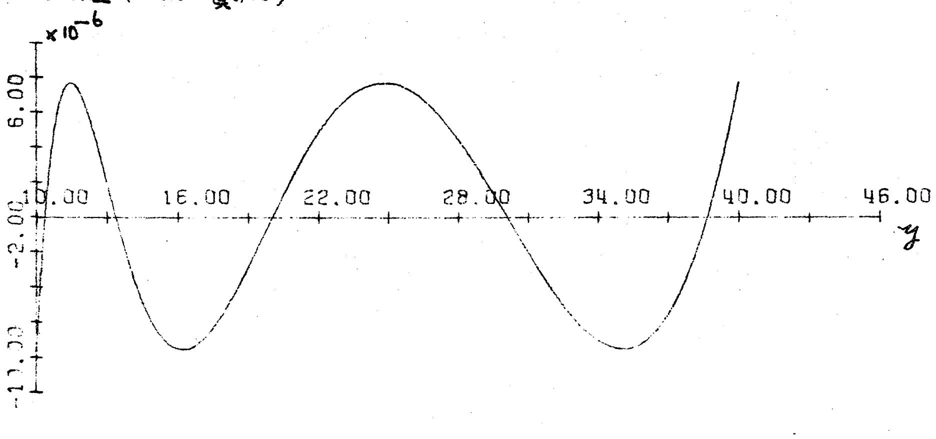
$|\text{min-max error}| = 2.461 \times 10^{-6}$

(1−3)

$10 \leq y \leq 40$ $4.236528 \leq x \leq 8.7504956$

D1# .23148572D2
D2#-.31369430D1
D3# .19759292D1
D4# .11557150D-3
Q1# .76141593D1

絶対誤差（$x(P)$ − 真の x）



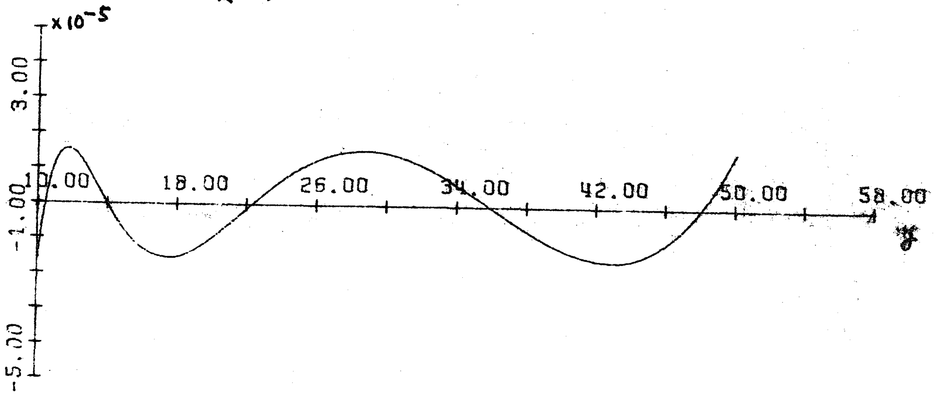
$|\text{min max error}| = 7.632 \times 10^{-6}$

(1−4)

$10 \leq y \leq 50$ $\quad$ $4.2365284 \leq x \leq 9.8156261$

D1#	.25439117D2
D2#	-.32409735D1
D3#	.19784904D1
D4#	.90575861D-4
Q1#	.82352212D1

絶対誤差 (x(P) − 真のx)



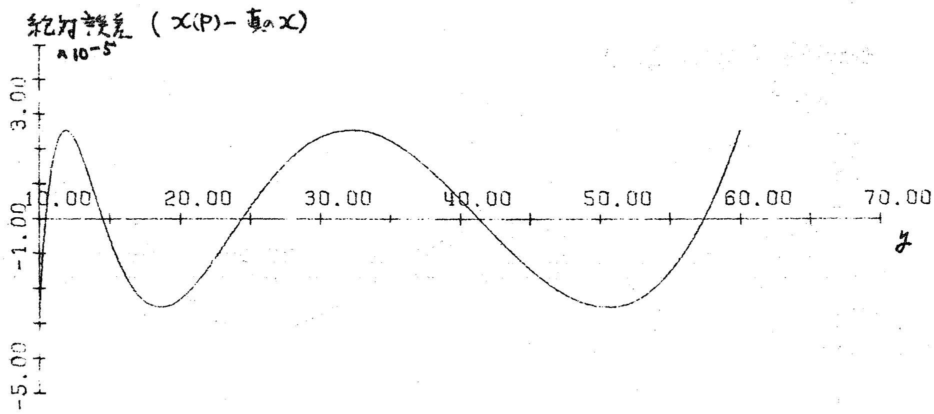
$|\text{min-max error}| = 1.547 \times 10^{-5}$

(1－5)

$10 \leq y \leq 60 \qquad 4.2365284 \leq x \leq 10.777887$

```
D1# .27477112D2
D2#-.33265173D1
D3# .19804074D1

D4# .73887073D-4
Q1# .87811946D1
```



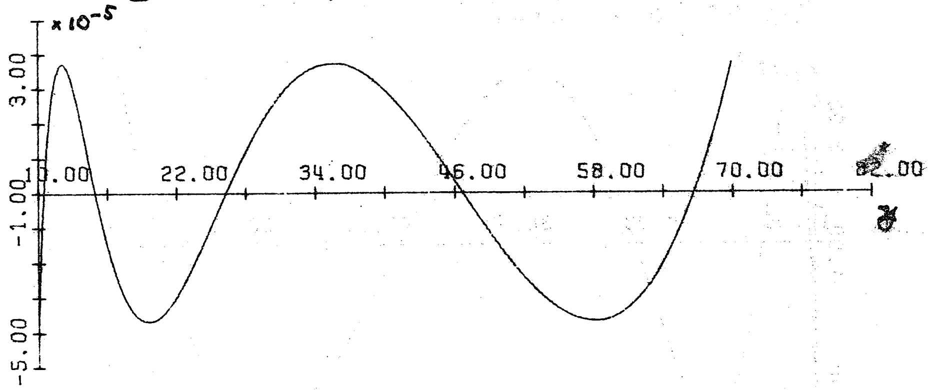
$|\text{min-max error}| = 2.544 \; \cancel{3.707} \times 10^{-5}$

(1−6)

$10 \le \gamma \le 70 \qquad 4.2365284 \le x \le 11.662228$

```
D1# .29321773D2
D2#-.33990665D1
D3# .19819100D1
D4# .62019276D-4
Q1# .92700538D1
```

絶対誤差 ($x(P)$− 真のx)



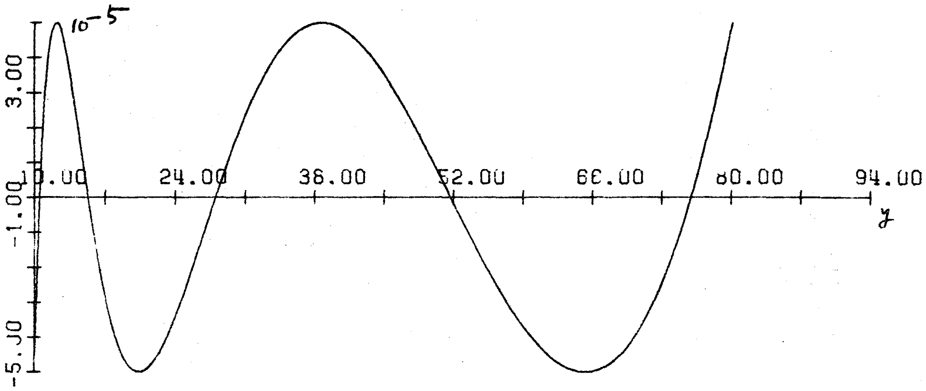
$|\text{min-max error}| = 3.707 \times 10^{-5}$

(1-7)

$10 \leq y \leq 80 \qquad 4.2365284 \leq x \leq 12.484912$

```
D1= .31012971D+2
D2=-.34620004D+1
D3= .19831278D+1
D4= .531833980D-4
Q1= .971388630D+1
```

絶対誤差 (x(P) - 真のx)



|min max error| = 4.995×10^{-5}

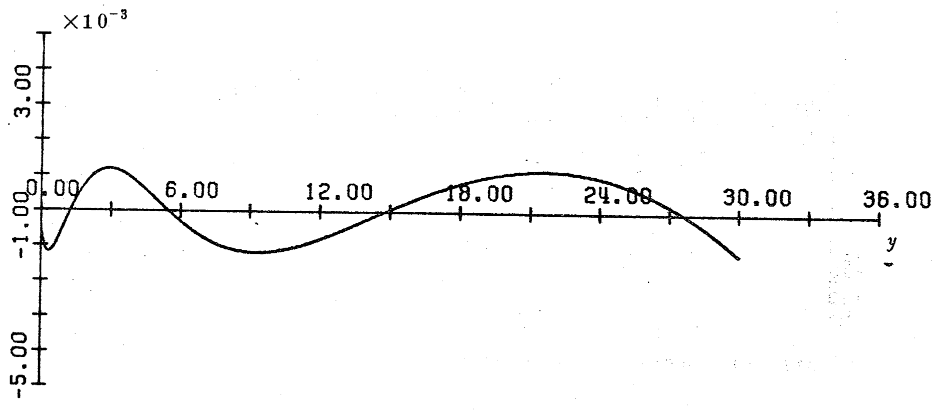
(2-1)

$0 \leq y \leq 30 \quad (0 \leq x \leq 7.541)$

D1= .44274758D+2
D2=-.45677395D+1
D3= .20337811D+1
D4=-.79832076D-3
Q1= .96929254D+1

誤差曲線：

絶対誤差（$x(P)$－真のx）



|min-max error|: $.118_{10^{-2}}$

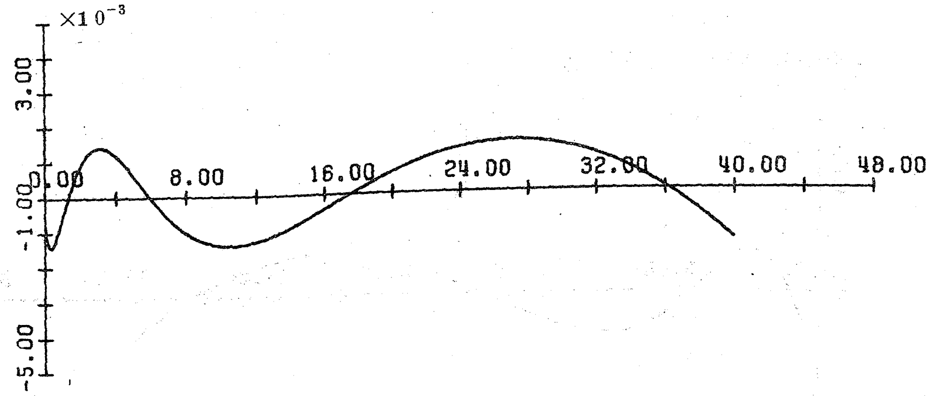
(2-2)

$0 \leq y \leq 40 \quad (0 \leq x \leq 8.75)$

D1= .37009704D+2
D2=-.40830204D+1
D3= .20114273D+1
D4=-.36387744D-3
Q1= .90642956D+1

誤差曲線：

絶対誤差（$x(P)$－真のx），x)



|min-max error|: $0.142_{10^{-2}}$

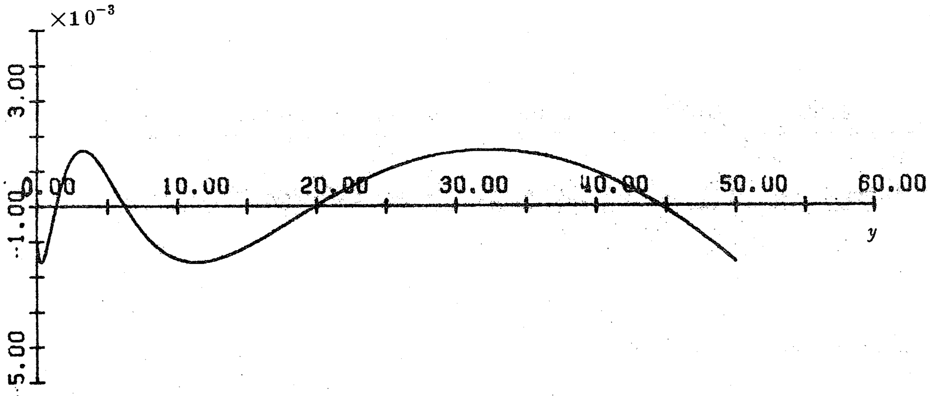
(2-3)

$0 \leq y \leq 50 \quad (0 \leq x \leq 9.81)$

```
D1= .33797650D+2
D2=-.38626532D+1
D3= .20014274D+1
D4=-.18750894D-3
Q1= .87498536D+1
```

誤差曲線：

絶対誤差（$x(P)$－真の x）$\ln x$）



min-max error ： $0.159_{10^{-2}}$

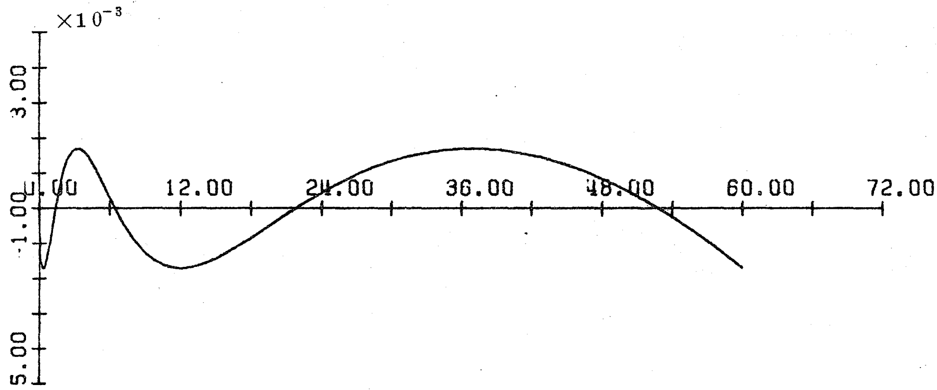
(2−4)

$0 \leq y \leq 60 \quad (0 \leq x \leq 10.8)$

```
D1= .32089922D+2
D2=-.374412245D+1
D3= .19961595D+1
D4=-.10203501D-3
Q1= .857074120+1
```

誤差曲線：

絶対誤差（$x(P)$－真のx）



| min-max error |： $0.171_{10^{-2}}$

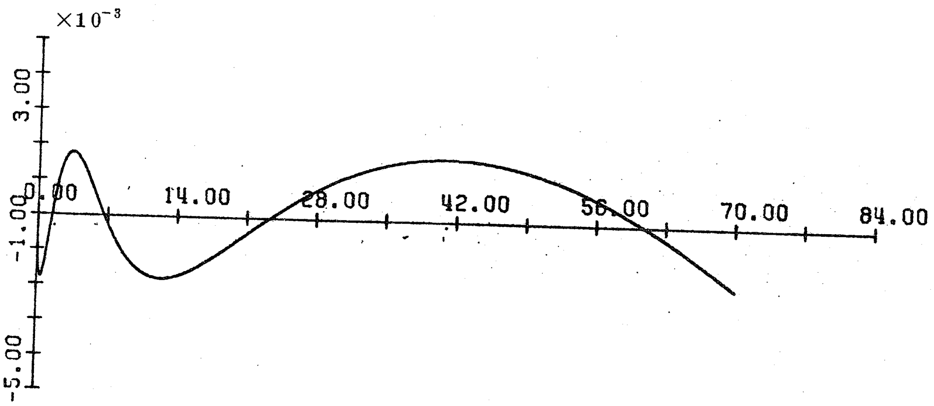
(2-5)

$0 \leq y \leq 70 \quad (0 \leq x \leq 11.66)$

誤差曲線：

```
D1= .310837190D+2
D2=-.367394020D+1
D3= .199310080D+1
D4=-.557704810D-4
Q1= .846059460D+1
```

絶対誤差（$x(P)$－真のx）



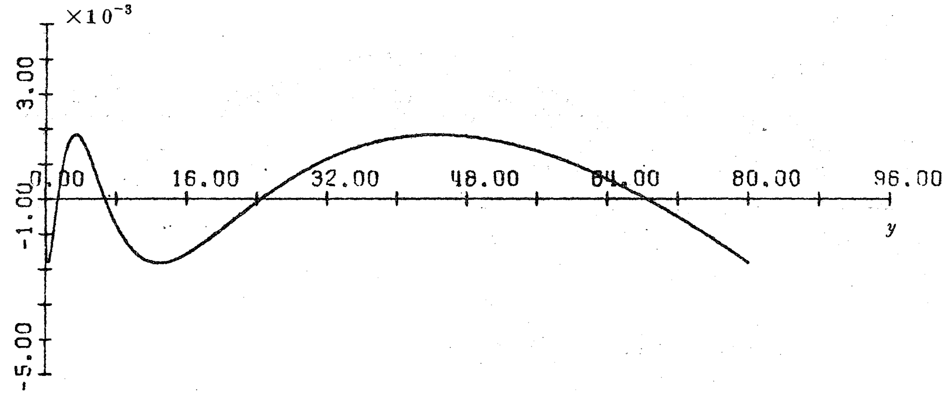
|min-max error|: $0.178_{10}{}^{-2}$

(2- 6)

$0 \leq y \leq 80 \quad (0 \leq x \leq 12.48)$

D1=.30451845D+2
D2=-.36297808D+1
D3= .19912087D+1
D4=-.287797450-4
Q1= .83894444D+1

絶対誤差（$x(P)$－真のx）



|min-max error|： $0.183_{10}{}^{-2}$

3. 検討

$$y = -\log(4P(1-P))$$

なる山内の変換により，y の広い範囲で高精度の近似式を作ることも出来ると思うが，一松氏のやり方のように，(8)式を直接 Newton 法で数値的に求めるプログラムの方が高精度の計算には実用的であろう．そのときの x の才1近似を与えるのには，たとえば(2−6)の近似式が x の広範囲($0 \leq x \leq 12.5$)にわたって役に立つと思う．

4. 文献

1) 一松 信(1971) 誤差函数の逆函数の計算，数理解析研研究集会予稿(1971/3/27)

2) 山内二郎(1965) 正規分布の百分率点の一次有理関数近似 才6回プログラミング・シンポジウム報告集

3) H. Toda (1967) An Optimal Rational Approximation of Normal Deviates for Digital Computers, Bul. Electro-Tech. Lab., Vol.31, NO.12, pp. 17~26.