

2次元正規分布関数 $L(x, y, \rho)$

の計算について (その1)

電研 中田英雄, 高山文雄

慶大工 竹内寿一郎

東大工 高沢嘉光

1. 問題

2次元の正規分布の pdf を $f(x, y; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ とする。

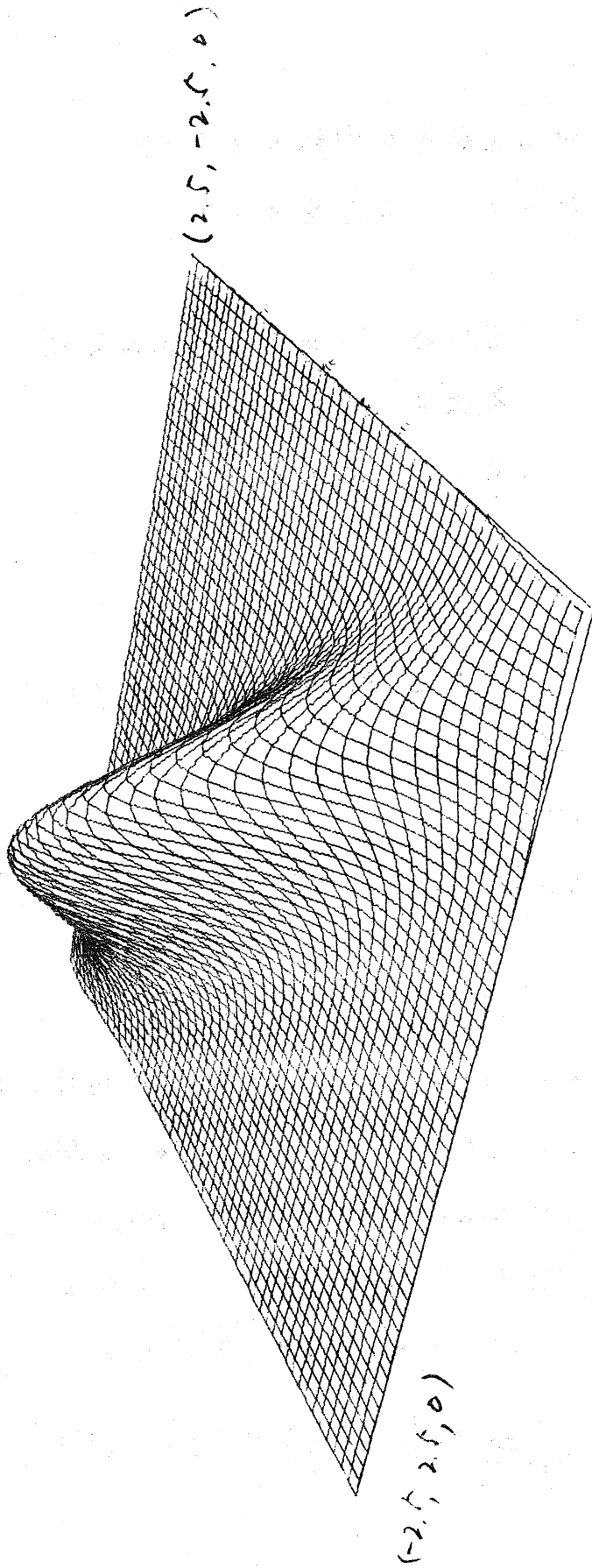
$$(1.1) \quad f(x, y; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) \\ = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right]$$

とかくと, この分布は $x=\mu_1, y=\mu_2$ を中心(平均値)として
密度関数の値が等しい處では楕円となる。 σ_1 は $\sqrt{D(x)}$, σ_2 は
 $\sqrt{D(y)}$ で ρ が相関係数と表す。 $\mu_1=\mu_2=0, \sigma_1=\sigma_2=1.0, \rho=0.9$

の $f(x, y)$ の図像 ^が 高沢により次のように示された。(図-1)

$\mu_1=\mu_2=0, \sigma_1=\sigma_2=1$ のときは, 次の $\sqrt{1-\rho^2}$ は

$$(1.2) \quad f(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \{ x^2 - 2\rho xy + y^2 \} \right]$$



$(2.5, -2.5, 0)$

$(-2.5, 2.5, 0)$

$(-2.5, -1.5, 0)$ 高次氏描 <

$\mu_1=0, \mu_2=0, \int=0.9, \sigma_1=1.0, \sigma_2=1.0$

視果 $P(-10, -6, 5)$ ($\alpha=30^\circ$ $\beta=-18^\circ$) 祖角

透視圖

圖-1 $f(x, y; \mu_1=0, \mu_2=0, \sigma_1=1, \sigma_2=1, \int=0.9)$

$$(1.3) \quad L(h, k; f) = \int_h^\infty \int_k^\infty f(x, y; f) dx dy$$

とかく。 $z = z'$,

(h, k, f) を与えて, $L(h, k; f)$ を求める計算法を問題とする。

たとえば,

$$(1.4) \quad L(0, 0; f = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \sin^{-1}(0.5) / (2\pi) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{3}.$$

$L(h, k, f)$ の図を次に示す。(例) (圖-3 で切り取られた部分)

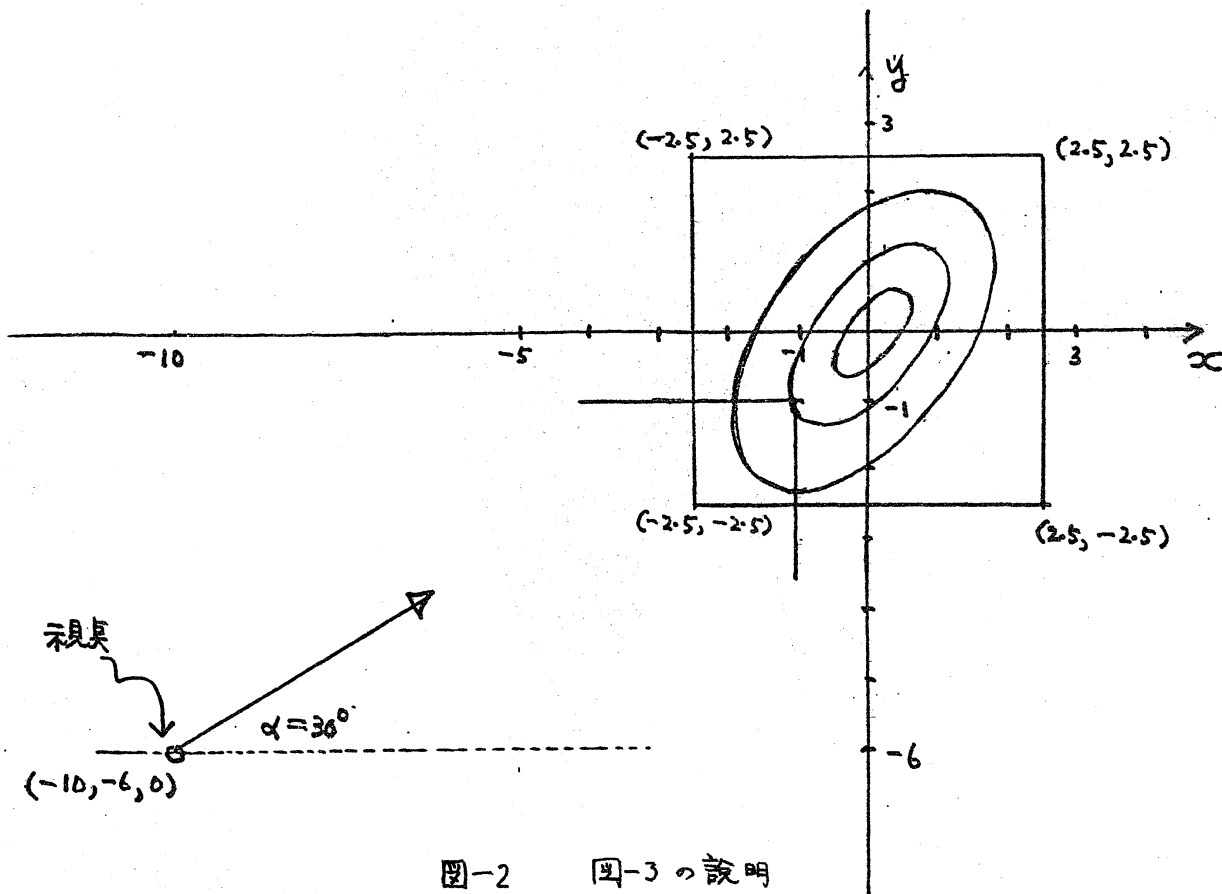
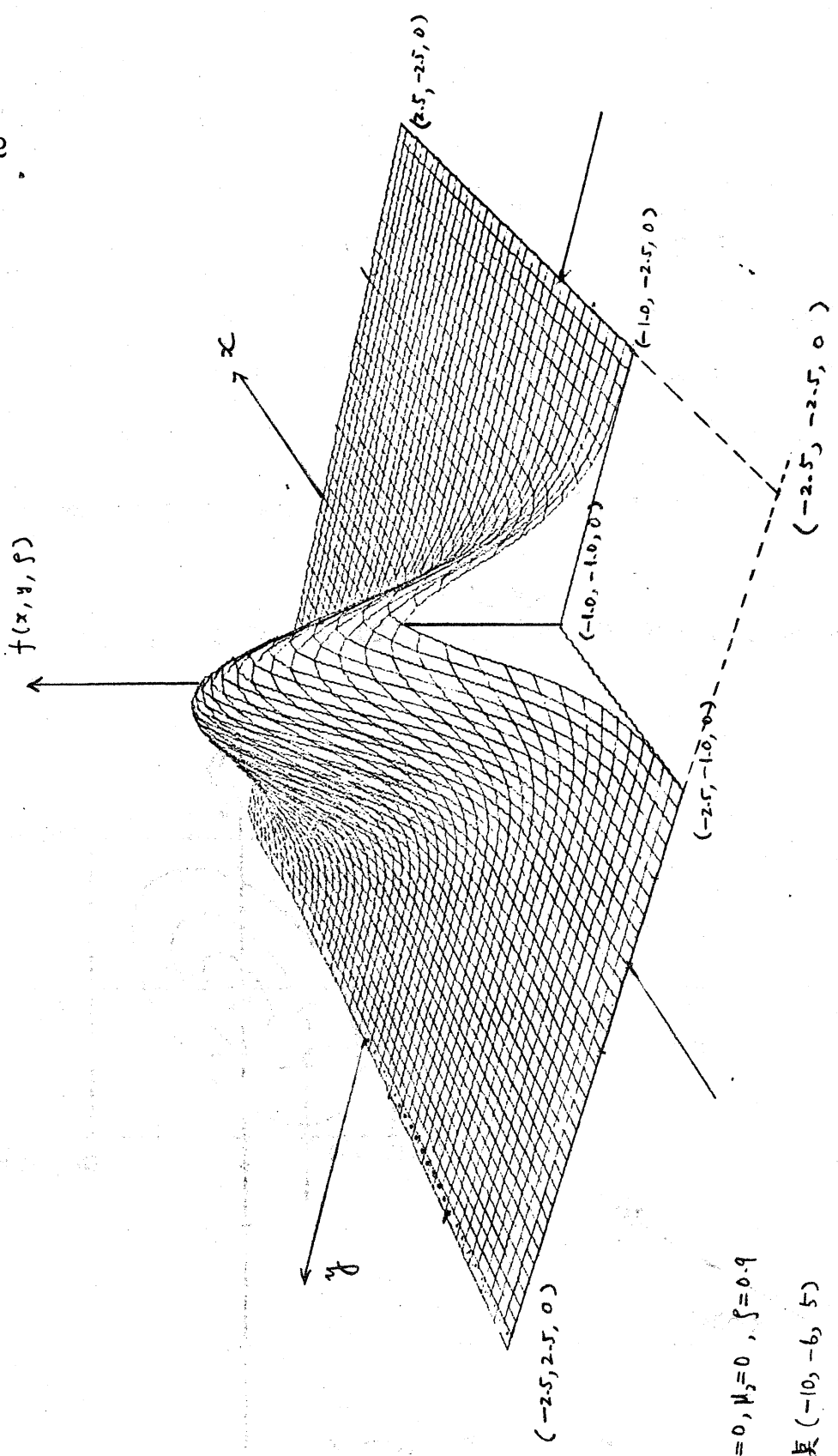


圖-2 圖-3 の説明



$\mu_1=0, \mu_2=0, \xi=0.9$

视点 $(-10, -6, 5)$

视角 $\alpha=30^\circ, \beta=-18^\circ$

领域 $-2.5 \leq x, y \leq 2.5$

$MM=50$

图-3 L ($\mu_1=-2.5, \mu_2=-2.5$) 的透视图

高次反插值

2. 2次元正規分布関数の計算のための記号

$$(2.1) \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-t^2/2)$$

$$(2.2) \quad Q(x) = \int_x^{\infty} \phi(t) dt$$

$$(2.3) \quad f(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right\}$$

$$(2.4) \quad V(h, k) = \int_0^h \phi(x) dx \int_0^{\frac{\rho}{h}x} \phi(y) dy$$

$$(2.5) \quad T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp(-\frac{1}{2} h^2 (1+x^2))}{1+x^2} dx$$

$$(2.6) \quad L(h, k; \rho) = \int_h^{\infty} dx \int_k^{\infty} dy \cdot f(x, y; \rho)$$

3. $L(h, k; \rho)$ の計算法

$$(3.1) \quad L(h, k; \rho)$$

$$= \int_0^{\rho} \frac{dt}{2\pi\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{-\frac{h^2 - 2t \cdot h k + k^2}{2(1-t^2)}\right\} + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$= \int_0^{\sin^{-1} \rho} \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left\{-\frac{h^2 - 2\sin\theta \cdot h k + k^2}{2\cos^2\theta}\right\} + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad L(h, k; \rho) &= V\left(h, \frac{k - \rho h}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) + V\left(k, \frac{h - \rho k}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \\
 &+ \frac{\sin^{-1} \rho}{2\pi} + \frac{1}{2} (Q(h) + Q(k)) - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad L(h, 0; \rho) &\quad (\text{山内 = 部 講義 } 1 - \text{ト}) \\
 &= Q(h) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos^{-1} \rho \cdot \phi(w) - \sum_{m=0}^{\infty} h^{2m+1} \frac{A_m}{m! 2^m (2m+1)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$z = z', \quad w = \frac{h}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

$$A_0 = \Phi(-w)$$

$$A_1 = \phi(w)/w - A_0$$

$$A_2 = \phi(w)/w^3 - A_1$$

$$A_3 = 3\phi(w)/w^5 - A_2$$

...

$$A_m = (2m-3)(2m-5)\cdots 3 \cdot 1 \cdot \phi(w)/w^{2m-1} - A_{m-1}$$

4. 数値積分による結果

(3.1) ガウスの積分公式(28頁)で求めた。\$|f|\$ が 1 に近くなると精度が出にくい。数値例として \$f=0.99\$ の場合と \$f=0.9999\$ の場合を比較して附表-1に示す。

この表で、\$L_1, L_2, E_R\$ という記号は、次の値を示す。

$$g(h, k, \theta) \triangleq \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{h^2 - 2 \sin \theta \cdot h k + k^2}{2 \cos^2 \theta} \right\}$$

と置き、

$$L_1 \triangleq \left\{ \int_0^{\sin^{-1} 0.8} + \int_{\sin^{-1} 0.8}^{\sin^{-1} f} \right\} \cdot g(h, k, \theta) d\theta + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$L_2 \triangleq \left\{ \int_0^{\sin^{-1} 0.8} + \int_{\sin^{-1} 0.8}^{\sin^{-1} 0.9} + \int_{\sin^{-1} 0.9}^{\sin^{-1} f} \right\} \cdot g(h, k, \theta) d\theta + Q(h) \cdot Q(k)$$

$$E_R \triangleq (L_1 - L_2) / L_2$$

である。ガウスの積分公式は \$L_1, L_2\$ の各積分の項ごとに用いた。

なお \$L(0, 0, f) = \frac{1}{4} + \frac{\sin^{-1} f}{2\pi}\$

で \$h=0, k=0\$ のときは check できる。

\$f\$ を固定して \$(h, k)\$ の各点で \$L(h, k; f)\$ の値の相対誤差 \$E_R\$ を図示したのが図-4 である。\$h=k, (f > 0)\$ での

精度がよいのは、

$$g(h, k, \theta) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{h^2}{1 + \sin \theta} \right\}$$

と変形したからである。

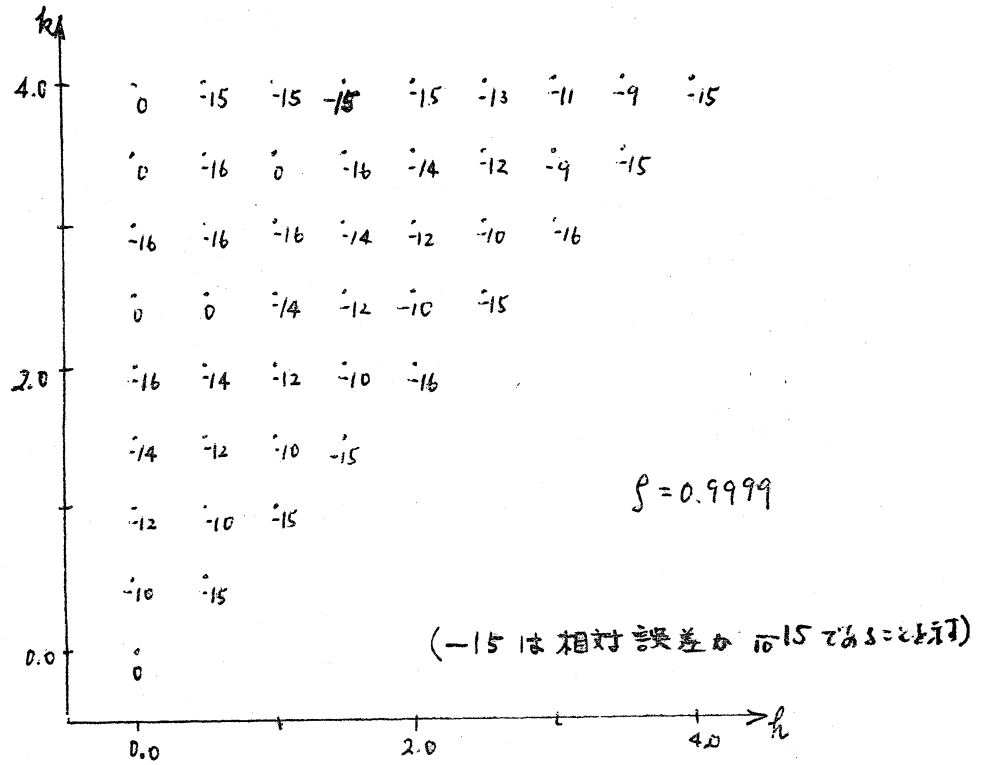
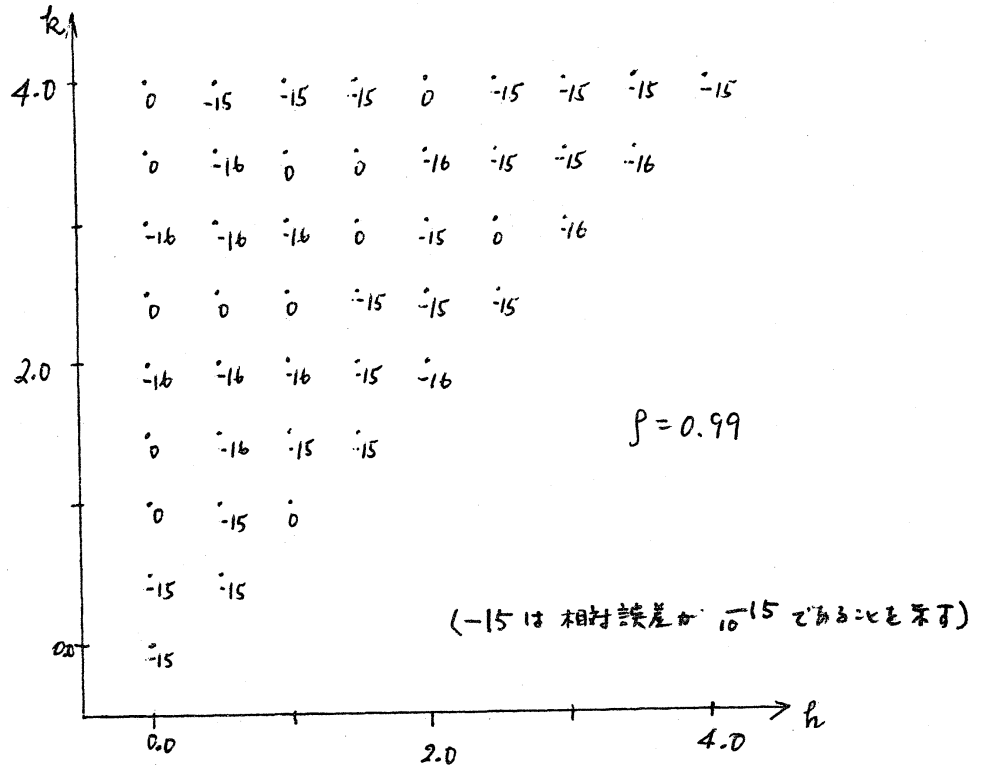


図-4 (3-1)式による相対誤差

*** RHO= 0.99000000 00 ***

#H	#K	L1	L2	EM	EX
0.00000000 00	0.00000000 00	0.47747329317779340 00	0.47747329317779350 00	-0.183025280-15	0.4774732931777940
0.00000000 00	0.10000000 01	0.15865525393145180 00	0.15865525393145180 00	0.00000000 00	
0.00000000 00	0.20000000 01	0.22750131948179060-01	0.22750131948179060-01	0.762511390-16	
0.00000000 00	0.30000000 01	0.13498980316286140-02	0.13498980316286140-02	0.803173390-16	
0.00000000 00	0.40000000 01	0.31671241833120380-04	0.31671241833120380-04	0.00000000 00	
0.10000000 01	0.10000000 01	0.14500353484799420 00	0.14500353484799420 00	0.00000000 00	
0.10000000 01	0.20000000 01	0.22750131948177340-01	0.22750131948177340-01	0.453150380-16	
0.10000000 01	0.30000000 01	0.13498980316296340-02	0.13498980316296340-02	0.477515220-15	
0.10000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120350-04	0.31671241833120350-04	0.127151420-15	
0.20000000 01	0.20000000 01	0.19211642648669050-01	0.19211642648669050-01	-0.903780750-16	
0.20000000 01	0.30000000 01	0.13498980316297840-02	0.13498980316297840-02	0.123280660-15	
0.20000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120340-04	0.31671241833120340-04	0.00000000 00	
0.30000000 01	0.30000000 01	0.11015199986206250-02	0.11015199986206250-02	0.985909220-16	
0.30000000 01	0.40000000 01	0.31671241833107630-04	0.31671241833107630-04	0.321368350-15	
0.40000000 01	0.40000000 01	0.24214295411909130-04	0.24214295411909130-04	-0.559714350-15	

*** RHO= 0.99990000 00 ***

#H	#K	L1	L2	EM	EX
0.00000000 00	0.00000000 00	0.49774919045259450 00	0.49774919045259450 00	0.00000000 00	0.4977491904525952
0.00000000 00	0.10000000 01	0.15865525393147140 00	0.15865525393145690 00	0.182290270-12	
0.00000000 00	0.20000000 01	0.22750131948179060-01	0.22750131948179060-01	0.762511390-16	
0.00000000 00	0.30000000 01	0.13498980316286140-02	0.13498980316286140-02	0.803173390-16	
0.00000000 00	0.40000000 01	0.31671241833120380-04	0.31671241833120380-04	0.00000000 00	
0.10000000 01	0.10000000 01	0.15729008030865540 00	0.15729008030865540 00	0.105040390-15	
0.10000000 01	0.20000000 01	0.22750131948184480-01	0.22750131948179230-01	0.274065350-12	
0.10000000 01	0.30000000 01	0.13498980316296340-02	0.13498980316296340-02	0.954630540-16	
0.10000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120350-04	0.31671241833120350-04	0.127151420-15	
0.20000000 01	0.20000000 01	0.22445528154435550-01	0.22445528154435550-01	-0.791101180-16	
0.20000000 01	0.30000000 01	0.13498980316300370-02	0.13498980316300370-02	0.523120930-12	
0.20000000 01	0.40000000 01	0.31671241833120340-04	0.31671241833120340-04	0.218937210-15	
0.30000000 01	0.30000000 01	0.13248956714195730-02	0.13248956714195730-02	-0.409728660-16	
0.30000000 01	0.40000000 01	0.31671241833152930-04	0.31671241833120030-04	0.103962660-11	
0.40000000 01	0.40000000 01	0.30916280014048620-04	0.30916280014048620-04	-0.219188190-15	

附表-1 (3.1) $L(k, k; \rho)$ 表

5. 附記

$L(h, k, f)$ を表わす (1.3) 式を極坐標で考えて見るようにとのコメントを高橋秀俊先生から頂いた。山内の近似式 (3.3) は極坐標による式の変形である。 $L(h, k; f)$ を (3.2) 式で計算する式で、 Γ 関数 (2.4) 式を極坐標で表わして級数展開して次の式を得た。

$$(5.1) \quad \Gamma(h, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^h dx \int_0^{\left(\frac{f}{h}\right)x} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy$$

$$\begin{aligned} (\tan \alpha &= \frac{f}{h} \text{ とおく}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{h/\cos\theta} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha - \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{h^2 \tan^2 \theta}{2}\right) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \tan \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i B_i}{(i+1)!} \end{aligned}$$

$\alpha = \alpha,$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \\ B_2 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha + \frac{1}{5} \tan^4 \alpha \\ B_3 &= 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha + \frac{1}{5} \tan^4 \alpha - \frac{1}{7} \tan^6 \alpha \\ &\dots \end{aligned}$$

$$B_i = B_{i-1} + (-)^i \frac{1}{2^{i+1}} \tan^{2i} \alpha$$

...

$$B_{\infty} = \alpha / \tan \alpha \quad (|\tan \alpha| \leq 1 \text{ のとき})$$

(5.3) ∇ 関数の性質を示す式:

$$\nabla(-h, \xi) = \nabla(h, -\xi) = -\nabla(h, \xi)$$

$$\nabla(h, 0) = \nabla(0, \xi) = 0$$

$$\nabla(h, \xi) + \nabla(\xi, h) = \int_0^h \phi(x) dx + \int_0^{\xi} \phi(y) dy$$

と用いると (5.1) は $|\tan \alpha| = \left| \frac{\xi}{h} \right| \leq 1$

の範囲で成り立つ。特に $|\tan \alpha|$ が小さいときは,

$$(5.4) \quad \nabla(h, \xi) = \frac{1}{2\pi} \tan \alpha \cdot \left[\left(\frac{h^2}{2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i B_{i+1}}{(i+1)!} \right) \right. \\ \left. + B_{\ell+1} \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^i}{i!} \right) \right\} \right]$$

ここで, ℓ は $B_{\ell+1} \doteq B_{\ell+2} \doteq B_{\ell+3} \doteq \dots = \frac{\alpha}{\tan \alpha}$

と有限桁数の演算で数値的に収束したと見なされる番号 ℓ を求める。

$\rho = 0.99$ と 0.9999 に對して, $h = 0(1)4$, $k = h(1)4$

で (5.4) を用いた数値例を附表-2 と 附表-3 に示す。

0.99000000 00

H K V1 V2 T1 T2 L (H,K,RO)

13H 20M 33S

$$V(k, \frac{k-fk}{\sqrt{1-f^2}})$$

$$V(k, \frac{k-fk}{\sqrt{1-f^2}})$$

$$\frac{A_{k-1} f}{2\pi}$$

$$\frac{Q(k) + Q(k) - a_{25}}{2}$$

0.00000000	00	0.00000000	00	0.00000000	00	0.2274733D	00	0.25000000	00	0.4774732931777939D	00	
0.00000000	00	0.10000000	01	0.00000000	00	-0.14814571	00	0.2274733D	00	0.7932763D-01	0.1586552539314523D	00
0.00000000	00	0.20000000	01	0.00000000	00	-0.2160982D	00	0.2274733D	00	0.1137507D-01	0.2275013194817902D	-01
0.00000000	00	0.30000000	01	0.00000000	00	-0.2267983D	00	0.2274733D	00	0.6749490D-03	0.1349898031615241D	-02
0.00000000	00	0.40000000	01	0.00000000	00	-0.2274575D	00	0.2274733D	00	0.1583562D-04	0.3167124183320329D	-04
0.10000000	01	0.10000000	01	0.4437494D-02	0.4437494D-02	0.2274733D	00	-0.9134475D-01	0.1450055348479947D	00		00
0.10000000	01	0.20000000	01	0.1485860D	00	-0.1940118D	00	0.2274733D	00	-0.1592973D	0.2275013194817714D	-01
0.10000000	01	0.30000000	01	0.1595207D	00	-0.2156467D	00	0.2274733D	00	-0.1699974D	0.1349898031615362D	-02
0.10000000	01	0.40000000	01	0.1632188D	00	-0.2200039D	00	0.2274733D	00	-0.1706565D	0.3167124183332815D	-04
0.20000000	01	0.20000000	01	0.9744109D-02	0.9744109D-02	0.2274733D	00	-0.2272499D	0.1971164264866871D	-01		00
0.20000000	01	0.30000000	01	0.1956761D	00	-0.1838495D	00	0.2274733D	00	-0.2379500D	0.1349898031614852D	-02
0.20000000	01	0.40000000	01	0.2165385D	00	-0.2053711D	00	0.2274733D	00	-0.2386091D	0.3167124183303671D	-04
0.30000000	01	0.30000000	01	0.1113916D-01	0.1113916D-01	0.2274733D	00	-0.2486501D	0.1101519998605721D	-02		00
0.30000000	01	0.40000000	01	0.1872790D	00	-0.1654114D	00	0.2274733D	00	-0.2493092D	0.316712418332448D	-04
0.40000000	01	0.40000000	01	0.1125962D-01	0.1125962D-01	0.2274733D	00	-0.2499683D	0.2421429541191171D	-04		00

13H 20M 38S

附表-2 (5.4) 1=fs L(k, k; f) 表

R0= 0,9999000000 00

H K V1 V2 T1 T2 L(H,K,R0)

61

12H 05M 43S

$$V\left(k, \frac{k-jk}{\sqrt{1-j^2}}\right) \quad V\left(k, \frac{k-jk}{\sqrt{1-j^2}}\right) \quad \frac{\Delta^{m-1} \int}{2\pi} \quad \frac{Q(k) + Q(k) - 0.5j}{2}$$

0.00000000	00	0.00000000	00	0.00000000	00	0.24777492D 00	0.25000000	00	0.4977491904525951D 00	4 ⁵
0.00000000	00	0.10000000	01	0.00000000	00	-0.1684216D 00	0.24777492D 00	0.7932763D-01	0.158655253931459D 00	6 ⁹
0.00000000	00	0.20000000	01	0.00000000	00	-0.2363741D 00	0.24777492D 00	0.1137507D-01	0.2275013194818125D-01	7 ⁰ 6 ⁶
0.00000000	00	0.30000000	01	0.00000000	00	-0.2470742D 00	0.24777492D 00	0.6749490D-03	0.1349898031617475D-02	2 ⁸ 6 ¹⁴
0.00000000	00	0.40000000	01	0.00000000	00	-0.24777334D 00	0.24777492D 00	0.1583562D-04	0.3167124183543757D-04	3 ¹² 3 ⁸
0.10000000	01	0.10000000	01	0.4428180D-03	0.4428180D-03	0.24777492D 00	-0.9134475D-01	0.1572900803086569D 00		3 ¹² 3 ⁸
0.10000000	01	0.20000000	01	0.1684220D 00	-0.2341238D 00	0.24777492D 00	-0.1592973D 00	0.227501319481815D-01		7 ² 3 ³ 4 ⁴
0.10000000	01	0.30000000	01	0.1695471D 00	-0.2459489D 00	0.24777492D 00	-0.1699974D 00	0.1349898031617378D-02		2 ⁹ 3 ³ 4 ⁴
0.10000000	01	0.40000000	01	0.1699222D 00	-0.2469831D 00	0.24777492D 00	-0.1706565D 00	0.3167124183534033D-04		3 ¹² 3 ³ 4 ⁴
0.20000000	01	0.20000000	01	0.9731029D-03	0.9731029D-03	0.24777492D 00	-0.2272499D 00	0.2244552815443457D-01		3 ¹² 3 ³ 4 ⁴
0.20000000	01	0.30000000	01	0.2341256D 00	-0.2425749D 00	0.24777492D 00	-0.2379500D 00	0.1349898031617308D-02		3 ⁰ 2 ³ 7 ⁷
0.20000000	01	0.40000000	01	0.2363746D 00	-0.2454830D 00	0.24777492D 00	-0.2386091D 00	0.3167124183527104D-04		3 ¹² 3 ³ 4 ⁴
0.30000000	01	0.30000000	01	0.1112904D-02	0.1112904D-02	0.24777492D 00	-0.2486501D 00	0.133248956714035573D-02		3 ¹² 3 ³ 4 ⁴
0.30000000	01	0.40000000	01	0.2425789D 00	-0.2409872D 00	0.24777492D 00	-0.2493092D 00	0.3167124183525716D-04		3 ¹² 3 ³ 4 ⁴
0.40000000	01	0.40000000	01	0.1125027D-02	0.1125027D-02	0.24777492D 00	-0.2499683D 00	0.3091628001251901D-04		4 ⁰ 4 ⁴ 8 ⁶ 1 ²

PTT 表-3 (5.4) = f3 L(k, k; j) 9 表

附表-1 と比べて見ると、次のようになる。

$\rho = 0.99$	実行時間 (H-8400)	有効桁数
数値積分法	23 sec	15~16
▽関数法	5 sec	10~15

$\rho = 0.9999$	実行時間 (H-8400)	有効桁数
数値積分法	23 sec	12~16
▽関数法	4 sec	10~15

6. 参考文献

- 1) Tables of Bivariate Normal Distribution Function and Related Functions, N.B.S. applied Math. ser. 50 (1959)
- 2) 山内二郎編, 統計数値表 JSA, 日本規格協会 (1972)
(近刊)