

重調和方程式の数値解法<講演予稿>

三 好 哲 考 (熊本大. 理)

§1 序

重調和項を含む偏微分方程式

$$(1.1) \quad \Delta^2 u = f \quad ,$$

$$(1.2) \quad \partial_{tt} u + \Delta^2 u = f$$

等々の近似解を数値的に求めるという問題は、2階の偏微分方程式の場合とは異り特殊な困難さを持つてゐる。現在、これらの問題を解く為に使用されてゐる方法を大別すると、変分法に基づく近似解法と差分法に基づく近似解法とに分る事ができよう。前者の代表的なものは、Ritz [1] の方法である。この方法の欠点は、この方法の使用にあたり必要不可欠な関数系 (basis) の構成が一般にはきわめて困難であるという事にある。最近になつて、いわゆる有限要素法 (FEM) が Ritz 法の精神を受け継ぐ事によつて、この欠点をある程度是正したかには見える。しかし、境界条件の処理は FEM により確にある程度容易にできるようにはなつたが、今度は別の問題が生じた。すなわち、いわゆる

conforming basis を使用する等にはすれば莫大な連立1次方程式を解かなければならなくなるのである。これを避ける為には *non-conforming basis* で我慢すれば近似解の精度が一般に悪くなる。しかもこの場合には特殊な場合[2]を除いて、近似解の収束性の証明さえもなされてはいない。

差分法の場合にも境界条件の処理の困難さは変わらない。それのみか、Dirichlet タイプの境界条件の場合にはともかくとして、他の境界条件の場合には事情は差分法の場合よりも一層悪くなるとさえ言わなければならぬ。更に、電子計算機を有効に使う(汎用コードの作製)という立場からすれば、差分法は変分法(特にFEM)にくらべると実用上数段劣っていると言わざるを得ないであろう。

以上がほぼ(1.1), (1.2) にたいする数値解法の現状である。ところで、問題の困難さは要するに、皇調和項が存在する、という事のみ由来している。したがって、この項を2つに分解し、与えられた方程式がそれと同等な2階の連立方程式に(境界条件、初期条件を含めて)分解できれば、その連立方程式にFEMを適用する事によって、すべての問題は解消するはずである。これまでこの方向での試みがなされなかった(筆者の知る範囲内の話だが)最大の理由は、この2階の連立方程式に対応する新しい変分原理が確立されてい

なかへちからだとおられる。そこでこの報告では、まず Part (I) にあつて、分解されておて来た 2 階の連立方程式に対応した変分原理を導き、それをもとにして、(1.1) にあつする FEM の適用を述べ、さらに近似解の収束性をあきらかにする。Part (II) では、Part (I) の結果、及び波動方程式にあつする FEM の安定性についで、藤井 [3] の結果を使つて、(1.2) にあつする FEM の適用、近似解の安定性、収束性を議論する。

Part (I) - 定常問題 -

§2 予備的考察

考える境界値問題は次のものに限定して話を進めようが、他の境界条件の場合も全く同様に議論できる。これは FEM の良きところである。

$$(2.1) \quad \Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.2) \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

さらに話を簡単にする為には次の仮定をあく。これは f 及び $\partial\Omega$ の滑らかさに関する条件である。

「仮定」：上の境界値問題の解は $W_2^4(\Omega)$ に属す。

この時、容易にわかる事であるが次の (I), (II), (III) が成立する。

(I)：問題 (2.1) ~ (2.2) は次の問題と同等である。

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta u = v \\ \Delta v = f \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

$$2.4 \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = 0$$

をみたす $u \in W_2^1(\Omega)$, $v \in W_2^2(\Omega)$ を求める。

(II): 問題 (2.3) ~ (2.4) の解 (u, v) は次の問題の一意解である。

$$(2.5) \quad (\partial u, \partial \varphi) + (v, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega)$$

$$(2.6) \quad (\partial v, \partial \varphi) + (f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^0(\Omega)$$

をみたす $(u, v) \in (W_2^1, W_2^1)$ を求める。

(III): 問題 (2.5) ~ (2.6) の解 (\bar{u}, \bar{v}) は、方程式

$$(2.7) \quad (\partial \bar{u}, \partial \varphi) + (\bar{v}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1(\Omega)$$

をみたす $(\bar{u}, \bar{v}) \in (W_2^1, W_2^1)$ の内積関数

$$(2.8) \quad F(u, v) = (v, v) - 2(f, u)$$

を最小にするものである。 (*): $(\partial u, \partial \varphi) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} d_i u d_i \varphi dx$

§3. 近似解の決定的方程式

Ω : 多角形領域, Ω_R : Ω の三角形分割 (regular)

n : Ω_R の内部節点数, N : $\bar{\Omega}_R$ 内の節点数

\sum_1^n : Ω_R の内部節点に関する和。

$\varphi_p(x)$ ($p=1, 2, \dots, N$) : 次の条件をみたす関数

(1) $\bar{\Omega}$ で連続, $\partial\Omega$ で 0 となる。(2) 各要素内では高々 1 次の多項式 (3) 1 次独立。

このとき \bar{u}, \bar{v} (真の解) の近似関数をそれぞれ

$$(3.1) \quad u_h = \sum_{p=1}^N u_p \varphi_p(x)$$

$$(3.2) \quad v_h = \sum_{p=1}^N v_p \varphi_p(x)$$

の形で求める事にして、係数 $\{u_p\}, \{v_p\}$ を連立一次方程式

$$(3.3) \quad (\partial u_h, \partial \varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N$$

$$(3.4) \quad (\partial v_h, \partial \varphi_p) + (f, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim n$$

から決定する。

定理 1. $\{u_p\}, \{v_p\}$ は一意的に決定される。

定理 2. アルゴリズム (3.3)~(3.4) は次の 2 つのアルゴリズムと同等である。

(A) : v_h を u_h から、方程式

$$(3.5) \quad (\partial u_h, \partial \varphi_p) + (v_h, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N$$

によって定めるとき、次の汎関数を u_h に関して最小にする。

$$(3.6) \quad F(u_h) = (v_h, v_h) - 2(f, u_h)$$

(B) : 汎関数

$$B[u_h, v_h] = 2(\partial u_h, \partial v_h) + (v_h, v_h) + 2(f, u_h)$$

の $\{u_p\}, \{v_p\}$ に関する stationary point を求める。

定理 3. (\bar{u}, \bar{v}) を真の解とすれば、(3.6) の $F(u_h)$ は次のように表す事ができる。

$$(3.7) \quad F(u_h) = -2(\partial[\bar{u} - u_h], \partial[\bar{v} - v_h]) \\ - (\bar{v} - v_h, \bar{v} - v_h) - (\bar{v}, \bar{v}).$$

§4. 近似解の収束性.

この節より, (u, v) を真の解とする.

- (i) $u - u_h$ を $v - v_h$ で評価すること. u_h を (3.1) の形を
 した u の補間関数とする. $u - u_h = \varepsilon_h$, $\|\varepsilon_h\|_1 = \varepsilon$ とおく.
 さらに $\|\varepsilon_h\|_1^2 = (\partial \varepsilon_h, \partial \varepsilon_h)$ である.

補題 1. 次の評価が成立する.

$$(4.1) \quad \|u - u_h\|_1 \leq \varepsilon + C \|v - v_h\|$$

- (ii) $v - v_h$ の評価. u_h より \bar{v}_h を次の方程式から求める.

$$(4.2) \quad (\partial u_h, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_h, \varphi_p) = 0, \quad p = 1 \sim N.$$

次に, v に近い (3.2) の形での補間関数を \hat{v}_h とし, $v - \hat{v}_h$
 $= \delta_h$, $\|\delta_h\|_1 = \delta$, $v - \bar{v}_h = \rho_h$, $\|\rho_h\| = \rho$ とおく.

補題 2. 次の評価が成立する.

$$(4.3) \quad \|v - v_h\| \leq C (\delta + \sqrt{\delta \varepsilon} + \sqrt{\lambda})$$

ただし, $0 \leq \lambda \leq \rho^2 + 2\rho\delta + 2\varepsilon\delta$.

証明. δ_h の定義より, $(\partial[u - u_h], \partial[v - \bar{v}_h])$

$$= (\partial[u - u_h], \partial[\hat{v}_h - \bar{v}_h]) + (\partial[u - u_h], \partial\delta_h).$$

一方 (4.2) 式より, $(\partial[u - u_h], \partial[\hat{v}_h - \bar{v}_h])$

$$= -(v - \bar{v}_h, \hat{v}_h - \bar{v}_h) = -(v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h) + (v - v_h, \delta_h).$$

したがって, $2(\partial[u - u_h], \partial[v - \bar{v}_h]) + (v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h)$

$$= -(v - \bar{v}_h, v - \bar{v}_h) + 2(v - \bar{v}_h, \delta_h) + 2(\partial[u - u_h], \partial\delta_h).$$

上式の右辺を λ_h とすれば, $\lambda \equiv |\lambda_h| \leq \rho^2 + 2\rho\delta + 2\varepsilon\delta$.

よって \hat{u}_h, \hat{v}_h は (4.2) 式により、結ばれておき、
定理 2 により、近似解 $u_h = \hat{u}_h$ として、

$$\begin{aligned} F(u_h) &= -2(\partial[u-u_h], \partial[v-\hat{v}_h]) - (v-\hat{v}_h, v-\hat{v}_h) - (v, v) \\ &\leq F(\hat{u}_h) \\ &= -2(\partial[u-\hat{u}_h], \partial[v-\hat{v}_h]) - (v-\hat{v}_h, v-\hat{v}_h) - (v, v) \\ &= -\lambda_h - (v, v) \end{aligned}$$

すなわち次の関係式を得る。

$$(4.4) \quad -2(\partial[u-u_h], \partial[v-\hat{v}_h]) - (v-\hat{v}_h, v-\hat{v}_h) \leq -\lambda_h$$

$$\begin{aligned} \text{一方} \quad & (\partial[u-u_h], \partial[v-\hat{v}_h]) \\ &= (\partial[u-u_h], \partial[\hat{v}_h - v_h]) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \\ &= -(v-\hat{v}_h, \hat{v}_h - v_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \\ &= -(v-\hat{v}_h, v-\hat{v}_h) + (v-\hat{v}_h, \delta_h) + (\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \end{aligned}$$

これを (4.4) 式へ代入すれば、

$$(v-\hat{v}_h, v-\hat{v}_h) - 2(v-\hat{v}_h, \delta_h) - 2(\partial[u-u_h], \partial\delta_h) \leq -\lambda_h$$

Schwarz の不等式及び (4.1) 式により次の 2 次不等式を得る。

$$(4.5) \quad \|v-\hat{v}_h\|^2 - 2\delta(1+c)\|v-\hat{v}_h\| - 2\delta\varepsilon - \lambda \leq 0$$

これを解くと (4.3) 式を得る。 (証明)

(iii) ρ の評価 (a) — 1 次 basis —

まず $\rho_p(x)$ が要素上で 1 次式と仮定する場合について考える。

勿論 $\rho_p(p) = 1$ とする。

補題3. \hat{u} を三角形 Δ 内で線型な任意の関数としたとき、次の不等式が成立する。(実際には線型である必要はない)。

$$(4.6) \quad \max_{\Delta} |\hat{u}| \leq \frac{C}{r} \|\hat{u}\|_{\Delta}$$

ただし、 r は Δ の最小辺の長さ、 $C = C(\sqrt{\sin \theta})^{-1}$ 、 θ : Δ の最小角。

証明は Sobolev の埋蔵定理による。

補題4. \hat{u} を (3.2) の形をした要素内では線型な関数とすれば次の不等式が成立する。

$$(4.7) \quad \sqrt{\sum_{p \in \Omega_R} u_p^2 \cdot r^2} \leq C \|\hat{u}\|_{\Omega_R}$$

証明は補題3.1による。

[定義] 三角形分割 Ω_R が *strongly regular* であるとは、 Ω_R は *regular* な分割である上に、 $r \rightarrow 0$ のとき次のような Ω_R の部分領域 Ω'_R がとれるときをいう。

$$(1) \quad (\bar{\Omega}_R - \Omega'_R) \text{ の節点数} = O(r^{-1}), \quad r: \min_r r$$

$$(2) \quad (\partial \hat{u}_R, \partial \varphi_p) = \begin{cases} -\Delta u|_p \cdot (1, \varphi_p) + O(r^3) & \text{if } p \in \Omega'_R \\ O(r^2) & \text{if } p \in \Omega_R - \bar{\Omega}'_R \end{cases}$$

ただし、 \hat{u}_R は $u \in C^3(\bar{\Omega})$ の補^向関数とする (区分的に線型な関数での)

補題5. 分割 Ω_R が *strongly regular* であれば、 \hat{u}_R を区分的に線型な関数による $u \in C^3(\bar{\Omega})$ の補向関数としたとき、方程式

$$(4.8) \quad (\partial \hat{u}_R, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_R, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

によって定められる \bar{v}_R は次の関係式をみたす。

$$(4.9) \quad \|v - \bar{v}_R\| = O(r^{\frac{1}{2} + \delta}) \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

(iv) \mathcal{P} の評価 (b) - 2 次以上の basis -

\hat{u} を次の条件をみたす Ω_h 上の関数とする.

(4.10) (1) $\bar{\Omega}_h$ で連続 (2) 各要素内では高々 k 次多項式

補題 6 (藤井 [3], 鶴飼 [4]). (4.10) の条件をみたす \hat{u} には

1. k 次の不等式が成立する. ただし $r_h = \frac{1}{\Delta} \min(\Delta \text{の最小辺の長さ})$.

$c' = c'(\sqrt{\sin \theta})$, θ : 前出

$$(4.11) \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \|\hat{u}|_{\tau}\| \leq \frac{c'}{r_h} \|u\|$$

補題 7. \hat{u}_h を (3.1) の型の関数による u の補間関数とする.

(4.2) 式により定められた \bar{v}_h には k 次評価が成立する.

$$(4.12) \quad \rho = \|v - \bar{v}_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{r_h} + \delta\right) \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

ただし $\varepsilon = \|u - \hat{u}_h\|_1$, $\delta = \|v - \bar{v}_h\|_1$.

定理 4. $u, v, \hat{u}_h, \bar{v}_h, \varepsilon, \delta$ を前出のものとする. この

とき $F \equiv M$ による近似解 u_h, v_h には k 次評価が成立する.

$$(4.13) \quad \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O\left(\frac{\varepsilon}{r_h} + \delta\right)$$

特に Ω_h が strongly regular な分割であれば, u_h, v_h が区分的に線型な場合でも次の評価が成立する.

$$(4.14) \quad \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(r_h^{\frac{1}{2}})$$

ε, δ を実際に評価するためには, よく知られている補間

定理を次に述べる. w を Ω_h で十分滑らかな関数とし, その

補間関数 w_h を次のように定める.

$\tilde{w}_h^{(1)}$; 要素内で 1 次式, 3 頂角で w と一致

$\tilde{w}_h^{(2)}$; " 2 次式, 3 頂角及び 3 辺の中角で

w と一致.

$\tilde{w}_h^{(3)}$; " 3 次式, 3 頂角で $w, \partial_i w (i=1, 2)$ と.

さらに重心で w と一致する.

補題 8. (Zlámal [5])

$$(4.15) \quad \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha (w - \tilde{w}_h^{(i)})\|_{\Omega_R} \leq C M_{i+1} h^i \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\text{ただし } M_j = \max |\partial^j w|.$$

定理 5. 真の解 u, v が十分滑かであれば, FEM の近似

解 u_h, v_h に対し 次の評価が成立する.

$$\text{2 次式の basis} \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h)$$

$$\text{3 次式 " } \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h^2)$$

特に Ω_R が *strongly regular* な分割であれば

$$\text{1 次式の basis} \Rightarrow \|u - u_h\|_1, \|v - v_h\| = O(h^{\frac{1}{2}})$$

注意(1): Friedrichs - Keller [6] 式の分割は *strongly regular*

である. これ以外にも δ, γ となる分割はかなり多くある.

注意(2): ACM-basis の収束のオーダーは $O(h^{\frac{1}{2}})$ である [2].

これを比較すれば, 1 次式の basis でも工程悪くはないと思われ

る.

注意(3): 方程式 (3.3) ~ (3.4) は *inner-outer iteration* を使っても

簡単に解く事ができる. 又 Smith [7] 参照の事.

Part (II) - 非定常問題 -

§ 5. 予備的考察.

次の初期値 - 境界値問題を考える.

$$(5.1) \quad \partial_{tt} u + \Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T]$$

$$(5.2) \quad \begin{cases} u|_{t=0} = a, \quad \partial_t u|_{t=0} = b \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

この問題が十分滑らかな解 u を持つば, $u, v = \Delta u$ は方程式

$$(5.3) \quad \begin{cases} \Delta u = v \\ \partial_{tt} v + \Delta v = f \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0, T]$$

を (5.2) の条件下で解くという問題の解になつてゐる. 定常問題の場合からのアナロジーとして次のようなアルゴリズムが

考えられる. 近似関数 $u_R^{(m)}, v_R^{(m)}$ ($m = m \cdot \Delta t, \Delta t = \frac{T}{M}$) を

$$(5.4) \quad \begin{cases} u_R^{(m)} = \sum_1^{\pi} u_p^{(m)} \varphi_p \\ v_R^{(m)} = \sum_1^N v_p^{(m)} \varphi_p \end{cases}$$

とおいて, 方程式

$$(5.5) \quad \begin{cases} (\partial u_R^{(m)}, \partial \varphi_p) + (v_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t D_{\bar{t}} u_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial v_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = (f, \varphi_p) & p = 1 \sim \pi \\ (1 \leq m \leq M-1) \end{cases}$$

より $u_R^{(m)}$ を出す. 左の ∂ , 初期条件は次のように与えらる.

$$(5.6) \quad u_R^{(0)} = P_R a, \quad D_t u_R^{(0)} = P_R b,$$

ここで, $D_t, D_{\bar{t}}$ は前進, 後退差分, P_R は適当な Projection.

補題 9. アルゴリズム (5.5) ~ (5.6) は次のアルゴリズムと同義.

$\bar{w}_R^{(m)}, \bar{v}_R^{(m)}$ を (5.4) の $u_R^{(m)}, v_R^{(m)}$ と同様な形の関数とする.

$$(5.7) \quad \begin{cases} (D_t \bar{v}_R^{(m)}, \varphi_p) + (\partial \bar{w}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 & p = 1 \sim N \\ (D_t \bar{w}_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_R^{(m+1)}, \partial \varphi_p) = (f, \varphi_p) & p = 1 \sim n \end{cases}$$

より $\bar{v}_R^{(m+1)}, \bar{w}_R^{(m+1)}$ を出し ($m = 0, 1, 2, \dots, M-1$)

$$(5.8) \quad D_t \bar{u}_R^{(m)} = \bar{w}_R^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, M-1)$$

より $\bar{u}_R^{(m+1)}$ を求めよ. したがって, 次の初期条件を与えよ.

$$(5.9) \quad \bar{u}_R^{(0)} = P_R a, \quad D_t \bar{u}_R^{(0)} = P_R b, \quad \bar{w}_R^{(0)} = P_R b$$

$$(5.10) \quad (\partial \bar{u}_R^{(0)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_R^{(0)}, \varphi_p) = 0 \quad p = 1 \sim N$$

注意: アルゴリズム (5.7) ~ (5.10) は, 与えられた方程式を次のように分解した上で, これを「わゆる consistent mass system」の形で近似したものである.

$$u_t = w, \quad \Delta u = v$$

$$\begin{cases} d_t v - \Delta w = 0 \\ d_t w + \Delta v = f \end{cases}$$

補題の証明. $u_R^{(m)} = \bar{u}_R^{(m)}, v_R^{(m)} = \bar{v}_R^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) をいう.

まず, (5.6), (5.9) により, $u_R^{(0)} = \bar{u}_R^{(0)}, u_R^{(1)} = \bar{u}_R^{(1)}$ は明らか. また

$v_R^{(0)}$ を (5.5) 式により $u_R^{(0)}$ から定める事にすれば, (5.10) より,

$v_R^{(0)} = \bar{v}_R^{(0)}$ となる. 次は (5.8), (5.9) より,

$$(5.11) \quad D_t \bar{u}_R^{(m)} = \bar{w}_R^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M-1)$$

したがって, $D_t D_t \bar{u}_R^{(m+1)} = D_t \bar{w}_R^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M-2$) となるが,

これを (5.7) の \bar{u}_k 式を代入すると

$$(5.12) \quad (D_t D_t \bar{u}_k^{(m+1)}, \varphi_p) - \beta \bar{v}_k^{(m+1)}, \partial \varphi_p = \gamma^{(m+1)} \varphi_p \quad p=1 \sim N$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, M-2)$$

次に (5.11) の \bar{u}_k 両辺を空間座標に関して微分すると

$$D_t \partial \bar{u}_k^{(m)} = 2 \bar{v}_k^{(m)} \quad \text{a.e.} \quad (m=0, 1, 2, \dots, M-1)$$

これを (5.7) に代入すると次式を得る。

$$(D_t \bar{v}_k^{(m)}, \varphi_p) + (D_t \partial \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

したがって (5.10) を考慮すれば

$$(5.13) \quad (\partial \bar{u}_k^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_k^{(m)}, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N \quad (m=0, 1, 2, \dots, M)$$

方程式 (5.5) と方程式 (5.12), (5.13) をくらべてみると全く同じものであり、さらに両者の初期値も同じであるから両方のアルゴリズムは等しい (勿論 $\bar{v}_k^{(M)}$ は (5.5) の上の式を使って最後に $\bar{u}_k^{(M)}$ から計算しなおさなければならない)。 (証明終)

§6. 安定条件

この節では scheme (5.5) が安定であるための十分条件を導く。証明方法は藤井 [3] の使用した方法に沿ってやる。

定理 6.1 条件 $\frac{\sqrt{\Delta t}}{\tau} < \frac{\sqrt{2}}{c}$ のもとで scheme (5.5) には、以下

の形でのエネルギー不等式が成立する。

$$(6.1) \quad \|D_t \bar{u}_k^{(M)}\|^2 + \|\bar{v}_k^{(M)}\|^2 \leq K(\tau) \sum_1^M \Delta t \|\bar{f}_k^{(m)}\|^2$$

$$+ K(\tau) [\|D_t \bar{u}_k^{(0)}\|^2 + \|\bar{v}_k^{(0)}\|^2]$$

ただし K は補題 6.1 の α と β の定数である。

この定理を証明する為には、いくつかの補題を設ける。この

節では以下 suffix n を省く。

補題 10. 次の不等式が $2 \leq k \leq M$ に関して成立する。

$$(6.2) \quad (1 - \rho)(\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2) \\ \leq (1 + \rho)(\|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2) \\ + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 + \sum_1^k \Delta t \cdot \|D_{\bar{t}} u^{(m)}\|^2$$

ただし、 $\rho = \frac{\Delta t \cdot (C')^2}{2\kappa^2}$ である。 C', κ ; 前出。

証明.

$$(6.3) \quad \sum_{m=1}^{k-1} (D_t D_{\bar{t}} u^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t \\ - \sum_{m=1}^{k-1} (\partial v^{(m)}, \partial [D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}]) \Delta t \\ = \sum_{m=1}^{k-1} (f^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t$$

が (5.5) より成立するが、 $D_t D_{\bar{t}} u^{(m)} \cdot (D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) = D_t (D_{\bar{t}} u^{(m)})^2$ であるから (6.3) 式の左辺第一項は次のようになる。

$$(6.4) \quad \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 - \|D_t u^{(0)}\|^2.$$

次に (5.5) 式より $(\partial D_t u^{(m)}, \partial v^{(m)}) + (D_t v^{(m)}, v^{(m)}) = 0$ であるから、

$$\sum_{m=1}^{k-1} (\partial v^{(m)}, \partial [D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}]) \Delta t \\ = - \sum_{m=1}^{k-1} (D_t v^{(m)} + D_{\bar{t}} v^{(m)}, v^{(m)}) \Delta t = -(v^{(k)}, v^{(k-1)}) + (v^{(0)}, v^{(1)}) \\ = -(v^{(k)}, v^{(k)}) + (v^{(0)}, v^{(0)}) + (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t + (v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t.$$

したがって (6.3) 式は次のように表わされる。

$$(6.5) \quad \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2 \\ = \|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2 + \sum_{m=1}^{k-1} (f^{(m)}, D_t u^{(m)} + D_{\bar{t}} u^{(m)}) \Delta t \\ + (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t + (v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t$$

$\alpha = 3$ で、(5.5)式及び補題6により

$$\begin{aligned} (v^{(k)}, D_{\bar{t}} v^{(k)}) \Delta t &= -(\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}, \partial v^{(k)}) \Delta t \\ &\leq \frac{\Delta t}{2} (\|\partial D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|\partial v^{(k)}\|^2) \\ &\leq \rho (\|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 + \|v^{(k)}\|^2). \end{aligned}$$

さらに $(v^{(0)}, D_t v^{(0)}) \Delta t$ についても同様の不等式が成立する。

これらを(6.5)へ代入して整理すれば(6.2)を得る。(証明)

補題 1.1 次の不等式が $2 \leq k \leq M$ に関して成立する。

$$\begin{aligned} (6.6) \quad & (1 - \rho) \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 \\ & \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{k-2} \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \|D_t u^{(0)}\|^2 + \bar{c} \|v^{(0)}\|^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 \right\} + \Delta t \|D_{\bar{t}} u^{(k)}\|^2 \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{c} = 1 + \rho$

証明 $k=2$ のときは補題10により

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2 &\leq (1 + \rho) (\|D_t u^{(0)}\|^2 + \|v^{(0)}\|^2) + \sum_1^M \Delta t \cdot \|f^{(m)}\|^2 \\ &\quad + \Delta t \cdot \|D_t u^{(0)}\|^2 + \Delta t \|D_{\bar{t}} u^{(2)}\|^2 \end{aligned}$$

であるから左しかに成立してゐる。 $2 \leq n \leq k$ なる n につ

いて補題が成立してあれば $n = k+1$ についても成立する

とこの事を示す。(6.6)で k を n で置き換えた式を整理すれば

$$\|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leq \frac{1}{1 - \rho - \Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{n-2} \left\{ \quad \right\}$$

であるから

$$\sum_{n=2}^k \Delta t \cdot \|D_{\bar{t}} u^{(n)}\|^2 \leq \sum_{n=2}^k \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t}{1 - \rho - \Delta t}\right)^{n-2} \left\{ \quad \right\}$$

$$(6.7) \quad = \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} - 1 \right] \left\{ \dots \right\}$$

一方、(6.2)式を整理して、少し補正すれば、

$$(1-\rho) \| D_{\bar{x}}^{(k+1)} u \|^2 \leq \bar{c} (\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2) + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \\ + \Delta t \cdot \| D_t u^{(0)} \|^2 + \sum_2^k \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(m)} \|^2 + \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(k+1)} \|^2$$

上式の右辺の4項へ(6.7)を代入すれば次の結果を得る。

$$(1-\rho) \| D_{\bar{x}}^{(k+1)} u \|^2 \leq (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \\ + \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(k+1)} \|^2 + \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} - 1 \right] \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 \right. \\ \left. + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right\} \\ = \left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{k-1} \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right. \\ \left. + \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(k+1)} \|^2 \right\}$$

したがって、 $n = k+1$ にも $(*)$ も成立する。(証明終)

系1. 次の不等式が成立する。

$$\sum_{n=2}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(n)} \|^2 \leq \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{M-1} - 1 \right] \left\{ (\bar{c} + \Delta t) \| D_t u^{(0)} \|^2 \right. \\ \left. + \bar{c} \| v^{(0)} \|^2 + \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2 \right\}$$

定理6の証明: ρ を固定すれば、

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{1-\rho-\Delta t} \right)^{M-1} < \left(\frac{1-\rho}{1-\rho-\Delta t} \right)^M \rightarrow e^{\frac{T}{1-\rho}} \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

したがって系1より

$$(6.8) \quad \sum_{n=1}^M \Delta t \cdot \| D_{\bar{x}} u^{(n)} \|^2 \leq \text{const}(T) (\| D_t u^{(0)} \|^2 + \| v^{(0)} \|^2) \\ + \text{const}(T) \sum_1^M \Delta t \cdot \| f^{(m)} \|^2$$

(6.2)式で $k = M$ とおいて(6.8)式を代入すれば(6.1)式を得る。

(証明終)

§7. 近似解の収束性

補題12. $\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ とする. $\alpha(x) \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$, $\beta(x) \in W_2^1(\Omega)$ が

$$(7.1) \quad (\partial\alpha, \partial\varphi) + (\beta, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}_2^1$$

$$(7.2) \quad (\partial\beta, \partial\varphi) + (\varepsilon, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}_2^1$$

をみたしてゐるとき、次の評価が成り立つ。

$$(7.3) \quad \|\alpha\|_1 \leq \text{const.} \|\beta\|, \quad \|\beta\| \leq \text{const.} \|\varepsilon\|$$

証明. (7.1) 式で $\varphi = \beta$, (7.2) 式で $\varphi = \alpha$ とおけば

$$(\partial\alpha, \partial\beta) + (\beta, \beta) = 0, \quad (\partial\beta, \partial\alpha) + (\varepsilon, \alpha) = 0$$

したがって、

$$(7.4) \quad (\beta, \beta) = -(\varepsilon, \alpha) \leq \|\varepsilon\| \cdot \|\alpha\|_1$$

一方 (7.1) で $\varphi = \alpha$ とおけば

$$(\partial\alpha, \partial\alpha) + (\beta, \alpha) = 0$$

したがって、 $\|\alpha\|_1^2 \leq \|\beta\| \cdot \|\alpha\|_1 \leq \text{const.} \|\beta\| \cdot \|\alpha\|_1$, すなわち、

$$(7.5) \quad \|\alpha\|_1 \leq \text{const.} \|\beta\|$$

(7.4) と (7.5) より $\|\beta\| \leq \text{const.} \|\varepsilon\|$ を得る。 (証明終)

以下議論の筋道を明白にするために (5.1) の方程式の右辺 $f = 0$ と仮定する。 n 次の仮定をおく。

仮定 : 問題 (5.1) ~ (5.2) は $\Omega \times [0, T]$ で十分滑らかな一意解を持つ。 したがって、方程式 (5.1) は $t = 0$ にあつても成立する。

さて、 u を問題の真の解としよう。 次の方程式より、

$\bar{u}_R^{(m)}, \bar{v}_R^{(m)}$ を定める。 ただし、これらはそれぞれ (5.4) の

$u_R^{(m)}, v_R^{(m)}$ と同じ型の関数である。

$$(2.6) \quad \begin{cases} (\partial \bar{u}_R^{(m)}, \partial \varphi) + (\bar{v}_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = 0 & p=1 \sim n \end{cases}$$

($m=0, 1, 2, \dots, M$)

補題 13. (2.6) で定められた $\bar{u}_R^{(m)}, \bar{v}_R^{(m)}$ には l 次の評価が成立する。ただし $l > 0$ は basis の次数に応じて定めると $l=3$ の定理 5 にあける近似解の収束のオーダーである。(h : 前出)

$$(2.7) \quad \| D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)} \|_1 = O(h^l) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

証明. 次の方程式の解 $(U^{(m)}, V^{(m)})$ と (w_2^0, w_2^1) ($1 \leq m \leq M-1$)

は一意的に存在する。

$$(2.8) \quad \begin{cases} (\partial U^{(m)}, \partial \varphi) + (V^{(m)}, \varphi) = 0 & \forall \varphi \in w_2^1 \\ -(\partial V^{(m)}, \partial \varphi) = -(\partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) \\ \quad + (\partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi) & \forall \varphi \in w_2^0 \end{cases}$$

一方、(2.8) の 2 番目の式の右辺の 2 項を除いた場合の (2.8) の解は明らかに $\bar{U}^{(m)} = \partial_{tt} u^{(m)}, \bar{V}^{(m)} = \Delta \partial_{tt} u^{(m)}$ である。

$l=3$ として $\| \partial_{tt} u^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)} \| = O(\Delta t^2)$ であるから補題 12 により

$$(2.9) \quad \| \partial_{tt} u^{(m)} - U^{(m)} \|_1 = O(\Delta t^2) \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

一方 (2.6) の両辺に $D_t D_{\bar{t}}$ を作用させると次式を得る。

$$(2.10) \quad \begin{cases} (\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) + (D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ -(\partial D_t D_{\bar{t}} \bar{v}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = -(D_t D_{\bar{t}} \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & p=1 \sim n \end{cases}$$

ただし、 $1 \leq m \leq M-1$ である。

(7.8) と (7.10) を比較すれば、Part (I) の結果が使えて、

$$(7.11) \quad \|U^{(m)} - D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)}\|_1 = O(h^{\nu}), \quad (1 \leq m \leq M-1)$$

(7.9) と (7.11) より (7.7) を得る。 (証明)

定理 7. $u, v = \Delta u$ を十分滑らかな真の解とする。安定条件の仮定のもとで $u_R^{(M)}$ は $u^{(M)}$ 、 $h \rightarrow 0$ のとき収束し次の評価が成立する。

$$(7.12) \quad \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1, \|v_R^{(M)} - v^{(M)}\| = O(h^{\nu})$$

証明. (7.6) の定義より、 $1 \leq m \leq M-1$ にたいして

$$(7.13) \quad \begin{cases} (\partial \bar{u}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\bar{v}_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & (p=1 \sim N) \\ (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \bar{v}_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = (D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)}, \varphi_p) & (p=1 \sim n) \end{cases}$$

ここで

$$(7.14) \quad \|E^{(m)}\|_1 \equiv \|D_t D_{\bar{t}} \bar{u}_R^{(m)} - \partial_{tt} u^{(m)}\|_1 = O(h^{\nu})$$

である。いま $\alpha_R^{(m)}, \beta_R^{(m)}$ を次のように定める。

$$\alpha_R^{(m)} = \bar{u}_R^{(m)} - u_R^{(m)}, \quad \beta_R^{(m)} = \bar{v}_R^{(m)} - v_R^{(m)}$$

(5.5) 及び (7.13) より、 $1 \leq m \leq M-1$ にたいして

$$(7.15) \quad \begin{cases} (\partial \alpha_R^{(m)}, \partial \varphi_p) + (\beta_R^{(m)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (D_t D_{\bar{t}} \alpha_R^{(m)}, \varphi_p) - (\partial \beta_R^{(m)}, \partial \varphi_p) = (E^{(m)}, \varphi_p) & p=1 \sim n \end{cases}$$

(i) $\|\beta_R^{(m)}\|$ の評価。

(7.6) にたいして "original problem" の真の解はあらかじめ $u^{(m)}, v^{(m)}$ である。Part (I) の結果を特に $m=0$ の場合に適用

すれば

$$(7.16) \quad \|v^{(0)} - \bar{v}_R^{(0)}\| = O(h^\nu).$$

一方 $u_R^{(0)}$ として $u^{(0)}$ の補間関数をとる事にすれば, 補題5, および補題7により.

$$(7.17) \quad \|v^{(0)} - v_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

したがって

$$(7.18) \quad \|\beta_R^{(0)}\| = \|\bar{v}_R^{(0)} - v_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

(ii) $\|D_t \alpha_R^{(0)}\|$ の評価.

(5.6) により $D_t u_R^{(0)} = P_R d_t u^{(0)}$ であるから P_R を Part (I) の補間作用素とすれば補題8により

$$(7.19) \quad \|D_t u_R^{(0)} - d_t u^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

と β の方程式

$$(7.20) \quad \begin{cases} (d D_t \bar{u}_R^{(0)}, \partial \varphi_p) + (D_t \bar{v}_R^{(0)}, \varphi_p) = 0 & p=1 \sim N \\ (D_t d_{tt} u^{(0)}, \partial \varphi_p) - (D_t \partial \bar{v}_0^{(0)}, \partial \varphi_p) = 0 & p=1 \sim n \end{cases}$$

の "original problem" の真の解は明らかに $D_t u^{(0)}, D_t v^{(0)}$ であるが, (7.20) の解は $D_t \bar{u}_R^{(0)}, D_t \bar{v}_R^{(0)}$ であるから, Part (E) より

$$(7.21) \quad \|D_t u^{(0)} - D_t \bar{u}_R^{(0)}\| = O(h^\nu)$$

この式と, (7.19) 式及 \bar{v} の安定条件より

$$(7.22) \quad \|D_t \alpha_R^{(0)}\| = \|D_t (\bar{u}_R^{(0)} - u_R^{(0)})\| = O(h^\nu)$$

よって (7.14), (7.15), (7.18), (7.22) 及 \bar{v} の定理6により, 安定条件の仮定のもとでは $\alpha_R^{(M)}, \beta_R^{(M)}$ は次の不等式を満たすとしう事

がわかる。

$$(7.23) \quad \|D_T \alpha_R^{(M)}\|^2 + \|\beta_R^{(M)}\|^2 \leq \text{const}(T) h^{2\nu}$$

これより容易に次の評価を得る。

$$(7.24) \quad \|\bar{u}_R^{(M)} - u_R^{(M)}\|, \|\bar{v}_R^{(M)} - v_R^{(M)}\| = O(h^\nu)$$

次に (7.6) で $m=M$ として Part (I) の結果を適用すれば

$$(7.25) \quad \|\bar{u}_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1, \|\bar{v}_R^{(M)} - v^{(M)}\|_1 = O(h^\nu)$$

したがってまず次の評価を得る。

$$(7.26) \quad \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|; \|\bar{v}_R^{(M)} - v^{(M)}\| = O(h^\nu).$$

最後に $\|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1 = O(h^\nu)$ を示す。まず次の等式が成立する事はあきらかである。

$$(\partial(u_R^{(M)} - u^{(M)}), \partial\varphi_p) + (v_R^{(M)} - v^{(M)}, \varphi_p) = 0 \quad p=1 \sim N$$

したがって、 $u_R^{(M)}$ と $u^{(M)}$ の補内関数とすれば、 $u - \dot{u}_R^{(M)} = \varepsilon_R$

とて

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial[u_R^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_R^{(M)} - \dot{u}_R^{(M)}]) + (v_R^{(M)} - v^{(M)}, u_R^{(M)} - \dot{u}_R^{(M)}) \\ &= (\partial[u_R^{(M)} - u^{(M)}], \partial[u_R^{(M)} - u^{(M)}]) + (\partial[u_R^{(M)} - u^{(M)}], \partial\varepsilon_R) \\ &\quad + (v_R^{(M)} - v^{(M)}, u_R^{(M)} - u^{(M)}) + (v_R^{(M)} - v^{(M)}, \varepsilon_R) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} (7.27) \quad \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1 &\leq \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \cdot \varepsilon + \|v_R^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\| \\ &\quad + \|v_R^{(M)} - v^{(M)}\| \cdot \varepsilon \\ &\leq [\varepsilon + \text{const} \cdot \|v_R^{(M)} - v^{(M)}\|] \cdot \|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1 \\ &\quad + \|v_R^{(M)} - v^{(M)}\| \end{aligned}$$

(7.26) を考慮してこの不等式を解けば

$$\|u_R^{(M)} - u^{(M)}\|_1 = O(h^2)$$

を得る。(証明終)

注意：補題6の定数 C' については、 α を三角形 Δ の3つの重線の最小の長さとするれば、区分的に1次の basis を使ったときの評価がでまる [3].

$$(7.28) \quad \frac{C'}{h} \leq \frac{\sqrt{48}}{\alpha}$$

注意：本稿では常に consistent mass タイプの近似と看做したが、

lumped mass タイプの近似に關してもほとんどの同様の議論が
 できる。詳しくは [8] を参照されたい。

文 献

1. Ritz, W., J. für Math., Bd. 135
2. Miyoshi, T., Kumamoto J. of Sci. Vol. 9 (1972)
3. Fujii, H., Tech. Rep., Univ. of Texas, CNA-34 (1971)
4. Ukai, S., C & A summer seminar report, Aug. (1971).
5. Zlámal, M., Numer. Math., 15 (1968)
6. Friedrichs, K.O. & Keller, H.B., Proceedings edited by Bramble (1966).
7. Smith, J., SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968)
8. Miyoshi, T., C & A, Vol. 4 No. 12 (1972).