数理解析研究所講究録
第149巻 1972年 191-207

3次方程式（Cardano 法）

東芝　加山 実生
東芝　平野 菅保

§1. 序

3次方程式を解く有名な公式Cardano 法（1545年）は、実際に使用して解を求めると、解の精度が著しく悪い場合がある。したがって、一般には、解の精度も良く、効率のよい解法としてNewton 法（繰り返し法）を用いている。しかし、「2次方程式の解法と同様に、よく説明に用いられている公式を変形することによって、解の精度を悪くしない公式が必ず求められるであろう。」という考えを従来持っていたので、今回、現在までに既知であるCardano 法の特徴をはっきりさせ、解の精度が3次方程式の係数の精度より当然得られる精度まで得られる公式を求めることにした。

§2. Cardano 法の計算手順

与えられる3次方程式を次の（2-1）式とする。

$$(2\text{-}1)\qquad a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

a_3, a_2, a_1, a_0 は複素係数.

(2-1′) $X^3+(a_2/a_3)X^2+(a_1/a_3)X+(a_0/a_3)=0$

$X=Y+\bar{X}$ とおく

(2-2) $Y^3+\{3\bar{X}+(a_2/a_3)\}Y^2+\{3\bar{X}^2+2(a_2/a_3)\bar{X}+(a_1/a_3)\}Y$
$+\{\bar{X}^3+(a_2/a_3)\bar{X}^2+(a_1/a_3)\bar{X}+(a_0/a_3)\}=0$

(2-2) 式の Y^2 の係数を零とする.

$3\bar{X}+(a_2/a_3)=0$

(2-3) $\bar{X}=-(a_2/3a_3)$

(2-2′) $Y^3+3pY+q=0$

(2-4) $p=\bar{X}^2+(2/3)(a_2/a_3)\bar{X}+(a_1/a_3)/3$
$=-(a_2/3a_3)^2+(a_1/3a_3)$

(2-5) $q=\bar{X}^3+(a_2/a_3)\bar{X}^2+(a_1/a_3)\bar{X}+(a_0/a_3)$
$=2(a_2/3a_3)^3-(a_1/a_3)(a_2/3a_3)+(a_0/a_3)$

$Y=u+v$ とおいて (2-2′) 式に代入する.

$(u+v)^3+3p(u+v)+q=0$

$u^3+3uv(u+v)+v^3+3p(u+v)+q=0$

$(u^3+v^3+q)+3(uv+p)(u+v)=0$

したがって, 次の (2-6) 式を満足する u, v が求められればよい。

(2-6) $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-p \end{cases}$ (2-6′) $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-p^3 \end{cases}$

次に、（2-7）式の解と係数の関係を求める。

（2-7）　$w^2+qw-p^3=0$

（2-8）　$\begin{cases} w_1=(-q+\sqrt{q^2+4p^3})/2 \\ w_2=(-q-\sqrt{q^2+4p^3})/2 \end{cases}$

（2-9）　$\begin{cases} w_1+w_2=-q \\ w_1w_2=-p^3 \end{cases}$

（2-6′）式と（2-9）式より、w_1，w_2 と u^3，v^3 の関係は次の（2-10）式になる。

（2-10）　$\begin{cases} u^3=w_1=(-q+\sqrt{q^2+4p^3})/2 \\ v^3=w_2=(-q-\sqrt{q^2+4p^3})/2 \end{cases}$

（2-11）　$\begin{cases} u_1=\sqrt[3]{(-q+\sqrt{q^2+4p^3})/2} \\ u_2=u_1\cdot\omega \\ u_3=u_1\cdot\omega^2 \end{cases}$

$\begin{cases} v_1=\sqrt[3]{(-q-\sqrt{q^2+4p^3})/2} \\ v_2=v_1\cdot\omega^2 \\ v_3=v_1\cdot\omega \end{cases}$

注　$\omega=-0.5+\sqrt{0.75}\,i$

又、（2-6）式の第2式より、次の（2-12）式がなりたつ。

（2-12）　$u_iv_i=-p$　　$i=1,2,3$

（2-12′）　$u_i=-p/v_i$　　$i=1,2,3$

したがって、Y_i，X_i（$i=1,2,3$）は（2-13），（2-14）式で表

わされる。

(2-13)　$Y_i = u_i + v_i = u_i - p/u_i = -p/v_i + v_i$　　$i=1, 2, 3$

(2-14)　$X_i = Y_i + \bar{X} = Y_i - (a_2/3a_3)$　　$i=1, 2, 3$

(2-14) 式により X_i を求める場合、(2-15) 式がなりたつと (2-16) 式がなりたつ。

(2-15)　$|X_i| \ll |\bar{X}| = |(a_2/3a_3)|$

(2-16)　$|Y_i| \fallingdotseq |\bar{X}| = |(a_2/3a_3)|$

すなわち、(2-14) 式で得られる解 X_i は (2-15) 式の関係がなりたつと、Y_i と $\bar{X}$ の加算により桁落ち現象が起り、有効桁数の減少、桁落ち誤差が大きく入る。この (2-14) 式での桁落ち誤差は (2-3) 式の $\bar{X}$ を (2-4)，(2-5) 式に代入して得られる (2-2′) 式の係数 p，q を用いて計算する限り、(2-6) 式から (2-13) 式までの計算式をどのように変形しても防ぐことができない。

2 次方程式についても同様なことがいえる。

(2-17)　$aX^2 + bX + c = 0$　　a，b，c は複素係数

(2-17′)　$X^2 + (b/a)X + (c/a) = 0$

$X = Y + \bar{X}$ とおく。

(2-18)　$Y^2 + \{2\bar{X} + (b/a)\}Y + \{\bar{X}^2 + (b/a)\bar{X} + (c/a)\} = 0$

(2-18) 式の Y の係数を零とする。

$$2\bar{X} + (b/a) = 0$$

(2-19) $\overline{X} = -(b/2a)$

(2-20) $Y^2 + R = 0$

(2-21) $R = \overline{X}^2 + (b/a)\overline{X} + (c/a)$

$= -(b/2a)^2 + (c/a) \quad [\doteq (-b^2 + 4ac)/4a^2]$

(2-22) $Y_1 = \sqrt{-R} \ [= \sqrt{b^2 - 4ac}/2a]$

$Y_2 = -\sqrt{-R} \ [= -\sqrt{b^2 - 4ac}/2a]$

(2-23) $X_i = Y_i + \overline{X} = Y_i - (b/2a) \qquad i = 1, 2$

(2-23)式より得られるX_iと(2-19)式より得られる$\overline{X}$との間に(2-24)式がなりたつと、(2-25)式がなりたつ。

(2-24) $|X_i| \ll |\overline{X}| = |b/2a|$

(2-25) $|Y_i| \doteq |\overline{X}| = |b/2a|$

すなわち、(2-24)式がなりたつ解X_iは(2-20)式の係数、(2-21)式のRを用いてY_iを計算している限り、(2-23)式で桁落ち誤差が入ってしまう。

ところで、(2-23)式で有効桁数が減少する場合には、どんな性質があるだろうか。

① (2-23)式で用いるY_1とY_2とは複素平面で考えると実数部、虚数部共に符号が反対であるから、解X_1, X_2は有効桁数の減少が同時に起ることはない。有効桁数が減少した解をX_2とすると、(2-26)式がなりたつ。

(2-26) $|X_2/X_1| \ll 1.0$

② 有効桁数の減少が起る場合は、(2-25)式〔3次方程式の場合は(2-16)式〕がなりたつときである。

①の$|X_1| \gg |X_2|$である場合、(2-17′)式の係数は次のように表わされる。

$$b/a = -(X_1+X_2) \fallingdotseq -X_1$$

$$c/a = X_1 \cdot X_2$$

$$X^2+(-X_1)X+X_1 \cdot X_2 = 0$$

(2-19), (2-21), (2-22)式は次のようになる。

$$\overline{X} = X_1/2$$

$$R = -X_1^2/4 + X_1 \cdot X_2 \fallingdotseq -X_1^2/4$$

$$Y_1 = X_1/2, \qquad Y_2 = -X_1/2$$

$\overline{X}$, R, Y_1, Y_2の中には絶対値の小さい解X_2は入っていない。次の(2-23)式を計算すると、解X_2には桁落ち誤差が大きく入る。 $X_1 = Y_1 + X_1/2 = X_1$

$$X_2 = Y_2 + X_1/2 = \varepsilon \qquad \varepsilon：零でなく誤差$$

次に、3次方程式(2-1′)式の解X_1, X_2, X_3と(2-3)式の$\overline{X}$との関係を考える。解と係数の関係より(2-27)式が得られる。

(2-27) $\overline{X} = -(a_2/3a_3) = (X_1+X_2+X_3)/3$

(2-27)式より、解X_1, X_2, X_3の絶対値が共に$\overline{X}$の絶対値より小さいことはありえない。したがって、$\overline{X}$の絶対値より絶

対値の小さい解は次の2通り考えられる。

① $\overline{X}$ の絶対値より絶対値の小さい解が1つあるとき

② $\overline{X}$ の絶対値より絶対値の小さい解が2つあるとき

まず①の場合を考える。条件は次の(2-28)式である。

(2-28) $|X_1| \geq |\overline{X}| \qquad |X_2| \geq |\overline{X}| \qquad |X_3| \ll |\overline{X}|$

解と(2-1′)式の係数との関係は

(2-29)
$$\begin{cases} a_2/a_3 = -(X_1+X_2+X_3) \fallingdotseq -(X_1+X_2) \\ a_1/a_3 = X_1 \cdot X_2 + X_2 \cdot X_3 + X_3 \cdot X_1 \fallingdotseq X_1 \cdot X_2 \\ a_0/a_3 = -X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \end{cases}$$

(2-3),(2-4),(2-5)式の $\overline{X}$,p,q は次のようになる。

$$\overline{X} = -(a_2/3a_3) = (X_1+X_2)/3$$

$$p = -(X_1+X_2)^2/3^2 + X_1 \cdot X_2/3$$

$$q = -2(X_1+X_2)^3/3^3 + X_1 \cdot X_2(X_1+X_2)/3 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

もし(2-30)式がなりたつとすると、q は(2-31)式となる

(2-30) $|X_1+X_2| \gg |X_3|$

(2-31) $q = -2(X_1+X_2)^3/3^3 + X_1 \cdot X_2 \cdot (X_1+X_2)/3$

したがって、$\overline{X}$,P,q の中には解 X_3 は入っておらず、この p,q,$\overline{X}$ より解 X_3 を求めると(2-14)式で桁落ち誤差が入る。

次に②の場合を考える。条件は次の(2-32)式である。

(2-32) $|X_1| \geq |\overline{X}| \qquad |X_2| \ll |\overline{X}| \qquad |X_3| \ll |\overline{X}|$

解と係数との関係は

$$(2\text{-}33)\quad \begin{cases} a_2/a_3 \fallingdotseq -X_1 \\ a_1/a_3 = X_1\cdot X_2 + X_2\cdot X_3 + X_3\cdot X_1 \fallingdotseq X_1(X_2+X_3) \\ a_0/a_3 = -X_1\cdot X_2\cdot X_3 \end{cases}$$

$$\overline{X} = X_1/3$$

$$p = -(X_1/3)^2 + X_1(X_2+X_3)/3 \fallingdotseq -(X_1/3)^2$$

$$q = -2(X_1/3)^3 + X_1^2(X_2+X_3)/3 - X_1\cdot X_2\cdot X_3 \fallingdotseq -2(X_1/3)^3$$

$\overline{X}$, P, q の中には絶対値最大の解 X_1 のみ残り、X_2, X_3 は消えてしまい、更に $X_2 \fallingdotseq X_3$ であるのに、次に示すように2重根の条件を満足してしまう。

$$q^2 + 4p^3 = 4(X_1/3)^6 - 4(X_1/3)^6 \fallingdotseq \varepsilon$$

ε：零でなく誤差

注　(2-11) 式で $q^2+4p^3=0$ であると

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-q/2}$$

$$Y_1 = 2\sqrt[3]{-q/2} \qquad Y_2 = Y_3 = \sqrt[3]{-q/2}\,(\omega+\omega^2) = -\sqrt[3]{-q/2}$$

これは「(2-1), (2-1′) 式では2重根でないのに、(2-2′) 式では2重根のようになっている。」ことを示す。

§3.　Cardano 法の修正計算手順

2次方程式 (2-17) 式の解のうち、絶対値の大きい解 X_1 には桁落ち誤差が入らないのであるから、絶対値の小さい解 X_2 は (2-23) 式を用いず、解と係数の関係式より、(3-1) 式

で求められる。

(3-1)　$X_2 = C/(aX_1)$

$X_1 = Y_1 - b/2a = (\sqrt{b^2-4aC} - b)/2a$

$X_2 = 2C/(\sqrt{b^2-4aC} - b)$

注　$b < 0.0$　　$b^2 \gg 4aC$

3次方程式の場合も(2-14)式で桁落ち誤差の入る解は、他の桁落ち誤差の入らぬ解を用いて求められないだろうか。①の場合は$\bar{X}$の絶対値より絶対値の小さい解が1つ、X_3のみであるから、(3-2)式のようにして桁落ち誤差の入らぬ解X_3が求められる。

(3-2)　$X_3 = -a_0/(a_3 \cdot X_1 \cdot X_2)$

しかし、②の場合は$\bar{X}$の絶対値より絶対値の小さい解がX_2, X_3と2つあるから、2つの解X_2, X_3に桁落ち誤差が入るので(3-2)式は使用できない。そこで、絶対値の一番大きい桁落ち誤差の入っていない解X_1を用いて、3次方程式(2-1)、(2-1′)式を$(X-X_1)$で除し、2次方程式にして解X_2, X_3を求める方法*①もある。2次方程式の係数の求め方は次の通りである。

$$(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0) = (X - X_1)(aX^2 + bX + C)$$

$$C = -a_0/X_1$$

$$b = -a_0/X_1^2 - a_1/X_1$$

$$a = -a_0/X_1^3 - a_1/X_1^2 - a_2/X_1 = a_3$$

$$\{X^3 + (a_2/a_3)X^2 + (a_1/a_3)X + (a_0/a_3)\}$$

$$= (X - X_1)\{X^2 + (b/a)X + (c/a)\}$$

$$c/a = -a_0/(a_3 \cdot X_1)$$

$$b/a = -a_0/(a_3 \cdot X_1^2) - a_1/(a_3 \cdot X_1)$$

$$1 = -a_0/(a_3 \cdot X_1^3) - a_1/(a_3 \cdot X_1^2) - a_2/(a_3 \cdot X_1)$$

*① 数理解析研究所講究録 72　　1969年5月

「数値解析の基礎理論研究会報告集」

②の場合、(2-3)式で決定される$\bar{X}$の絶対値、すなわちXよりYへの座標変換で採用する$\bar{X}$の絶対値を①のようにできないか。(2-2)式でY^2の係数の代りに、Yの係数が零になるように、$\bar{X}$を決定してみる。

$$3\bar{X}^2 + 2(a_2/a_3)\bar{X} + (a_1/a_3) = 0$$

次の2つの解のうち、絶対値の小さい解を採用する。

(3-3)　$\bar{X} = (a_1/a_3)/\left\{-(a_2/a_3) \mp \sqrt{(a_2/a_3)^2 - 3(a_1/a_3)}\right\}$

(2-32)式の条件を用いて$\bar{X}$を表わすと(3-4)式になる。

(3-4)　$\bar{X} = X_1(X_2+X_3)/(2 \cdot X_1) = (X_2+X_3)/2$

注　$|(a_2/a_3)^2| \gg |3(a_1/a_3)|$

(3-4)式の$\bar{X}$を(2-2)式に代入する。

(3-5)　$Y^3 + SY^2 + T = 0$

(3-6)　$S = (3/2)(X_2+X_3) - X_1 \fallingdotseq -X_1$

(3-7)　$T=(X_2+X_3)^3/2^3-X_1\cdot(X_2+X_3)^2/2^2+X_1\cdot(X_2+X_3)^2/2-X_1\cdot X_2\cdot X_3$

$\fallingdotseq X_1\cdot(X_2+X_3)^2/2^2-X_1\cdot X_2\cdot X_3$

(3-4)式の$\bar{X}$および(3-5)式の係数である(3-7)式のTには、絶対値の小さい解X_2, X_3が入っているから、次の(3-8)式を満足していれば、(3-5)式よりY_1, Y_2, Y_3を求め、(3-4)式の$\bar{X}$を用いて、(3-9)式によって解X_1, X_2, X_3が求められる。

(3-8)　$|X_2|\fallingdotseq|X_3|$

(3-9)　$X_i=Y_i+\bar{X}$　　　$i=1,2,3$

(3-8)式が満足されず、(3-10)式を満足している場合、(3-4)、(3-7)式の$\bar{X}$, Tは(3-11)、(3-12)式で表わされる。

(3-10)　$|X_2|\gg|X_3|$

(3-11)　$\bar{X}=X_2/2$

(3-12)　$T\fallingdotseq X_1\cdot X_2^2/2^2$

すなわち(3-10)式を満足しているときは、(3-11)、(3-6)、(3-12)式の$\bar{X}$, S, Tの中には解X_3は入っていない。したがって、(3-5)式より得られるY_1, Y_2, Y_3を(3-9)式に代入して解X_1, X_2, X_3を求めると、$Y_3+\bar{X}$の計算で桁落ち誤差が大きく入り、解X_3の精度を悪くする。しかし、解X_1, X_2には桁落ち誤差が入らないので、解X_3は(3-2)式を用

いて得られる。

以上のことより、XよりYへ座標変換をする場合、(2-2)式でYの1次の係数が零になるように$\bar{X}$を決定すれば、(絶対値の小さい解を採用する。)いかなる場合でも、座標をYよりXへ逆変換するときに、2つの解には桁落ち誤差が入らない。

座標変換による桁落ち誤差のほかに、桁落ち誤差を注意すべき計算式は(2-10),(2-13)式である。まず、(2-10)式で桁落ち誤差が入るのは、次の(3-13)式を満足するときである。

(3-13) $|q^2| \gg |4p^3|$

(3-13)式がなりたつと、(2-10)式は(3-14)式になる。

(3-14) $u^3 \fallingdotseq (-q+q)/2 = \varepsilon$ 　　ε:誤差のみ

$v^3 \fallingdotseq (-q-q)/2 = -q$

したがって、u^3は誤差のみになる。そこで、uは(2-12)式にvを代入して求める。

(2-13)式で桁落ち誤差が入るのは、次の(3-15)式を満足するときである。

(3-15) $|q^2| \ll |4p^3|$

(3-15)式がなりたつと、(2-10),(2-11)式は(3-16),(3-17)式になる。

(3-16) $u^3=\sqrt{P^3}$ $v^3=-\sqrt{P^3}$

(3-17) $u_1=\sqrt{P}$ $v_1=-\sqrt{P}$

$u_2=\sqrt{P}\ \omega$ $v_2=-\sqrt{P}\ \omega^2$

$u_3=\sqrt{P}\ \omega^2$ $v_3=-\sqrt{P}\ \omega$

したがつて、(2-13)式によりYを求めるとき、u_1とv_1の加算で桁落ち誤差が入る。*② そこで、(2-13)式を変形する。

(3-18) $Y_1=u_1+v_1=(u_1+v_1)(u_1^2-u_1v_1+v_1^2)/(u_1^2-u_1v_1+v_1^2)$

$=(u_1^3+v_1^3)/(u_1^2+p+v_1^2)$

(3-18)式の分母は次式でも表わされるので、(3-18)式は(3-19)式になる。

$Y_2\cdot Y_3=(u_1\omega+v_1\omega^2)(u_1\omega^2+v_1\omega)$

$=u_1^2+u_1\cdot v_1(\omega^2+\omega^4)+v_1^2$

$=u_1^2-u_1\cdot v_1+v_1^2=u_1^2+p+v_1^2$

(3-19) $Y_1=(u_1^3+v_1^3)/(Y_2\cdot Y_3)=-q/(Y_2\cdot Y_3)$

注 $\omega^2=-0.5-\sqrt{0.75}\ i$

$\omega^4=-0.5+\sqrt{0.75}\ i$

*② u_2+v_2, u_3+v_3 には桁落ち誤差か入らない。§4.参照

§4. 修正Cardano法の計算手順

(4-1) $a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0=0$

(4-1′) $X^3+C_2X^2+C_1X+C_0=0$

注 $C_2=a_2/a_3$, $C_1=a_1/a_3$, $C_0=a_0/a_3$

$X=Y+\bar{X}$ とおく.

(4-2) $Y^3+(3\bar{X}+C_2)Y^2+(3\bar{X}^2+2C_2\bar{X}+C_1)Y$
$+(\bar{X}^3+C_2\bar{X}^2+C_1\bar{X}+C_0)=0$

(4-2) 式の Y の係数を零とする。

$$3\bar{X}^2+2C_2\bar{X}+C_1=0$$

2つの解のうち. 絶対値の小さい解を $\bar{X}$ とする。

$|-C_2+\sqrt{C_2^2-3C_1}| \geqq |-C_2-\sqrt{C_2^2-3C_1}|$ ならば

(4-3) $\bar{X}=C_1/(-C_2+\sqrt{C_2^2-3C_1})$

$|-C_2+\sqrt{C_2^2-3C_1}| < |-C_2-\sqrt{C_2^2-3C_1}|$ ならば

(4-3′) $\bar{X}=C_1/(-C_2-\sqrt{C_2^2-3C_1})$

(4-2′) $Y^3+kY^2+l=0$

$$k=3\bar{X}+C_2$$

$$l=\bar{X}^3+C_2\bar{X}^2+C_1\bar{X}+C_0$$

$Z=1/Y$ なる変換をする。

(4-4) $q+3pZ+Z^3=0$

$$p=k/(3l)$$

$$q=1/l$$

$|-q+\sqrt{q^2+4p^3}| \geqq |-q-\sqrt{q^2+4p^3}|$ ならば

(4-5) $u_1=\sqrt[3]{(-q+\sqrt{q^2+4p^3})/2}$

$|-q+\sqrt{q^2+4p^3}| < |-q-\sqrt{q^2+4p^3}|$ ならば

(4-5′) $u_1=\sqrt[3]{(-q-\sqrt{q^2+4p^3})/2}$

$$(4\text{-}6)\quad \begin{cases} Z_1 = u_1 - P/u_1 \\ Z_2 = u_1 \cdot \omega - P/(u_1 \cdot \omega) \\ Z_3 = u_1 \cdot \omega^2 - P/(u_1 \cdot \omega^2) \end{cases}$$

解Z_1，Z_2，Z_3の中で．絶対値の一番小さい解はそれ以外の２つの解を用いて求める。例えば．もし解Z_1の絶対値が他の解Z_2，Z_3の絶対値より小さければ（4−7）式で解Z_1を求める。

$$(4\text{-}7)\quad Z_1 = -q/(Z_2 \cdot Z_3)$$

（4−6）式の加算で桁落ち．すなわち．有効桁数の減少が起り．解Z_1に桁落ち誤差が入ったとすると．（4−8）式がなりたつ。

$$(4\text{-}8)\quad u_1 \fallingdotseq P/u_1$$

（4−8）式の条件を（4−6）式の第２，第３式に代入する。

$$(4\text{-}9)\quad \begin{cases} Z_2 = u_1 \cdot \omega - u_1/\omega = u_1(\omega - \omega^2) \\ Z_3 = u_1 \cdot \omega^2 - u_1/\omega^2 = u_1(\omega^2 - \omega) \end{cases}$$

注　$\omega - \omega^2 = 2\sqrt{0.75}\ i$

すなわち．（4−9）式よりわかるように．解Z_2，Z_3を（4−6）式を用いて求めるときには桁落ちが起らない。したがって．（4−6）式より解Z_1，Z_2，Z_3を求めるとき．桁落ちが起るのはどれか１つの解のみである。

次いで．（4−1）式の解は（4−10）式で求められる。

$$(4\text{-}10)\quad X_i = \overline{X} + 1/Z_i \qquad i = 1, 2, 3$$

ここで、X_i, Y_i, Z_iの大小関係を調べてみる。3つの解X_1, X_2, X_3を最も求めにくい条件は次の(4-11)式で表わされる

(4-11) $|X_1| \gg |X_2| \gg |X_3|$

(3-11)式より、Y_iの値は、

(4-12)
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - \overline{X} \fallingdotseq X_1 - X_2/2 \fallingdotseq X_1 \\ Y_2 = X_2 - \overline{X} \fallingdotseq X_2 - X_2/2 = X_2/2 \\ Y_3 = X_3 - \overline{X} \fallingdotseq X_3 - X_2/2 = -X_2/2 \end{cases}$$

(4-13) $|Y_1| \gg |Y_2| \fallingdotseq |Y_3|$

(4-14)
$$\begin{cases} Z_1 = 1/Y_1 = 1/X_1 \\ Z_2 = 1/Y_2 = 2/X_2 \\ Z_3 = 1/Y_3 = -2/X_2 \end{cases}$$

(4-15) $|Z_1| \ll |Z_2| \fallingdotseq |Z_3|$

(4-6)式の第1項および第2項は、第1，第2，第3式共にその絶対値が(4-16)式のように等しい。

(4-16) $|u_1| = |u_1 \cdot \omega| = |u_1 \cdot \omega^2|$

$$|-P/u_1| = |-P/(u_1 \cdot \omega)| = |-P/(u_1 \cdot \omega^2)|$$

したがって、(4-6)式で桁落ちしないZ 2つは絶対値がほぼ等しく、(4-15)式のZ_2とZ_3にあたる。又桁落ちして絶対値が小さくなるZは(4-15)式のZ_1にあたる。

Z座標よりX座標へ変換すると、

(4-17) $X_1 = \overline{X} + 1/Z_1 = X_2/2 + X_1 \fallingdotseq X_1$

$$X_2 = \bar{X} + 1/Z_2 = X_2/2 + X_2/2 = X_2$$

$$X_3 = \bar{X} + 1/Z_3 = X_2/2 - X_2/2 \fallingdotseq \varepsilon$$

ε：零でなく誤差

解X_1，X_2，X_3の中で、絶対値が一番小さい解はそれ以外の２つの解を用いて求める。例えば、解X_3はX_1，X_2を用いて、（4-18）式で求める。

$$(4\text{-}18) \quad X_3 = -C_0/(X_1 \cdot X_2) = -a_0/(a_3 \cdot X_1 \cdot X_2)$$