

Germ field を知ったときの Predictor Operator

阪大 理 岡 部 立 清 憲

§1. 序

Levinson-McKean [1] において、マルコフ性をもつ、正規定常過程のスペクトル密度による特徴付けがなされたことは、すでに、いくつかの数理解析シンポジウム([2]) において紹介したので、今回は、前半において、Dym-McKean [3], Dym [4] の紹介をし、後半において、Okabe [5] の一部の紹介をする。Prediction の観点からいうと、Dym-McKean において、“有限時間を知ったときの prediction” は “無限小時間 (germ field) を知ったときの prediction” に帰着され、

Okabe において、ある条件をみたす場合には、“germ field を知ったときの predictor operator” を導入することによって、上記の問題をとく。Inverse problem の観点からいうと、Dym-McKean において、スペクトル密度から、 $(0, \infty)$ 上の正の二つの測度 Q_+ , Q_- と、指数型の整函数の作る二つの系 $\{A_t(z); t \geq 0\}$, $\{B_t(z); t \geq 0\}$ を見つけ出し、これらの間に、

$$(1.1) \quad \begin{cases} D_t^- A_t(z) = -z B_t(z) \\ D_t^+ B_t(z) = z A_t(z) \end{cases}$$

(1.2) A_0, B_0 : minimal exponential type

の関係があることを示してゐる。また、(1.1)における D_t^-, D_t^+ は、それぞれ、測度 Q^-, Q^+ に関する微分である。

逆に、 D_{ym} において、 Q^-, Q^+ を先に与え、ある条件をみたす $A_0(z), B_0(z)$ も同時に与えたとき、spectral function を見つけ出してゐる。ただ、[3]における spectral 空度は L^1 の元であるが、[4]において、見つけ出した spectral function は $L^1(\mathbb{R}; \frac{1}{1+t^2})$ の元であることに注意しておく。

[3], [4]における新たな道は、de Branges space である。これは、整函数のつくる空間に再生核をもつ Hilbert 空間である。この空間の基本的な性質を用いて、 \cosine , $(\cos t z)$ の一般化として、 $A_t(z), B_t(z)$ を考え、Fourier $(\sin t z)$ 変換の一般化として、eigendifferential 変換を導入して、"有限時間を知ったときの prediction" を求める公式を得てゐる。しかし、初めに述べた様に、"germ field"を知ったときの prediction" を求める公式に帰着されただけである。彼らの研究において、新たに起った問題として、 Q^+, Q^- という測度の確率論的意味付けを与えることは、興味がある。一次元拡散過程の $dm, d\sigma$ の様に。ただ、マルコフ性をもつ正規定常過程の場合は、 Q^+, Q^- は夫々、Lebesgue 測度の定

数倍に存することを注意しておく。

ここで紹介した木の [5] の一部は、初めに述べた様に、
 "germ field を知ったときの predictor" を求める公式を与え
 ところである。それを求めるには、厚実で実解析的有函
 数の作る空間の汎函数が不可避に登場するので、*hyperfunc-*
tion の有効性の一端が示される。

なお、この公式の応用として、有限重マルコフ性
 をもつ場合には、表現核の興味ある性質が導け、又、無限
 重マルコフ性をもつ場合には、ある条件の下で、その正規定
 常過程を特徴付ける量として、無限次元拡散過程の生成作
 用素が見つけ出される。詳しいことは [5] を見ていただ
 きたい。

§2. Fourier 変換、Paley-Wiener の定理の de Branges space による表現

各 $t > 0$ に対して、 $E_t \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ を、

$$(2.1) \quad E_t(z) = e^{-iz^2}$$

によって定義すると、明らかに、

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |E_t| > |E_t^*| \text{ on } \mathbb{C}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}, \\ E_t^* = E_t(-\bar{\cdot}), \\ E_t(0) = 1, \\ E_t \text{ root-free on } \mathbb{C}^+ \cup i\mathbb{R} \end{array} \right.$$

が成り立つ。但し、 \mathbb{C} 上の函数 f に対して、 $f^\#$ は、 $f^\#(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$ により定義される。

次に、de Branges space の一例である $B(E_t)$ を、

$$(2.3) \quad B(E_t) = \left\{ \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}); \quad \|\varphi\|_{E_t}^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\varphi}{E_t} \right|^2 < \infty, \right.$$

$$\left. |\varphi_0(z)|^2 \leq \|\varphi\|_{E_t}^2 \frac{|E_t(z)|^2 - |E_t^\#(z)|^2}{4\pi y}, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \right\}$$

で定義するとき、(2.2) により、 $B(E_t)$ は次の性質をもつ；

(2.4) $B(E_t)$ は再生核をもつ Hilbert space

$$(2.5) \quad B(E_t) = \{ f; f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ spt } f \subset [-t, t] \}.$$

(2.5) が、 L^2 に関する Paley-Wiener の定理をいい表わしている。又、(2.5) により、次も成り立つ；

$$(2.6) \quad B(E_s) \underset{\text{(isometrically)}}{\subset} B(E_t) \underset{(\text{"})}{\subset} L^2(\mathbb{R}), \quad s < t,$$

$$(2.7) \quad \bigcup_{t>0} B(E_t) \text{ dense in } L^2(\mathbb{R}).$$

次に、 A_t, B_t を、

$$(2.8) \quad \begin{cases} A_t \equiv 2^{-1}(E_t + E_t^\#) = \cos tZ \\ B_t \equiv (2i)^{-1}(E_t^\# - E_t) = \sin tZ \end{cases}$$

で定義し、 $(0, \infty)$ 上の測度 Q^+, Q^- を

$$(2.9) \quad dQ^+ = dQ^- = dt$$

で定義する。

L^2 を $L^2 = (L^2)_{\text{even}} \oplus (L^2)_{\text{odd}}$ と分解し、
 L^2 上の Fourier 変換を $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \oplus \mathcal{F}_o$ と分解する、
 即ち、

$$(2.10) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_e f = (\widehat{f})_{\text{even}} & \text{for } f \in (L^2)_{\text{even}}, \\ \mathcal{F}_o f = (\widehat{f})_{\text{odd}} & \text{for } f \in (L^2)_{\text{odd}}. \end{cases}$$

このとき、次の二つが成り立つ;

(2.11) $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_o$ は、それぞれ $(L^2)_{\text{even}}, (L^2)_{\text{odd}}$ から、
 $L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^+), L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^-)$ 上への bijection である。

$$(2.12) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_e f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n A_n(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \\ \mathcal{F}_o f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n B_n(\lambda) f(\lambda) d\lambda \end{cases}$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_n(\lambda) \mathcal{F}_e f(\xi) d\mathbb{Q}^+(\xi), & f \in (L^2)_{\text{even}}, \\ f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) \mathcal{F}_o f(\xi) d\mathbb{Q}^-(\xi), & f \in (L^2)_{\text{odd}} \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \|\mathcal{F}_e f\|_{\mathbb{Q}^+} = \sqrt{\pi} \|f\|_{L^2}, \\ \|\mathcal{F}_o f\|_{\mathbb{Q}^-} = \sqrt{\pi} \|f\|_{L^2}. \end{cases}$$

また、Paley-Wiener の定理 (2.5) は次の二つを意味している;

(2.15) $f \in (L^2)_{\text{even}}, g \in (L^2)_{\text{odd}}$ のそれぞれ $\mathcal{B}(E_{\pm})$ への projection は、
 $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_n(\lambda) \mathcal{F}_e f(\xi) d\mathbb{Q}^+(\xi), \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) \mathcal{F}_o g(\xi) d\mathbb{Q}^-(\xi)$
 と与えられる。

さすに又、(2.8), (2.9) より、

$$(2.10) \quad \begin{cases} D_t^- A_t^{(z)} = -z B_t^{(z)} \\ D_t^+ B_t^{(z)} = z A_t^{(z)} \end{cases}$$

$$(2.11) \quad A_0 = 1, \quad B_0 = 0$$

が成り立つ。

$L^2(\mathbb{R})$ は、定数係数 $1 \in \text{weight}$ に L^2 -space とみれることに注意して、Dym-McKean, Dym の研究は、次の (*) を満たす $\Delta \in \text{weight}$ に L^2 -space を考え、 A_t, B_t, Q_0^+, Q_0^- に相当する量を取り出し、上記したごとく、(2.3), (2.4), (2.6), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.10)、を解いていくと解が得られることがわかる。

$$(*) \quad \Delta: \geq 0, \text{ even}, \in L^1, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\log \Delta}{1+t^2} > -\infty$$

以下に詳しくみる。

§3. Dym-McKean の研究.

(*) を満たす Δ が与えられたとする。 $\mathbb{Z}_\Delta \in L^2(\mathbb{R}; \Delta)$, $\mathbb{Z}_\Delta^t (t \geq 0)$ を、

$$(3.1) \quad \mathbb{Z}_\Delta^t = \bigcap_{\varepsilon > 0} [e^{\varepsilon s}; |s| \leq t + \varepsilon],$$

と定義する。

次に、 Δ の outer function $h(z) (z \in \mathbb{C}^+)$ を、

$$(3.2) \quad h(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z} \frac{\log \Delta(t)}{1+t^2} dt\right\} \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

と定義するとき、 $h(z)$ は、

$$(3.3) \quad \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2 dx < \infty$$

をみたす $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ の元であるので、Hille-Tamarkin の定理 (Paley-Wiener の定理) によつて、 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h(x+i\varepsilon) \equiv h(x)$ が存在して、

$$(3.4) \quad |h(t)|^2 = \Delta(t), \quad \overline{h(t)} = h(-t)$$

が成り立つ。

次に、weight Δ^+ を $\Delta^+ = \frac{\Delta}{\pi(1+t^2)}$

によつて導入する。そして、各 $t \geq 0$ に対し、

$$e_t \in \mathbb{Z}_{\Delta^+}^t \text{ を}$$

$$(3.5) \quad e_t = \left(P_{\mathbb{Z}_{\Delta^+}^t} \frac{1}{e^{it \cdot} h} \right) / \left\| P_{\mathbb{Z}_{\Delta^+}^t} \frac{1}{e^{it \cdot} h} \right\|_{\Delta^+}$$

によつて定義する。このとき、

$$(3.6) \quad e_t(0) \in \mathbb{R} - \{0\}$$

をみたすことに注意して、 $E_t \in \mathbb{Z}_{\Delta^+}^t$ を、

$$(3.7) \quad E_t = (2e_t(0))^{-1} (e_t + e_t^*) + 2^{-1} e_t(0) (e_t - e_t^*)$$

によって定義すると、 E_t は次の性質をもつ；

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} E_t \text{ は entire function である,} \\ |E_t| > |E_t^\#| \text{ on } \mathbb{C}^+, \\ E_t^\# = E_t(-\cdot), \\ E_t(0) = 1, \\ E_t \text{ root-free on } \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}, \\ E_t \text{ は 正確に、指数型は } t \text{ である,} \\ E_t^{-1} \in L^2 \quad (t \geq 0) \end{array} \right.$$

この E_t を用いて、 $A_t, B_t \in \mathbb{Z}_{\Delta^+}^t$

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} A_t = 2^{-1} (E_t + E_t^\#) \\ B_t = (2i)^{-1} (E_t^\# - E_t) \end{array} \right.$$

と定義する。

これは、(2.2), (2.8) に対応している。

この E_t を用いて、(2.3) によつて、 $B_t \equiv \mathcal{B}(E_t)$ を構成すると、

$$(310) \quad \mathcal{B}_t = \mathbb{Z}_{\Delta}^t$$

が成り立つ。

次に、測度 Q^+, Q^- を導入するために、次の仮定を設ける；

$$\boxed{\text{仮定}}: \mathbb{Z}_\Delta^t = [e^{z\Delta}; |s| \leq t] \quad (t > 0)$$

この仮定は、 Δ が rational function のとき、あるいは、minimal exponential type の entire function の逆数 のときには成り立つ。この仮定の下で、 Δ^+ についても同じ事がいえることを注意しておく。

このとき、 $(0, \infty)$ 上の正の測度 Q^+, Q^- を

$$(3.11) \quad \begin{cases} Q^+((s, t]) = \pi^{-1} \| \gamma^{-1}(A_t(r) - A_s(r)) \|_{\Delta}^2, \\ Q^-((s, t]) = \pi^{-1} \| \gamma^{-1}(B_t(r) - B_s(r)) \|_{\Delta}^2, \quad 0 \leq s < t \end{cases}$$

によって定義する。(3.9) で定義された A_t, B_t は次の方程式を満たす;

$$(3.12) \quad \begin{cases} D_+^- A_t^{(z)} = -z B_t(z) \\ D_+^+ B_t^{(z)} = z A_t(z) \end{cases}$$

これは (2.10) に対応している。

(2.6), (2.7) と異なり、今度の B_t に対しては、

$$(3.13) \quad B_{0s} \subset B_{0t} \subset \mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0, \quad s < t$$

(isometrically) (*)

$$(3.14) \quad \bigcup_{t>0} B_t \text{ dense in } \mathbb{Z}_\Delta / \mathbb{Z}_\Delta^0$$

が成り立つことを注意しておく。即ち、今度のときは $L^2(\mathbb{R})$ の代わりに、 \mathbb{Z}_Δ をとることをおぼえて、商空間

$\mathbb{Z}_\Delta/\mathbb{Z}_\Delta^0$ をとるわけにはいかない。このことが、序文でも述べた様に、“ \mathbb{Z}_Δ^0 を知ったときの prediction” を求める公式が Dyn-McKean [3] では 求まっていらないことに反映する。もちろん、 \mathbb{Z}_Δ^0 の再生核は存在するが、その explicit 形式が分らないのでは意味がないのである。

今迄の準備によつて、Fourier 変換の一般化にあたるものとして、eigendifferential 変換を導入する。

(2.10), (2.12) に 対応して、 $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_o$ を次の様に定義する；

$$(3.15) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_e : \left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{even}} \longrightarrow L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^+) \\ \downarrow \\ f \longrightarrow \text{l.c.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n A_\pm(r) f(r) \Delta(r) dr \\ \mathcal{F}_o : \left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{odd}} \longrightarrow L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^-) \\ \downarrow \\ f \longrightarrow \text{l.c.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n B_\pm(r) f(r) \Delta(r) dr \end{array} \right.$$

このとき、次のことが成り立つ；

(3.16) $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_o$ は、それぞれ、 $\left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{even}}, \left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{odd}}$ から、 $L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^+), L^2((0, \infty); \mathbb{Q}^-)$ 上への bijective であり、

$$(3.17) \left\{ \begin{array}{l} f(\lambda) = \pi^{-1} \int_0^\infty A_\pm(r) \mathcal{F}_e f(t) d\mathbb{Q}^+(t), \quad f \in \left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{even}} \\ f(\lambda) = \pi^{-1} \int_0^\infty B_\pm(r) \mathcal{F}_o f(t) d\mathbb{Q}^-(t), \quad f \in \left(\frac{\mathbb{Z}_\Delta}{\mathbb{Z}_\Delta^0} \right)_{\text{odd}} \end{array} \right.$$

$$(3.18) \quad \begin{cases} \|F_e f\|_{Q^+} = \sqrt{\pi} \|f\|_{\Delta}, \\ \|F_0 f\|_{Q^-} = \sqrt{\pi} \|f\|_{\Delta}. \end{cases}$$

(3.16), (3.17), (3.18) は、それぞれ (2.11), (2.13), (2.14) に対応している。さらに、(2.15) に対応するものとして、次の (3.19) が成り立つ;

$$(3.19) \quad f \in \left(\frac{\mathbb{Z}_{\Delta}}{\mathbb{Z}_{\Delta}^0} \right)_{\text{even}}, \quad g \in \left(\frac{\mathbb{Z}_{\Delta}}{\mathbb{Z}_{\Delta}^0} \right)_{\text{odd}}$$

B_t の projection は、それぞれ、 $\pi^{-1} \int_0^t A_s(\omega) F_e f(s) dQ^+(s)$,
 $\pi^{-1} \int_0^t B_s(\omega) F_0 g(s) dQ(s)$ で与えられる。

2 の F_e, F_0 が eigendifferential 変換と呼ばれる。各前の由来は、おぼろしく、(3.12) による。

$$(3.20) \quad \begin{cases} D^+ D^- A_t = -z^2 A_t(z) \\ D^- D^+ B_t = -z^2 B_t(z) \end{cases}$$

が成り立つので、 $D^+ D^-$, $D^- D^+$ の eigenfunction とある $A_t(z)$, $B_t(z)$ を用いて、(3.15) において、 F_e, F_0 が定義されたことになると思われる。

今迄の結果を用いて、prediction の問題を考察する。通常の prediction は、

$$(3.21) \quad \int_{\mathbb{Z}_{\Delta}^-} e^{z\lambda} \quad (t > 0) \quad \text{を求めると、}$$

即ち 過支 ($\mathbb{Z}_\Delta^- = [e^{rt}; t < 0]$) 全部を知ったときの prediction であるが、ここでは、過支の一部を知ったときの prediction を考える。これは、 $\mathbb{Z}_\Delta^{(-T, 0)}$ を

$$(3.22) \quad \mathbb{Z}_\Delta^{(-T, 0)} = [e^{rt}; -T < t < 0] \quad (T > 0)$$

によって定義するとき、問題は、

$$(3.23) \quad P_{\mathbb{Z}_\Delta^{(-T, 0)}} e^{rt} \quad (t > 0) \quad \text{を求めよ}$$

といえる。

$$P_{\mathbb{Z}_\Delta^{(-T, 0)}} e^{rt} = e^{-rT} \cdot P_{\mathbb{Z}_\Delta^T} e^{r(t+T)}$$

であるから、任意の $t > 0, T > 0$ に対して、 $P_{\mathbb{Z}_\Delta^T} e^{r(t+T)}$

を求めれば充分である。実は、任意の $f \in \mathbb{Z}_\Delta$ に対して、次の2つが成り立つ；

$$(3.24) \quad P_{\mathbb{Z}_\Delta^T} f = P_{\mathbb{Z}_\Delta^0} f + \\ + \pi^{-1} \int_0^T A_+(t) \left(\int_{\mathbb{R}} A_+(r) f(r) \Delta(r) dr \right) dQ^+(t) + \\ + \pi^{-1} \int_0^T B_-(t) \left(\int_{\mathbb{R}} B_-(r) f(r) \Delta(r) dY \right) dQ^-(t)$$

この (3.24) から同様に、 $P_{\mathbb{Z}_\Delta^+}$ を求めることは $P_{\mathbb{Z}_\Delta^0}$ を求めることに帰着された。Dyn-McKean [3] では、このことはできている。しかし、 $P_{\mathbb{Z}_\Delta^0}$ が求まるまで、predictor error の explicit 表現と 関係する関係式が成り立つ。これを説明する。Predictor error ε .

$$(3.25) \begin{cases} D^+(a, b) = \| f_{\text{even}} - P_{\mathbb{Z}_\Delta^+} f_{\text{even}} \|_\Delta^2, \\ D^-(a, b) = \| f_{\text{odd}} - P_{\mathbb{Z}_\Delta^0} f_{\text{odd}} \|_\Delta^2, \\ D^\bullet(a, b) = D^+(a, b) + D^-(a, b), \quad 0 < a < b, \end{cases}$$

を定義する。但し、 ε は f は $f = e^{i\cdot}$ とする。

このとき、(3.14), (3.17), (3.18), (3.19) によつて、次の関係式が成り立つ；

$$(3.26) \begin{cases} D^+(a, b) = \pi^{-1} \int_a^b \mathcal{F}_e f(t)^2 dQ^+(t), \\ D^-(a, b) = \pi^{-1} \int_a^b \mathcal{F}_o f(t)^2 dQ^-(t) \end{cases}$$

すなわち、 D^+ , D^- , D^\bullet の間には、次の関係式が成り立つ；
 $\int \gamma^b \Delta < \infty$ ならば、

$$(3.27) \quad \frac{\partial^2 D^+(a, b)}{\partial Q^-(a) \partial Q^+(a)} + \frac{\partial^2 D^-(a, b)}{\partial Q^+(a) \partial Q^-(a)} = \frac{\partial^2 D(a, b)}{\partial \bullet b^2} \quad 0 < a < b$$

注意 Δ^+ が minimal exponential type の entire function のときは、(3.29) は、付帯条件 $\int \gamma^6 \Delta < \infty$ をして、distribution の意味で成り立つ。このときは、 Q^+, Q^- はそれぞれ、Lebesgue measure の定数倍であることには注意しておいた。

注意 P_{Z_0} の explicit な表現は、よる条件の下で、§5 で述べられる。

§4. D_{ym} の研究

D_{ym} [4] では、Dym-McKean [3] の研究の逆のことで、即ち A_0, B_0, Q^+, Q^- を与えて、 Δ を求めることを行っている。条件を少し一般化しているため、一般には、 Δ は measure とは現われない、density の存在は、かなり判定しにくい (一般的に) 条件が必要である。

また、 $\{A_0(z), B_0(z)\}$ を次の (4.1) [✓] を満たすものとし、これが与えられたとする; (4.2)

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} A_0, B_0 : \text{minimal exponential type の 整函数} \\ A_0 \text{ even, } B_0 \text{ odd} \\ A_0^* = A_0, \quad B_0^* = B_0, \quad A_0(q) = 1 \end{array} \right.$$

$$(4.2) \left\{ \begin{array}{l} E_0 \text{ を } E_0 = A_0 - i B_0 \text{ とおくと、} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |E_0| > |E_0^*| \text{ on } \mathbb{C}^+ \\ \frac{1}{(1+r^2)|E_0|^2} \in L^1 \end{array} \right.$$

(4.2)の最後の積分条件が、(2.8)の最後の二本より一般化していることに注意する。

さらに、 $(0, \infty)$ 上の strictly increasing で連続な関数 Q^+ , Q^- を与える。

これより、 $\{A_0(z), B_0(z), Q^+, Q^-\}$ から、どの様にしても spectral function が求まるか、段々進んでいく。大体、[4]で証明した本と同じ順序である。

(1 段) 初期条件 A_0, B_0 を与え、微分方程式

$$(4.3) \quad \begin{cases} D_z^- A_t(z) = -z B_t(z) \\ D_z^+ B_t(z) = z A_t(z) \end{cases}$$

を満足する解 $(A_t, B_t)_{t \geq 0}$ が一意的に定まる。

(2 段) この A_t, B_t を用いて、 E_t を

$$(4.4) \quad E_t(z) = A_t(z) - t B_t(z)$$

によって定義するとき、 E_t は次の性質をもっている；

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & \left\{ \begin{array}{l} E_t \text{ は exponential type の 整 函 数 で あ り} \\ |E_t| > |E_t^*| \text{ on } \mathbb{C}^+ \\ E_t^* = E_t(-\bar{\cdot}) \\ E_t(0) = 1 \\ E_t \text{ root-free on } \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+r^2)|E_t|^2} < \infty \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+ |E_t(r)|}{1+r^2} < \infty \end{array} \right. \quad (t > 0)
 \end{aligned}$$

(4.5)の最後の方、2番目の積分条件が難しい。この(4.5)は、 $t=0$ のときにあたる(4.2)が、各 $t>0$ に対しても成り立つことを意味している。

(3段) この E_t を基底として、(2.3)と同じく、 $B_t \equiv B(E_t)$ を定義する。この空間が、 E_t をbaseとする de Branges space と呼ばれるものである。そして、次のことが示される;

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad & B_s \hookrightarrow B_t \quad s < t \\
 & \text{(isometrically)}
 \end{aligned}$$

これは、(3.13)の最初の包含関係に対応している。

(4段) (3.11)に對する式が証明される。

(5段) 次に, spectral measureの存在をいう。

を定める。

$$(4.7) \quad \sigma_t(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{(1+r^2)|E_t(r)|^2} dr \quad (\lambda \in \mathbb{R}, t \geq 1)$$

を定義する。 λ に關して單調増加な函数 σ_t は、

(4.6)と、de Branges spaceの基本的な性質を用いて、

と同様に一樣有界な σ_t が示されるので、適當な部分列 $t_j \rightarrow \infty$ が存在して、

$$(4.8) \quad \sigma_{t_j} \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} \sigma \quad \text{weakly.}$$

を σ と、measure μ と

$$(4.9) \quad d\mu = (1+r^2) d\sigma$$

を定義する。この μ は、

$$(4.10) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+r^2} < \infty$$

を示すことは明らか。この μ が、求める spectral measureに於けることを、以下の順を追って示す。

(6段) 次へ。

$$(4.11) \quad B_t \subset L^2(d\mu),$$

(isometrically)

$$(4.12) \quad B_t \subset L^2(d\mu)/B_0$$

が示される。

(7段) (4.8)からして、一般には、 σ , τ , μ は一意的に定まるわけが、定まる条件が次の様にして与えられた； measure $Q \in Q^+ + Q^-$ とし、 $g^+, g^- \in L^2$ とし、 Q^+, Q^- の Q に関する density とし、増加函数 $Z(t) \in$

$$(4.13) \quad Z(t) = \int_0^t \sqrt{g^+(s)g^-(s)} dQ(s)$$

で定義する。 $Q \in Q^+ + Q^-$ とし、

(4.14) $Z(\infty) = \infty \Rightarrow \mu$ は、定数倍を除いて一意的に定まる。

注意 (4.5) において、各 $E_t (t \geq 0)$ は、指数型とだけいっただけが、実は、指数型 $Z(t)$ に存在する Z が示される。

(8段) (2.14) に相当する Q とし、

$$Z(\infty) = \infty$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{t \geq 0} B_t \text{ dense in } L^2(d\mu)/B_0$$

が示される。

(9段) 最後の μ が spectral measure であることを示す。これをいうときは、次の(4.15)~(4.18)を示せばよい。 $\mathcal{Z}(\infty) = \infty$ と仮定する。(3.15)の $\mathcal{F}_e, \mathcal{F}_o$ の逆変換に当るものを T_e, T_o と次の様に定義する;

$$(4.15) \left\{ \begin{array}{l} T_e : L^2((0, \infty); \mathcal{Q}^+) \longrightarrow \left(L^2(d\mu) / \mathcal{B}_0 \right)_{\text{even}} \\ \quad \downarrow \\ \quad g \longrightarrow \pi^{-1} \int_0^{\infty} A_s(\lambda) g(s) d\mathcal{Q}^+(s), \\ \\ T_o : L^2((0, \infty); \mathcal{Q}^-) \longrightarrow \left(L^2(d\mu) / \mathcal{B}_0 \right)_{\text{odd}} \\ \quad \downarrow \\ \quad g \longrightarrow \pi^{-1} \int_0^{\infty} B_s(\lambda) g(s) d\mathcal{Q}^-(s) \end{array} \right.$$

このとき、 T_e, T_o は 次のことを満たす;

(4.16) T_e, T_o は bijective である。

$$(4.17) \left\{ \begin{array}{l} T_e^{-1} f = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{\infty} A_s(\lambda) f(\lambda) d\mu(\lambda), \\ \\ T_o^{-1} f = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{\infty} B_s(\lambda) f(\lambda) d\mu(\lambda), \end{array} \right.$$

$$(4.18) \left\{ \begin{array}{l} \|g\|_{\mathcal{Q}^+} = \sqrt{\pi} \|T_e g\|_{\mu}, \\ \\ \|g\|_{\mathcal{Q}^-} = \sqrt{\pi} \|T_o g\|_{\mu}. \end{array} \right.$$

(4.15), (4.16), (4.17), (4.18) はそれぞれ、(3.17), (3.16), (3.15), (3.18) に対応している。

Dyn [4] では、 $\pm 3n$ 、 $D^+ D^- u = -\beta^2 u$ の解 $u(t, \beta)$ は、 A_t と独立して、 $\beta \in \mathbb{C}^+$ の元であり、

$$(4.19) \quad A_s(\beta) u(t, \beta) = W(\beta) \int_{\mathbb{R}} \frac{A_s(r) A_t(r)}{\pi(r^2 - \beta^2)} d\mu(r)$$

ここで、 $W(\beta)$ は A_t, u の Wronskian を満たすものを求めて、よくなる、

$$(4.20) \quad R_t(\beta) = \frac{A_t(\beta) u(t, \beta)}{W(\beta)} \quad (t \geq 0, \beta \in \mathbb{C}^+)$$

で定義される R_t が、次の条件 \star :

\star $\beta R_s(\beta)$ が $\beta = \frac{c}{\beta}$ の近傍で、連続に拡張される。

をみたすならば、 μ は c で可積分で、その density $\Delta(c)$ は、

$$(4.21) \quad \Delta(c) = \frac{c (u^-(t, c) \overline{u(t, c)} - u(t, c) \overline{u^-(t, c)})}{2i |W(c)|^2}$$

で与えられることが示される。

§5. Germ field を知ったときの predictor operator.

6頁の (*) をみたと Δ を spectral density にもつ 正規定常過程を X とする。

F^- を $X(t) (t < 0)$ によって張られる最大の σ -field とすると、 X がマルコフ性をもつとは、

$$(5.1) \quad E(X(t) | F^-) : \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X(t); |t| < \varepsilon), \forall t > 0 \\ \text{--- measurable}$$

が成り立つことをいう。

我々は、序文、§3 で述べた様に、

$P_{\mathbb{Z}_\Delta^0}$ を 求めた 訳であるから、 \mathbb{Z}_Δ^0 の構造を
 ● 調べることだが、 X がマルコフ性をもっているとは
 仮定しても、面白きは、少しも 異なると思う。
 とすると、([1], [5]) より (3.2) で定義した h は

(5.2) $h^{-1}(t) = P(t)$, P minimal exponential type
 の entire function
 を満足する。

§3に、我々は、 h の Fourier 変換 τ 与え
 る表現核 E が、次の条件 $(*)$ をみたして

なりとする:

$$\boxed{\#} E \in C^\omega(\mathbb{R} - \{0\})$$

このとき、 $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{O}(\{0\})$ により、

$$(5.3) \quad P(z, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{\lambda+k+1} \varphi^{(k)}(0) \right) (-iz)^\lambda$$

により、 $P(z, \varphi)$ は定義済みとき、 z の $P(z, \varphi)$ は、

$$(5.4) \quad \begin{cases} P(z, \varphi) : z \text{ により } \text{minimal exponential type} \\ \text{の entire function,} \\ P(z, \varphi) : \varphi \text{ により } \mathcal{O}(\{0\})' \text{ の元} \end{cases}$$

を満足する。

この $P(z, \varphi)$ が、本稿の "germ field を知る" とき $\text{predictor operator}$ であることを見せるのは、次の (5.5) が成り立つことである。

$$(5.5) \quad \left(\int_{\mathbb{Z}_\Delta^0} e^{z \cdot t} \right) (z) = P(z, E(t \cdot)) \quad t > 0.$$

$\boxed{\#}$ により、 $E(t \cdot) \in C^\omega((-\infty, t])$ であるから、(5.5) の右辺は well-defined である。

2の(5.5)と同様である次の公式を書いた。
この報告を終わるとはする;

公式 任意の $s < 0 < t$ に対して、

$$E(t-s) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E^{(n)}(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k+1} (-1)^k E^{(k)}(-s) \right),$$

そこで $(C_n)_0^{\infty}$ は、 $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-i z)^n$ の係数。

以上。

文献

- [1] N. Levinson - H.P. McKean, Jr., Weighted trigonometrical approximation on \mathbb{R}^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta Math., 112(1964), 99-143.
- [2] 岡部立清憲, 正規定常過程のマルコフ性と佐藤の超函数, 1971年3月, 数理研ニッホニウム
- [3] H. Dym - H.P. McKean, Jr., Application of de Branges spaces of integral functions to the prediction of stationary Gaussian processes, Ill. J. Math. 14 (1970), 299-343

[4] H. Dym, An introduction to de Branges spaces of entire functions with application to differential equations of the Sturm-Liouville type, *Adv. Math.*, 5 (1971), 395-471

[5] Y. Okabe, On the Gaussian process with Markovian property and the hyperfunctions of M. Sato, to appear