数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 47-53

Random hyperfunction について.

九大 工 渡邊壽夫

Random hyperfunction の概念は岡部[1]，大内[2] 等で導入された。(Ω, B, P) 上の確率変数の族 $X(z,\omega)$ が random hyperfunction であるとは，確率1で $X(z,\omega) \in \mathcal{O}(C^1-R^1)$ が成り立つことであるとする。$L^2(\Omega, B, P)$ (P に関して，2乗可積分である r.v の全体の作る Hilbert space) での Norm に関して $z \in C^1-R^1$ の連続関数であるとき，L^2−連続であるという。定常性は，$\forall h \in R^1$

$$E(X_{z_1+h}, \overline{X}_{\overline{z_2+h}}) = E(X_{z_1} \cdot \overline{X}_{\overline{z_2}}) \quad \forall z_1 \in C^1, \forall z_2 \in C^1$$

で定義されよう。

Example 1. $X(\omega)$; (Ω, B, P) 上の random variable. $\varphi(z)$ を non random hyperfunction とする。$X(\omega) \cdot \varphi(z)$ は random hyperfunction である。

弱い意味での random hyperfunction は $E(X(z,\omega) \cdot \overline{X(z',\omega)}) = \rho(z,z')$ が (z,z') の2変数の関数として，hyperfunction であるときに，そう呼ぶ事にする。Belyaev [3] によると，Gaussian

であるとき，両方の定義は一致する。

Example 2. 任意の弱定常過程が与えられたとき，つまり，

$E(X^2(t))=1$, $E(X(t))=0$ なる実，平均連続な $(-\infty<t<\infty)$ な，確率過程 $\{X(t)\ -\infty<t<\infty\}$ において，$\rho(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dF(\lambda)$，を相関関数，$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,d\xi(\lambda)$ をスペクトル表示とする。

$$X(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{iz\lambda}\,d\xi(\lambda) & \Im z>0\\[2ex] \displaystyle-\int_{-\infty}^{0} e^{iz\lambda}\,d\xi(\lambda) & \Im z<0\end{cases}$$

と定義すると，$X(z)$ は random hyperfunction である。

さらに一般に，

Example 3. $d\xi(\lambda)$ を $(-\infty,\infty)$ 上の直交確率測度で，$E(|d\xi(\lambda)|^2)=d\mu(\lambda)$ とするとき，すべての $\varepsilon>0$ において，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda|}\,d\mu(\lambda)<\infty$ をみたすとき，

$$X(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{iz\lambda}\,d\xi(\lambda) & \Im z<0\\[2ex] \displaystyle-\int_{\infty}^{0} e^{iz\lambda}\,d\xi(\lambda) & \Im z<0\end{cases}$$

は random hyperfunction である。大内 [2] によれば，任意の L^2-値平均連続定常は random hyperfunction はこの様な表示が可能である。

Example 4

$B(s)$ を 1 次元 Brownian motion とする。

$$\hat{B}(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{izs} B(s)\,ds, & \Im z > 0 . \\ -\int_{-\infty}^0 e^{izs} B(s)\,ds, & \Im z < 0 . \end{cases}$$

によって，Brownian motion の Fourier 変換が定義される。

$B(s) = O(\sqrt{s \log\log s})$ $(s \to \infty)$ であるから，積分は well defined である。$\hat{B}(z)$ は random hyperfunction である。

Distribution としての Brownian motion の Fourier 変換は次の様な意味で境界値としてあらわれる。$\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$\hat{B}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{B}(t+i\varepsilon) - \hat{B}(t-i\varepsilon))\, \varphi(t)\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\infty e^{its-\varepsilon s} B(s)\,ds + \int_{-\infty}^0 e^{its} e^{\varepsilon s} B(s)\,ds \right) \varphi(t)\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{its} e^{-\varepsilon|s|} B(s)\,ds \right) \varphi(t)dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|s|} B(s)\,\hat{\varphi}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} B(s)\,\hat{\varphi}(s)\,ds$$

$$= B(\hat{\varphi}) .$$

Example 5.

次に white noise の random hyperfunction 表現を考える。

$e^{iz\lambda} \in \mathcal{S}$ であるから，$\int_0^\infty e^{iz\lambda} \hat{B}'(\lambda)\,d\lambda$ は $\hat{B}'(e^{iz\lambda})$ として定義可能である。

$$
B'(z) = \begin{cases} -(iz)\displaystyle\int_0^\infty e^{iz\lambda}\, \hat{B}(\lambda)\, d\lambda \\ \\ -(-iz)\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda}\, \hat{B}(\lambda)\, d\lambda \end{cases}
$$

は random hyperfunction である。$B'(z)$ は、また、$\int_0^\infty e^{iz\lambda} d\hat{B}'(\lambda)$ $(\Im z>0)$ $-\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda} d\hat{B}'(\lambda)$ $(\Im z<0)$ とかく。よく知られている様に、$B'(\varphi) = \hat{B}'(\varphi)$ $(\forall \varphi)$ (in law) である。

Distribution としての $B'(\varphi) = -B(\varphi')$ は次の様にして得られる。

$\forall \varphi \in C^\infty$

$$
B'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^\infty \left(B'(t+i\varepsilon) - B'(t-i\varepsilon) \right) \varphi(t)\, dt
$$

$$
= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty e^{i\lambda(t+i\varepsilon)} d\hat{B}'(\lambda) + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda(t-i\varepsilon)} d\hat{B}'(\lambda) \right) \varphi(t)\, dt
$$

$$
= \lim_{\varepsilon\to 0} (-1)\, \hat{B}\left(e^{-\varepsilon|\cdot|} (\hat{\varphi}(\cdot))' \right) = -\hat{B}\left((\hat{\varphi}(\lambda))' \right)
$$

$$
= -B(\varphi'(\lambda)) = B'(\varphi)
$$

<u>Example 6</u>　Example 3 の process に対して、

$$
\tilde{X}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{iz\lambda}\, c(\lambda)\, d\xi(\lambda) \\ \\ -\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda}\, c(\lambda)\, d\xi(\lambda) \end{cases}
$$

を考える。$c(\lambda)$ は $\sum c_j e^{it_j\lambda}$ $(-\infty < t_j < \infty.\ c_j$ constant$)$ の $L^2(e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda))$ の極限で、$\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(\lambda)|^2 e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda) < \infty$$

をみたすものとする。この C を linear operator の gain という。

こうして出来た $\hat{X}(z)$ はやはり random hyperfunction である。

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = Q(z)$ とするとき，$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(i\lambda)|^2 e^{-\varepsilon|\lambda|} d\mu(\lambda) < \infty$

をみたすとする。$c(\lambda) = Q(i\lambda)$ は $X(z)$ に対する linear

operation $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{d^n}{dz^n}$ に対する gain である。

今，

$$X(z) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{iz\lambda} H(i\lambda)\, dB'(\lambda), & \Im z > 0. \\ -\int_{-\infty}^{0} e^{iz\lambda} H(i\lambda)\, dB'(\lambda), & \Im z < 0. \end{cases}$$

で定義される $X(z)$ を考える，ここで，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda|} |H(i\lambda)|^2 d\lambda < \infty$

$\forall \varepsilon > 0$ であるとする。$H(i\lambda) = \frac{1}{Q(i\lambda)}$ （$Q(i\lambda)$ は real root をもたないとき.）であるとき，方程式

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^{(n)}(z) = B'(z) \qquad (\Im(z) \neq 0)$$

をみたすことがわかる。(*) の解の別の表示を求めてみよう。形式的に (*) の Laplace 変換を求めてみる。

$z = t + i\delta$，$\delta > 0$，$t \geq 0$ としよう。

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda t} \frac{d^n}{dt^n} X^{(n)}(t+i\delta)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B'(t+i\delta) dt$$

今 $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t+i\delta)\, dt = \overline{X}_\delta(\lambda)$ とすると，

前と同様に、$Q(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$ とすると、$Q(\lambda)\neq \overbrace{0\ \text{の}}^{(\lambda>0)}$ とき

$$\bar{X}_\delta(\lambda)=\frac{1}{Q(\lambda)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k X^{n-1-k}(i\delta)+\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}B'(t+i\delta)\,dt\right.$$

$$=\frac{1}{Q(\lambda)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1}\lambda^j\right\}X^{(k)}(i\delta)\right\}$$

$$\left.+\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}B'(t+i\delta)\,dt\right\}$$

$\frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1}\lambda^j=\frac{1}{\lambda^{k+1}}-\frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{j=0}^{k} c_j\frac{1}{\lambda^{k+1-j}}$ であるから、

$\frac{1}{h(\lambda)}=Q(-i\lambda)$ とおくと、$\frac{1}{Q(\lambda)}=h(-i\lambda)=\int_0^{\infty}\hat{h}(s)e^{-s\lambda}\,ds$

とあらわされる。ここで $\hat{h}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}h(\lambda)\,d\lambda$ である。

したがって、

$$X(t+i\delta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{t^k}{k!}-\sum_{i=0}^{k}c_i\int_0^t\hat{h}(t-u)\frac{u^{k-i}}{(k-i)!}\,du\right\}X^{(k)}(i\delta)$$

$$+\int_0^{\infty}e^{-\delta|s|}\,d\hat{B}(s)\left(\int_0^t\hat{h}(t-u)e^{ius}\,du\right)$$

なる表示をうる。同様にして、$\delta>0$ のとき、

$$X(t-i\delta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{t^k}{k!}-\sum_{i=0}^{k}c_i\int_0^t\hat{h}(t-u)\frac{u^{k-i}}{(k-i)!}\,du\right\}X^{(k)}(-i\delta)$$

$$+\int_{-\infty}^{0}e^{+\delta s}\,d\hat{B}(s)\left(\int_0^t\hat{h}(t-u)e^{ius}\,du\right)$$

$g(t)=\frac{t^k}{k!}-\sum_{i=0}^{k}c_i\int_0^t\hat{h}(t-u)\frac{u^{k-i}}{(k-i)!}\,du$ とおくと、

$$X(t+i\delta) - X(t-i\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t)\left(X^{(k)}(i\delta) - X^{(k)}(-i\delta)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta|s|}\left(\int_0^t \hat{h}(t-u)\, e^{ius}\, du\right) d\hat{B}(s)$$

$$X(t) = \lim_{\delta\to 0}\{X(t+i\delta) - X(t-i\delta)\} = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} g(t)\left(X^{(k)}(i\delta) - X^{(k)}(-i\delta)\right)$$

$$+ \int_0^t \hat{h}(t-u)\, dB(u)$$

となる。右辺の第一項は $\{X^{(k)}(0),\ k=0,1,2\cdots\}$ だけできまる事が期待されるが，Justificationはできない。

[1]. 岡部靖憲 : On the Gaussian process with the Markovian property and the hyperfunction of M. Sato

[2] 大内忠 : Some applications of hyperfunctions to the abstract Cauchy problem and stationary random processes.

[3] Belyaev, Yu. K ; Analytic random processes. Theory of prob. and its appl. 4, 402–409 (1959).