数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 76-116

多重マルコフ性の定義といくつかの例について

阪大理　　河野敬雄

序

$\{X(t); t \in T\}$ を，集合Tをパラメーター空間にもつ実数値をとる平均0の正規確率過程とする。

Urbanik[11] やMcKean[8]によるマルコフ性の定義は正規確率過程の場合は結局 $R(s,t)=E[X(s)X(t)]$ を再生核とするT上の実数値関数を元とするHilbert空間の議論にいいかえられるので 井上氏の論説あるいは Pitt[10], Molchan[9]の議論を整理して再生核をもつHibert空間の一般論でどこまでのことがいえるかを調べておくことは無意味なことではないと思われる。

従って本稿では正規確率過程びその σ-fieldとの関係は一切省略する。

§1では再生核をもつHilbert空間においてD-Markov性なる概念を定義し，Hilbert空間からそのdual空間への

isometric な cannonical map によって D-Markov 性を特徴づける。§2ではもっとも簡単な Markov 性をもつ例を考察する。§3では§1の議論を Gelfand-Vilenkin の意味の generalized process（[2] III章）の場合に拡張し，この時 Markov性をもつ条件が Fernique[1]の orthogonal process に他ならないことを示す。

最後に§1の内容について井上，岡部，小谷氏が討論して下さったことを感謝する。

§1.

パラメーター空間Tは距離空間であれば十分なのであるが簡単のためにTは R^d（d次元ユークリッド空間）か又はその subdomain であるとする。

今 T×T 上で定義された実数値をとる正定値核 $R(s,t)$を与える。即ち任意の複素数 $c_1,\cdots,c_n$と T上の任意の点 $t_1\cdots t_n$に対し

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} R(t_i,t_j) \geq 0$$

を満す。さらに任意の $t\in T$ に対し $R(t,t)>0$を仮定する。但し $R(s,t)$の連続性は仮定しない。

以下次のような記号を導入する。

$\mathcal{H}=\{R(t,\cdot);\ t\in T\}$ を再生核にもつT上の実数値関数からなる実Hilbert空間。

Tの任意の部分集合Gに対し

$\mathcal{H}(G)=\{R(t,\cdot);\ t\in G\}$ によって張られる $\mathcal{H}$ の閉部分空間。

$\mathcal{H}_0(G)=\{u\in\mathcal{H};\ u(t)=0,\ \forall t\in G\}$

($\mathcal{H}_0(G)$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間である)

$\mathcal{O}=\{G;$ Tに含まれる開集合であって $\overline{\overline{G}^c}=G^c$ が成立$\}$

但し $\overline{G}$ はGのclosure, $G^c=T-G$, $^-$ と ^{c} をほどこす順序に注意。定義から $G\in\mathcal{O}\Longleftrightarrow \overline{G}^c\in\mathcal{O}$

又 $\overline{\overline{G}^c}=G^c \Longleftrightarrow G=(\overline{G})^i$ ($\overline{G}$ の内点の全体)

開集合の族 $\mathcal{O}$ を考える理由の一つは一般論の段階で, 考える集合Dの内部と外部に関して述べることが同値になる方がいろいろ都合がよいように思われるからである。$\mathcal{O}$ に属さない開集合について考えるといろいろ面倒なことが起る。

$\mathcal{O}\ni D$ に対して "過去", "未来", "germ field" を次のように定義する。

$$\mathcal{H}^-(D) \equiv \bigcap_{\substack{G \supset \bar{D} \\ \mathcal{O} \ni G}} \mathcal{H}(G) \quad (過去)$$

$$\mathcal{H}^+(D) \equiv \bigcap_{\substack{G \supset D^c \\ \mathcal{O} \ni G}} \mathcal{H}(G) \quad (未来)$$

$$(= \mathcal{H}^-(\bar{D}^c))$$

$$\partial\mathcal{H}(D) = \bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \mathcal{H}(G) \quad (\text{germ field})$$

$$(\partial D = \bar{D} - D)$$

$$\mathcal{H}^{+/-}(D) \equiv P_{\mathcal{H}^-(D)} \mathcal{H}^+(D) \; (P_{\mathcal{H}^-(D)} \text{は} \mathcal{H}^-(D) \text{への射影})$$

定義から明らかに

$$\partial\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) \subset \mathcal{H}^{+/-}(D) \subset \mathcal{H}^-(D)$$

以下この包含関係をもとにしてマルコフ性を定義しこれらの包含関係が等号になるための条件を調べる。

<u>定義 1.</u> $\mathcal{H}$ が D-Markov

$$\Longleftrightarrow \partial\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}^{+/-}(D)$$

<u>定義 2.</u> $\mathcal{H}$ が D-purely non Markov

$$\Longleftrightarrow \mathcal{H}^{+/-}(D) = \mathcal{H}^-(D)$$

次に上の定義1と2が成立するためには空間$\mathcal{H}$がどんな性質をもっていればよいかを調べる。

空間$\mathcal{H}$の性質を反映するものとして canonical isomorphism

$A; \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ を考える。

ここで $\mathcal{H}'$ は $\mathcal{H}$ から R' への線型連続写像の全体からなる Hilbert 空間。

定義から任意の $u, v \in \mathcal{H}$ に対し $\langle Au, v\rangle = (u, v)$ が満たされる。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathcal{H}' \times \mathcal{H} \to R'$ の線型連続写像，$(\ ,\ )$ は $\mathcal{H}$ の内積。

<u>定義 3.</u> D を T に含まれる開集合とする時 $u \in \mathcal{H}$ に対して "$Au = 0$ on D"

$\Longleftrightarrow$ $\forall v \in \mathcal{H}$ such that $car(v) \equiv \overline{\{t, v(t) \neq 0\}} \subset D$ に対して $\langle Au, v\rangle = (u, v) = 0$

<u>定義 4.</u> $\mathcal{H}$ が strictly D-local $(D \in \mathcal{O})$

$\Longleftrightarrow$ $\forall u \in \mathcal{H}$ such that $car(u) \subset (\partial D)^c$ に対し

$$\tilde{u}(t) = u(t), \quad t \in D$$
$$= 0, \quad t \notin D$$

とおいた時 $\tilde{u} \in \mathcal{H}$.

定義5.　$\mathcal{H}$が weakly D-local

$$\Longleftrightarrow \overline{\{u \in \mathcal{H};\ car(u) \subset (\partial D)^c\}}$$
$$= \overline{\{u_1+u_2;\ car(u_1) \subset D,\ car(u_2) \subset \overline{D}^c\}}$$

ここで $\overline{\{\ \ \}}$ は$\mathcal{H}$の中での集合$\{\ \ \}$のclosure.

定義6.　Aが D-local

$\Longleftrightarrow$ $u = 0$ on D ならば $Au = 0$ on D

定義7.　Aが D-purely non local

$\Longleftrightarrow$ $u = 0$ on $\overline{D}^c$, かつ $u \neq 0$ ならば $Au \neq 0$ on $\overline{D}^c$

定義8.　$\mathcal{H}$が D-regular

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}^-(D) = \mathcal{H}(D)$

次の2つの補題が基本的である。

補題1.　GをTに含まれる任意の集合とする時

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(G) \oplus \mathcal{H}_0(G)$$

<u>証明.</u>　まず $\mathcal{H}(G)$ と $\mathcal{H}_0(G)$ が直交していることを示そう。$R(t,\cdot)$, $t\in G$ は $\mathcal{H}(G)$ を張り $u\in\mathcal{H}_0(G)$ に対して再生核の性質より

$$(R(t,\cdot)\ u) = u(t) = 0 \qquad \forall t\in G$$

故に $\mathcal{H}(G)\perp\mathcal{H}_0(G)$。

次に $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}(G)\ni u$ は定義から任意の $t\in G$ に対して

$$(u,\ R(t,\cdot)) = u(t) = 0$$

従って $u\in\mathcal{H}_0(G)$。　　　　(q.e.d.)

<u>補題2.</u>　$D\in\mathcal{O}$ に対して

(i) $\mathcal{H}^-(D) = \{u\in\mathcal{H}\ ;\ Au=0 \text{ on } \overline{D}^c\}$

(ii) $\mathcal{H}(D) = \bigcup_{\substack{G\supset D^c\\ \mathcal{O}\ni G}}\{u\in\mathcal{H}\ ;\ Au=0 \text{ on } G\}$

(iii) $\partial\mathcal{H}(D) = \{u\in\mathcal{H}\ ;\ Au=0 \text{ on } (\partial D)^c\}$

<u>証明.</u>　(i) $\subset$ の証明. $v\in\mathcal{H}$ $\overline{D}^c\supset \mathrm{car}(v)$ とする。

G 開集合 such that $\mathcal{O}\ni G$, $G\supset\overline{D}$, $\overline{G}\cap \mathrm{car}(v)=\phi$

即ち $v=0$ on G　故に $v\in\mathcal{H}_0(G)$. $\mathcal{H}^-(D)\subset\mathcal{H}(G)$ だから補題1より

$\forall u \in \mathcal{H}^-(D)$ に対し

$$(u, v) = \langle Au, v \rangle = 0$$

故に $Au = 0$ on $\overline{D}^c$

次に $\supset$ を証明する。 $Au = 0$ on $\overline{D}^c$ とする。$\overline{D} \subset G$ となる任意の $G \in \mathcal{O}$ に対し $\mathcal{H}_0(G) \ni v \Rightarrow \mathrm{car}(v) \subset \overline{D}^c$
故に仮定から $\langle Au, v \rangle = (u, v) = 0$
従って $u \perp \mathcal{H}_0(G)$ 故に補題1から $u \in \mathcal{H}(G)$
G は任意だから $u \in \mathcal{H}^-(D)$。

(ii) $\supset$ の証明。 $G \supset D^c$ $Au = 0$ on G とする。
$\mathcal{H}_0(D) \ni v$ ならば $\mathrm{car}(v) \subset G$ 従って $\langle Au, v \rangle = (u, v) = 0$
故に $u \perp \mathcal{H}_0(D)$ 補題1から $u \in \mathcal{H}(D)$
$\subset$ の証明。 $t \in D$ に対して $^\exists G \in \mathcal{O}$ such that $t \notin G$, $G \supset D^c$。故に $\mathrm{car}(u) \subset G$ なる任意の u に対して

$$\langle AR(t, \cdot), u \rangle = (R(t, \cdot), u) = u(t) = 0$$

故に $R(t, \cdot) \in \{Au = 0 \text{ on } G\}$

(iii) $G \in \mathcal{O}$ に対し $\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{H}^{-}(G)$ だから (i) より

$$\partial\mathcal{H}(D) = \bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \mathcal{H}(G) \subset \bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } \overline{G}^{c} \}$$

次に

$$\bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } \overline{G}^{c} \} = \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on} (\partial D)^{c} \}$$

を示そう。$\supset$ は定義から明らか。$\subset$ の証明をしよう。

$u \in \bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } \overline{G}^{c} \}$ とする。$\mathrm{car}(v) \subset (\partial D)^{c}$

に対し $\exists G \in \mathcal{O}$ such that $\partial D \subset G$ かつ $\mathrm{car}(v) \subset \overline{G}^{c}$。

故に $\langle Au, v \rangle = (u, v)_{\mathcal{H}} = 0$ 故に $Au = 0$ on $(\partial D)^{c}$。

最後に $\partial\mathcal{H}(D) \supset \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } (\partial D)^{c} \}$ を示す。

(ii) より $\mathcal{O} \ni G \supset \partial D$ に対し

$$\mathcal{H}(G) \supset \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } (\partial D)^{c} \}$$

従って

$$\bigcap_{\substack{G \supset \partial D \\ \mathcal{O} \ni G}} \mathcal{H}(G) \supset \{ u \in \mathcal{H} \,;\, Au = 0 \text{ on } (\partial D)^{c} \}$$

(q. e. d.)

<u>定理 1.</u> $\mathcal{H}$ が weakly D-local

$$\Longleftrightarrow \quad \partial\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}^{-}(D) \cap \mathcal{H}^{+}(D)$$

証明　$(\Longrightarrow)$の証明。$u \in \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D)$とする。
$\mathrm{car}(v_1) \subset D$, $\mathrm{car}(v_2) \subset \overline{D}^c$ なる任意の $v_1 v_2 \in \mathcal{H}$ に対し
補題2から

$$\langle Au, v_1 + v_2 \rangle = \langle Au, v_1 \rangle + \langle Au, v_2 \rangle = 0$$

$\mathcal{H}$がweakly D-localであるから　$\mathrm{car}(v) \subset (\partial D)^c = D \cup \overline{D}^c$
なる任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し　$\langle Au, v \rangle = 0$　　従って
$Au = 0$ on $(\partial D)^c$。再び補題2から $u \in \partial\mathcal{H}(D)$。

$(\Longleftarrow)$の証明。　補題2を書きかえると

$$\mathcal{H}^-(D) = \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \ \mathrm{car}(u) \subset \overline{D}^c\}}^{\perp}$$

$$\mathcal{H}^+(D) = \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \ \mathrm{car}(u) \subset D\}}^{\perp}$$

$$\partial\mathcal{H}(D) = \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \ \mathrm{car}(u) \subset (\partial D)^c\}}^{\perp}$$

故に　　$\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) = \partial\mathcal{H}(D)$ ならば
$\mathcal{H}^-(D)^{\perp} \cup \mathcal{H}^+(D)^{\perp} = (\partial\mathcal{H}(D))^{\perp}$

従って $\overline{\overline{\{u \in \mathcal{H};\ \mathrm{car}(u) \subset \overline{D}^c\}} \cup \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \mathrm{car}(u) \subset D\}}}$

$$= \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \mathrm{car}(u) \subset (\partial D)^c\}}$$

故に $\mathcal{H}$ が weakly D-local. (q. e. d.)

<u>定理 2.</u> $\partial\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) = \mathcal{H}^{+/-}(D)$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$ が strictly D-local.

<u>証明</u>。 $\mathcal{H}_0^-(D) = \mathcal{H}^-(D) \ominus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D))$

$\mathcal{H}_0^+(D) = \mathcal{H}^+(D) \ominus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D))$

とおく。仮定から

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^-(D) \oplus \partial\mathcal{H}(D) \oplus \mathcal{H}_0^+(D) \quad (直和)$$

と表わされる。$u \in \mathcal{H}$ $\mathrm{car}(u) \subset (\partial D)^c$ とする。$u_0^- \in \mathcal{H}_0^-(D)$, $u^{+/-} \in \partial\mathcal{H}(D)$, $u_0^+ \in \mathcal{H}_0^+(D)$ が唯一つ存在して

$$u = u_0^- + u^{+/-} + u_0^+$$

と表わされる。$\mathrm{car}(u) \subset (\partial D)^c$ だから $\exists G \in \mathcal{O}$ such that $G \supset \partial D$, $\overline{G} \cap \mathrm{car}(u) = \phi$。故に $\forall t \in G$ に対し

$$(u, R(t, \cdot)) = u(t) = 0$$

故に $u \perp \mathcal{H}(G)$, 従って $u \perp \partial\mathcal{H}(D)$, 従って $u^{+/-} \equiv 0$。
$t \in D^c$ とすると $R(t, \cdot) \in \mathcal{H}^+(D)$ だから $u_0^- \perp \mathcal{H}^+(D)$ より $(u_0^-, R(t, \cdot)) = u_0^-(t) = 0$。$t \in D$ とすると $R(t, \cdot) \in \mathcal{H}^-(D)$ だから, $u_0^- \in \mathcal{H}^-(D)$ かつ $P_{\mathcal{H}^-(D)} u = u_0^- + u^{+/-} = u_0^-$ より

$$
\begin{aligned}
(u_0^-, R(t,\cdot)) &= u_0^-(t) \\
&= (P_{\mathcal{H}^-(D)}u, R(t,\cdot)) \\
&= (u, P_{\mathcal{H}(D)}R(t,\cdot)) \\
&= u(t)
\end{aligned}
$$

故に $\tilde{u} = u_0^- \in \mathcal{H}$. 従って $\mathcal{H}$ が strictly D-local.

(q. e. d.)

<u>定理3.</u> A が D-local

$\Longrightarrow \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) = \mathcal{H}^{+-}(D)$

<u>証明</u> $\mathcal{H}^+(D) \ni u$ に対して $u = u^- + u^\circ$, $u^- = P_{\mathcal{H}^-(D)}u$, と分解する. $\mathcal{H}^-(D) \supset \mathcal{H}(D)$ だから勿論 $u^\circ \perp \mathcal{H}(D)$.
補題1から $u^\circ \in \mathcal{H}_0(D)$ 即ち $u^\circ = 0$ on D.
仮定から $A(u - u^-) = 0$ on D. $u \in \mathcal{H}^+(D)$ だから補題2から $Au = 0$ on D. 故に $Au^- = 0$ on D. 補題2から $u^- \in \mathcal{H}^+(D)$.
勿論 $u^- \in \mathcal{H}^-(D)$ だから $u^- \in \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D)$.

(q. e. d.)

<u>定理4.</u> $\mathcal{H}$ が D-regular かつ $\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) = \mathcal{H}^{+-}(D)$

$\Longrightarrow$ A が D-local.

証明　仮定から

$$\mathcal{H}_0^-(D) = \mathcal{H}^-(D) \ominus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D))$$

$$\mathcal{H}_0^+(D) = \mathcal{H}^+(D) \ominus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D))$$

とおくと

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^-(D) \oplus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D)) \oplus \mathcal{H}_0^+(D) \quad (\text{直和})$$

に分解される．$u \in \mathcal{H}_0(D)$とすると補題1から$u \perp \mathcal{H}(D)$。仮定から$\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}^-(D)$だから$u \perp \mathcal{H}^-(D)$　故に$u \in \mathcal{H}_0^+(D)$。一方　$car(v) \subset D$なる任意の$v \in \mathcal{H}$に対して
$^\exists G \in \mathcal{O}$ such that $G \supset car(v)$, $D \supset \overline{G}$.
故に$v \in \mathcal{H}_0(\overline{G}^c)$．補題1から$v \perp \mathcal{H}(\overline{G}^c)$．$\overline{G}^c \supset D^c$，$\overline{G}^c \in \mathcal{O}$だから$v \perp \mathcal{H}^+(D)$。故に$v \in \mathcal{H}_0(D)$、従って$\mathcal{H}_0^-(D) \perp \mathcal{H}_0^+(D)$より　$(u, v) = \langle Au, v \rangle = 0$　故に$Au = 0$ on D.　(q.e.d.)

定理 5.　$\mathcal{H}$がD-regular

$$\Longleftrightarrow \mathcal{H}_0(D) = \overline{\{u \in \mathcal{H} ;\ car(u) \subset \overline{D}^c\}}$$

証明　($\Longleftarrow$)の証明。補題2から$Au = 0$ on $\overline{D}^c$ならば$u \in \mathcal{H}(D)$をいえばよい。補題1から$u \in \mathcal{H}(D) \Longleftrightarrow u \perp \mathcal{H}_0(D)$．$\forall v \in \mathcal{H}_0(D)$に対し仮定から$^\exists v_n \to v$ in $\mathcal{H}$ such that

$car(v_n) \subset \overset{c}{\bar{D}}$。ところが $Au = 0$ on $\overset{c}{\bar{D}}$ より

$$\langle Au, v_n \rangle = (u, v_n) = 0.$$

故に　$(u, v) = \lim_{n\to\infty} (u, v_n) = 0$。

従って　$u \perp \mathcal{H}_0(D)$.

($\Longrightarrow$) の証明．　$\mathcal{H}_0(D) \ni u$ かつ $\forall v$ such that $car(v) \subset \overset{c}{\bar{D}}$ に対し $(u, v) = 0$ を仮定する。

$(u, v) = \langle Au, v \rangle$ だから $Au = 0$ on $\overset{c}{\bar{D}}$. 従って補題2から $u \in \mathcal{H}^-(D)$。仮定から $u \in \mathcal{H}(D)$．補題1から $u \perp \mathcal{H}_0(D)$　故に $u \equiv 0$　　(q.e.d.)

<u>定理 6.</u>　$\mathcal{F} = \{ D \in \mathcal{O} \,;\, \mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D) = \mathcal{H}^{+-}(D) \}$ が $F_1 \cap F_2 = \phi$ を満足する任意の閉集合 F_1, F_2 を分離する。

即ち $\exists D \in \mathcal{F}$ such that $D \supset F_1$ かつ $\overset{c}{\bar{D}} \supset F_2$.

$\Longrightarrow$ A は local 即ち $car(u) \cap car(v) = \phi$

ならば $(u, v) = \langle Au, v \rangle = 0$

<u>証明</u>　$F_1 = car(u)$,　$F_2 = car(v)$ とおく．

仮定から $\exists D \in \mathcal{F}$ such that $D \supset F_1$, $\overset{c}{\bar{D}} \supset F_2$

さらに $\exists G_1 \in \mathcal{O}$ such that $D \supset \bar{G_1}$, $G_1 \supset F_1$.

$u=0$ on $\overline{G}^c$ だから $u \in \mathcal{H}_0(\overline{G_1}^c)$. 補題1から $u \perp \mathcal{H}(\overline{G}^c)$。
$\overline{G}^c \supset D^c$ より $u \perp \mathcal{H}^+(D)$。同様にして $v \perp \mathcal{H}^-(D)$。
仮定から定理4の証明と同様にして

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^-(D) \oplus (\mathcal{H}^-(D) \cap \mathcal{H}^+(D)) \oplus \mathcal{H}_0^+(D) \quad (\text{直和})$$

と分解されるから $u \in \mathcal{H}_0^-(D)$, $v \in \mathcal{H}_0^+(D)$ であって
$(u, v) = \langle Au, v \rangle = 0$. (q. e. d.)

定理7. A が D-purely non local

$$\Longrightarrow \mathcal{H}^{+/-}(D) = \mathcal{H}^-(D)$$

証明 対偶を証明する。即ち $\exists u \neq 0$ such that $u \in \mathcal{H}^-(D)$ かつ $u \perp \mathcal{H}^{+/-}(D)$ とする。任意の $v \in \mathcal{H}^+(D)$ に対し $(u, P_{\mathcal{H}^-(D)} v) = (u, v) = 0$. 故に $u \perp \mathcal{H}^+(D)$. $t \in \overline{D}^c$ とすると $R(t, \cdot) \in \mathcal{H}^+(D)$ だから

$$0 = (u, R(t, \cdot)) = u(t).$$

故に $u=0$ on $\overline{D}^c$. ところが $u \in \mathcal{H}^-(D)$ だから補題2から $Au = 0$ on $\overline{D}^c$。従って A は D-purely non local ではない。 (q. e. d.)

定理8. $\mathcal{H}$が$\overset{c}{D}$-regular かつ $\mathcal{H}^{+/-}(D)=\mathcal{H}^{-}(D)$

$\Longrightarrow$ AがD-purely non local.

証明　対偶を証明する。$\exists u \neq 0$ such that $u=0$ on $\overset{c}{D}$ かつ $Au=0$ on $\overset{c}{D}$とする。補題2から $u\in\mathcal{H}^{-}(D)$.
さらに $u\in\mathcal{H}_0(\overset{c}{D})$だから補題1から $u\perp\mathcal{H}(\overset{c}{D})$.
仮定から $\mathcal{H}^{+}(D)=\mathcal{H}^{-}(\overset{c}{D})=\mathcal{H}(\overset{c}{D})$　従って $u\perp\mathcal{H}^{+}(D)$.
故に$u\notin\mathcal{H}^{+/-}(D)$. 即ち $\mathcal{H}^{+/-}(D)\neq\mathcal{H}^{-}(D)$。　(q.e.d.)

§2.

前節でMarkov性の定義が結局再生核 $R(s,t)$ をもつHilbert空間$\mathcal{H}$の元の性質を知ることと$\mathcal{H}$から$\mathcal{H}'$へのcannonical map Aの性質を知ることに帰着された。cannonical map Aは一般には $AR(t,\cdot)=\delta(t)$ で決定される。ここで $\delta(t)$ は任意の $u\in\mathcal{H}$ に対し $u(t)$ を対応させる連続線型汎関数を表わす。しかしこれからはAの性質を調べることはできない。この節では[A]で若干の仮定のもとに$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$のdenseな元をもう少し具体的に表現し、それらの元に対してAがどのように働くかをみる。
[B]でもっとも簡単なMarkov性をもつ場合の例を調べる。

〔A〕 Tを前節と同じく R^d 又はその sub domain とし $\mathcal{D}(T)$ を support が Tに含まれる C^∞ な実数値関数とする。$R(s,t)$ は $T\times T$ 上の実数値をとる正定値核で次の2つの仮定を満すとする。

仮定1. $R(s,t)$ は $T\times T$ の関数として連続.

仮定2. $\mathcal{D}(T)$ に属する任意の φ に対し $\varphi\equiv 0$ でないかぎり

$$\iint_{T\times T} R(s,t)\,\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt > 0$$

まず $\mathcal{H}'$ に相当する空間を構成する。$\varphi,\psi\in\mathcal{D}(T)$ に対して内積 $(\varphi,\psi)_1$ が

$$(\varphi,\psi)_1 = \iint_{T\times T} R(s,t)\,\varphi(s)\psi(t)\,ds\,dt$$

によって定義される。

$(\mathcal{D}(T), (\ ,\ )_1)$ は pre-Hilbert 空間である。$\mathcal{D}(T)$ を $(\ ,\ )_1$ で完備化して得られる実 Hilbert 空間を H_1 とおく。

補題3. $\varphi\in\mathcal{D}(T)$ に対し $R\varphi(\cdot)=\int_T R(\cdot,t)\varphi(t)dt$ とおく。明らかに $R\varphi(\cdot)$ は T上の連続関数。任意の $\psi\in\mathcal{D}(T)$ に対して

$$<R\varphi, \psi> = \int_T R\varphi(s)\,\psi(s)ds = \iint_{T\times T} R(s,t)\,\psi(s)\,\varphi(t)dsdt$$

とおくと $R\varphi$ は $(\mathcal{D}(T)(\ ,\ )_1)$ 上の線型連続汎関数

即ち $R\varphi \in H_1'$ (H_1のdual)であって

$$\| R\varphi \|_{H_1'} = \| \varphi \|_1 .$$

仮定2から $\varphi \neq \psi$ ならば $R\varphi \neq R\psi$ in H_1'.

<u>証明.</u> $<R\varphi, \cdot>$ が線型であることは明らか。

$\psi \in \mathcal{D}(T)$に対し

$$|<R\varphi, \psi>| = |\iint_{T\times T} R(s,t)\,\psi(s)\,\varphi(t)\,dsdt|$$

$$\leqq \left(\iint_{T\times T} R(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt\right)^{1/2}\left(\iint_{T\times T} R(s,t)\psi(s)\psi(t)dsdt\right)^{1/2}$$

$$= \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1$$

従って $R\varphi \in H_1'$ かつ $<R\varphi, \varphi> = (\varphi, \varphi)_1 = \|\varphi\|_1^2$

故に $\| R\varphi \|_{H_1'} = \|\varphi\|_1$

<u>定理9.</u>

(i) $\{R\varphi;\ \varphi \in \mathcal{D}(T)\}$ は H_1' で dense

(ii) H_1'の元は T上の連続関数で関数として異なれば H_1'の元

としても異なる。さらに $l \in H_1'$, $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ に対し

$\langle l, \varphi \rangle = \int_T l(s)\varphi(s)\,ds$ と表わされる。

(iii) $R(s,t)$; $(s,t) \in T \times T$ は H_1' の reproducing kernel.

(iv) A; $H_1' \to H_1$ cannonical isomorphism とすると任意の $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ に対して

$$AR\varphi = \varphi.$$

<u>証明.</u> (i) $l \in H_1'$ に対して任意の $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ に対し $(R\varphi, l)_0 = 0$ ならば $l = 0$ in H_1' を示せばよい。

ここで $(\ ,\ )_0$ は H_1' の内積。

まず

$$(R\varphi, l)_0 = \frac{1}{4}(\|R\varphi + l\|_0^2 - \|R\varphi - l\|_0^2) = 0$$

従って

$$(1) \qquad \|R\varphi + l\|_0^2 = \|R\varphi - l\|_0^2$$

一方 中線定理

$$\|R\varphi + l\|_0^2 + \|R\varphi - l\|_0^2 = 2(\|R\varphi\|_0^2 + \|l\|_0^2)$$

と (1) から

$$(2) \qquad \|R\varphi + l\|_0^2 = \|R\varphi\|_0^2 + \|l\|_0^2$$

ノルムの定義から $\exists u \in H_1$ such that $\|u\|_1 = 1$,

$\langle l, u \rangle = \|l\|_0$

さらに

$$(3) \quad |\langle R\varphi, u\rangle + \langle l, u\rangle| = |\langle R\varphi + l, u\rangle| \leqq \|R\varphi + l\|_0$$

従って(2)より

$$(4) \quad (\langle R\varphi, u\rangle + \langle l, u\rangle)^2 \leqq \|R\varphi\|_0^2 + \|l\|_0^2$$

$\mathcal{D}(T)$ は H_1 で dense だから $\exists\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}(T)$ such that

$\|\varphi_n - u\|_1 \to 0 \ (n \to \infty)$ 従って $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_1 = 1$

補題1より $\lim_{n\to\infty} \|R\varphi_n\|_0 = 1$

さらに

$$\begin{aligned} &|\langle R\varphi_n, u\rangle - \|\varphi_n\|_1| \\ &= |\langle R\varphi_n, u\rangle - \langle R\varphi_n, \varphi_n\rangle| \\ &= |\langle R\varphi_n, u - \varphi_n\rangle| \\ &\leqq \|R\varphi_n\|_0 \|u - \varphi_n\|_1 \quad \to 0 \quad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

だから

$$(5) \quad \lim_{n\to\infty} \langle R\varphi_n, v\rangle = 1$$

(4)はすべての $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ に対して成り立つから上の $\{\varphi_n\}$ を代入して $n \to +\infty$ とすると

$$\text{左辺} = (\langle R\varphi_n, u\rangle + \langle l, u\rangle)^2$$

(5)より

$$\to 1 + 2\langle l, u\rangle + (\langle l, u\rangle)^2$$

$$\text{右辺} = \|R\varphi_n\|_0^2 + \|l\|_0^2$$

$$\to 1 + (\langle l, u\rangle)^2$$

従って

$$\langle l, u\rangle = \|l\|_0 \leqq 0 \quad \text{即ち} \quad l = 0 \text{ in } H_1'$$

(ii). (i)から任意の $l \in H_1'$ に対して $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}(T)$ が存在して $R\varphi_n \to l$ in H_1' とできる。この時任意の $s \in T$ に対して

$$|R\varphi_n(s) - R\varphi_m(s)| = \left|\int_T R(s,t)\varphi_n(t)dt - \int_T R(s,t)\varphi_m(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_T R(s,t)(\varphi_n(t) - \varphi_m(t))dt\right|$$

$$\leq \sqrt{R(s,s)}\,\|\varphi_n - \varphi_m\|_1$$

$$= \sqrt{R(s,s)}\,\|R\varphi_n - \varphi_m\|_0$$

$$= \sqrt{R(s,s)}\,\|R\varphi_n - R\varphi_m\|_0$$

$$\to 0 \quad (n, m \to +\infty)$$

従って $\{R\varphi_n(s)\}$ は Cauchy 列。

故に $l(s) \equiv \lim_{n\to\infty} R\varphi_n(s)$ は列 $\{R\varphi_n(s)\}$ の選び方によらないで定義できる。しかも上の評価式から $\{R\varphi_n(s)\}$ は広義一様収束するから $l(s)$ は連続関数。かつ $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ に対して

$$
\begin{aligned}
< l, \varphi > &= \lim_{n\to\infty} < R\varphi_n, \varphi > \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_T R\varphi_n(s)\, \varphi(s)\, ds \\
&= \int_T l(s)\, \varphi(s)\, ds
\end{aligned}
$$

$l(s)$ が連続関数だから $l \in H_1'$ が関数として異なれば H_1' の元として異なることは明らか。

(iii) $\mathcal{D}(T)$ の元の列 $\{\varphi_n\}$ で $\int_T \varphi_n(s)\, ds = 1$, $\bigcap_n \mathrm{car}(\varphi_n) = t_0$ を満すものを選ぶ。($\mathcal{D}(T)$ の場合は可能である)。

まず $R\varphi_n \in H_1'$ が Cauchy 列をなすこと示そう。

$$
\begin{aligned}
\| R\varphi_n - R\varphi_m \|_0^2 &= \| R\varphi_n - \varphi_m \|_0^2 = \| \varphi_n - \varphi_m \|_1^2 \\
&= \iint_{T\times T} R(s,t)\, \varphi_n(t)\varphi_n(s)\, ds\,dt + \iint_{T\times T} R(s,t)\, \varphi_m(s)\varphi_m(t)\, ds\,dt \\
&\quad -2 \iint_{T\times T} R(s,t)\, \varphi_m(s)\varphi_n(t)\, ds\,dt \\
&\longrightarrow R(t_0,t_0) + R(t_0,t_0) - 2R(t_0,t_0) = 0 \quad (n, m \to +\infty)
\end{aligned}
$$

故に $l_{t_0} \in H_1'$ が存在して $R\varphi_n \to l_{t_0}$ in H_1'.

しかるに

$$l_{t_0}(S)=\lim_{n\to\infty}R\varphi_n(S)=\lim_{n\to\infty}\int_T R(S,T)\varphi_n(t)\,dt$$
$$=R(s,t_0)$$

従って任意の $t\in T$ に対し $R(\cdot,t)=R(t,\cdot)\in H_1'$

$\{R(\cdot,t),\ t\in T\}$ が H_1' の reproducing kernel である

ことを示そう。任意の $\varphi\in\mathcal{D}(T)$ に対して

$$(R\varphi,\ R(\cdot,t_0))_0=\lim_{n\to\infty}(R\varphi,\ R\varphi_n)_0$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\varphi,\ \varphi_n)_1$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{T\times T}R(S,t)\varphi_n(S)\varphi(t)\,dsdt$$
$$=\int_T R(t_0,t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$=R\varphi\,(t_0)$$

(i)より $\{R\varphi,\ \varphi\in\mathcal{D}(T)\}$ は H_1' で dense であり H_1' のノルム収束は広義一様収束を引きおこすから上の関係式は H_1' の任意の元に対して成立する。

(iv) 任意の $\varphi,\psi\in\mathcal{D}(T)$ に対し

$$\langle R\varphi,\ \psi\rangle=\iint_{T\times T}R(S,t)\,\varphi(S)\,\psi(t)\,dsdt$$
$$=(\varphi,\ \psi)_1$$

故に $AR\varphi=\varphi$。$\{R\varphi\,;\,\varphi\in\mathcal{D}(T)\}$ は H_1' で dense だから
この関係式によってAは決定される。

〔B〕 <u>例1.</u> $R(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s-t)\lambda}\Delta(\lambda)d\lambda$
とかけている場合。但し (i) $\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(\lambda)d\lambda=1$, (ii) $\Delta(\lambda)\geq 0$
かつルベーグ測度正の集合上で0でない。(iii) $\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda)$
この時 $R(s,t)$ は仮定1，仮定2を満す。
$\varphi\in\mathcal{D}(R')$ に対し

$$R\varphi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}R(s,t)\,\varphi(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s-t)\lambda}\Delta(\lambda)d\lambda\varphi(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(\lambda)e^{is\lambda}\Delta(\lambda)d\lambda,\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}\varphi(t)dt=\hat{\varphi}(\lambda)\right)$$

従って

$$AR\varphi(s)=\varphi(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(\lambda)\,e^{is\lambda}d\lambda$$

今 $D=(-\infty,0)$ に関する Markov 性を Levinson - McKean[7]
によって Δ の条件で表わしてみる。
この時常に $\mathcal{H}$ は D-regular 即ち $\mathcal{H}(D)=\mathcal{H}(D)$ である。
実際 $T_t u(s)=u(s-t)$ なる unitary 作用素が定義できて
$T_t R(s,\cdot)=T_t R(s-\cdot)=R(s+t-\cdot)=R(s+t,\cdot)$
だから $\forall t<0$ に対し $T_t\mathcal{H}(D)\subset\mathcal{H}(D)$ $t\uparrow 0$ の時
$\|T_t-I\|\to 0$ だから結局 $\mathcal{H}^-(D)\subset\mathcal{H}(D)$

Levinson - McKean [7] によれば $\int_{-\infty}^{\infty} \log \Delta(\lambda)/(1+\lambda^2)\, d\lambda > -\infty$ の時 $\Delta(\lambda) = |h(\lambda)|^2$, $h(z)$ は $\mathrm{Im}\, z > 0$ で H^2-class に属する outer function と表わした時

(i) $\mathcal{H}^{+,-}(D) \neq \mathcal{H}^{-}(D) \iff \dfrac{h(z)}{\bar{h}(\bar{z})}$ が R^1 上で 2つの inner function の比の R^1 上での値と一致する (a. e. に)

(ii) $\mathcal{H}^{-}(D) \cap \mathcal{H}^{+}(D) = \mathcal{H}^{+-}(D) \iff \dfrac{h(z)}{\bar{h}(\bar{z})}$ が R^1 上で 1つの inner function の R^1 上での値と一致する (a. e. に)

(iii) $\partial\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}^{+-}(D) \iff h(z)$ が minimal exponetial type の整関数の逆数。

注意　Okabe, Pitt [10] では上の cannonical map ではなくて

$$A\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)/\bar{h}(x)\, dx$$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

を用いて Markov 性を characterize してある。

例2。　$T = (-\infty, \infty)$ とし $R(t, t)$ は連続でかつ正であると仮定する。　$D_s = (-\infty, s)$ とおくと任意の s に対して

$\mathcal{H}$ は D_s-regular であって任意の s に対して

$\mathcal{H}^{+/-}(D_s) = \partial\mathcal{H}(D_s) = \{R(s,\cdot)\}$ から張られる一次元空間が

成り立つことが普通の意味で simple Markov であることと

同値である。

この時 $R(s,t)$ 及び $\mathcal{H}$ は次のように完全に決定される。[14]

即ち

<u>定理10.</u> $\mathcal{H}$ が simple Markov

$\Longleftrightarrow$ 二つの正の関数 $\varphi(t), \psi(t)$ が存在して

$u(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ は非減少関数であって

$R(s,t) = \varphi(s)\psi(t) \qquad s \leqq t$ とかける。

この時

$$\mathcal{H} = \Big\{ f(t);\ f(t) = \psi(t)\, r(u(t)),\ \int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \Big|\frac{dr}{du}\Big|^2 du < +\infty$$

かつ $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)\psi(t)}}$ が存在して有限 $\Big\}$

$f, g \in \mathcal{H}$ の内積は

$$(f,g) = \int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \frac{d}{du}\Big(\frac{f}{\psi}\Big) \cdot \frac{d}{du}\Big(\frac{g}{\psi}\Big) du + \lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)g(t)}{\varphi(t)\psi(t)}$$

<u>注意</u> $\mathcal{H}$ の元の形がわかるから $\mathcal{H}$ が strictly D_s-local かつ

A が D_s-local であることがわかる。

<u>証明</u>　十分性は容易に証明できるから必要性を示す。

Simple Markov だから任意の $s<t$ に対し

$P_{\mathscr{X}(D_s)} R(t,\cdot) = a(s,t) R(s,\cdot)$ と表わされる。

従って $R(s,\cdot)$ との内積をとって $R(s,t) = a(s,t) R(s,s)$。

さらに $s<u<t$ に対して

$a(s,t) R(s,\cdot) = P_{\mathscr{X}(D_s)} P_{\mathscr{X}(D_u)} R(t,\cdot) = P_{\mathscr{X}(D_s)}(a(u,t) R(u,\cdot))$

$= a(s,u) a(u,t) R(s,\cdot)$。

従って

$$R(s,t) = a(s,u) a(u,t) R(s,s)$$
$$= \frac{R(s,u)}{R(s,s)} \frac{R(u,t)}{R(u,u)} R(s,s)$$

故に

(1)　$s<u<t$ に対し

$$R(s,t) = \frac{R(s,u) R(u,t)}{R(u,u)}$$

(1) から直ちに任意の s,t に対して $R(s,t) \neq 0$ がわかる。

今任意に一点 t_0 を固定して

$$\psi(t) = \frac{R(t_0,t)}{R(t_0,t_0)} \quad \text{if} \quad t_0 \leq t$$
$$= \frac{R(t,t)}{R(t,t_0)} \quad \text{if} \quad t \leq t_0$$ とおき

$$u(t) = \frac{R(t,t)}{(\psi(t))^2} > 0$$ とおくと

$u(t)$は単調非減少である．実際 $t_0<s<t$ の時は

(1)を使って

$$u(t)-u(s)=\frac{R(t,t)R(t_0,t_0)}{R(t_0,t)^2}-\frac{R(t_0,t_0)^2R(s,s)}{R(t_0,s)}$$

$$=\frac{R(t_0,t_0)^2R(s,s)\left(R(s,s)R(t,t)-R(s,t)^2\right)}{R(t_0,s)^2\,R(s,t)^2}\geq 0$$

他の場合も結局(1)と $R(s,s)R(t,t)\geq R(s,t)^2$ を使って同様に示される。

次に

$$\varphi(t)=\psi(t)\,u(t)\qquad\qquad s\leq t$$

と表わされる．実際

(i) $t_0\leqq s\leqq t$ の時　定義式と(1)より

$$\varphi(s)\varphi(t)=\varphi(s)\psi(t)u(s)=\frac{\psi(t)}{\psi(s)}R(s,s)$$

$$=\frac{R(t_0,t)}{R(t_0,t_0)}\cdot\frac{R(t_0,t_0)}{R(t_0,s)}\,R(s,s)$$

$$=\frac{R(t_0,s)R(s,t)}{R(s,s)}\cdot\frac{R(s,s)}{R(t_0,s)}=R(s,t)$$

(ii) $s\leqq t_0\leq t$ の時

$$\varphi(s)\varphi(t)=\frac{\psi(t)}{\psi(s)}\,R(s,s)$$

$$=\frac{R(t_0,t)}{R(t_0,t_0)}\cdot\frac{R(s,t_0)}{R(s,s)}\cdot R(s,s)$$

$$=R(s,t)$$

(iii) $S \leq t \leq t_0$ の時

$$\varphi(s)\psi(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(s)} R(s,s)$$

$$= \frac{R(t,t)}{R(t,t_0)} \frac{R(s,t_0)}{R(s,s)} R(s,s)$$

$$= \frac{R(t,t)}{R(t,t_0)} \cdot \frac{R(s,t)\,R(t,t_0)}{R(t,t)} = R(s,t)$$

注意　$\varphi(t), \psi(t)$ は定数倍を除いて一意

即ち $R(s,t) = \overline{\varphi}(s)\,\overline{\psi}(t)$ $(s \leq t)$ かつ $\overline{\varphi}(t)/\overline{\psi}(t) = \overline{u}(t)$

の時定数 λ が存在して $\overline{\varphi}(t) = \lambda\varphi(t)$, $\lambda\overline{\psi}(t) = \psi(t)$

$\lambda^2\overline{u}(t) = u(t)$。

次に $\mathcal{H}$ が Hilbert 空間になることを示そう.

$f \in \mathcal{H}$ に対し　$(f,f) = 0$ とすると

$\varphi(t)\psi(t) = \psi(t)^2 u(t) = R(t,t) > 0$ より

(2) $\displaystyle\int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \left|\frac{d}{du}\left(\frac{f}{\psi}\right)\right|^2 du = 0$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{|f(t)|^2}{\varphi(t)\psi(t)} = 0$

(2) より $\displaystyle\frac{d}{du}\left(\frac{f}{\psi}\right) = r'(u) = 0 \quad \forall u \in (u(-\infty), u(+\infty))$ a.e. du

(3) より $\displaystyle\frac{|f(t)|^2}{\varphi(t)\psi(t)} = \left(\frac{f(t)}{\psi(t)}\right)^2 \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = \frac{r(u(t))}{u(t)} \longrightarrow 0 \quad (t \to -\infty)$

ところが　$u(t)$ は正の非減少関数だから　$\lim_{t\to-\infty} 1/u(t) < +\infty$

従って　$\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to-\infty} r(u(t)) = 0$

$$r(u(t)) - r(u(-\infty)) = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} \frac{dr}{du}\,du$$

故に

$$r(u) = 0, \quad \text{従って} \quad f(t) \equiv 0$$

$\mathcal{H}$ の完備性は $L^2[(u(-\infty), u(+\infty)), du]$ の完備性より明らか。
次に任意に固定した s に対し $R(s,\cdot)$ が $\mathcal{H}$ の元に属し，
再生核の性質を満すことを調べる。

$$\begin{aligned} R(s,t) &= \varphi(s)\varphi(t)u(t) \quad &\text{if} \quad t \leq s \\ &= \varphi(s)\varphi(t) \quad &\text{if} \quad t \geq s \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left(\frac{R(s,t)}{\varphi(t)}\right) &= \varphi(s) \qquad & t \leq s \\ &= 0 \qquad & t \geq s \end{aligned}$$

従って

$$\int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \left[\frac{d}{du}\left(\frac{R(s,t)}{\varphi(t)}\right)\right]^2 du = \varphi(s)^2(u(s) - u(-\infty)) < +\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{R(s,t)^2}{\varphi(t)\varphi(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\varphi(t)\varphi(s)^2}{\varphi(t)} = \varphi(s)^2 u(-\infty) < +\infty .$$

故に $R(S,\cdot)\in\mathcal{H}$。任意の $f(t)=\varphi(t)\,r(u(t))\in\mathcal{H}$ に対し

$$(f, R(S,\cdot)) = \int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \frac{d}{du}\left(\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right) \frac{d}{du}\left(\frac{R(S,t)}{\varphi(t)}\right) du + \lim_{t\to-\infty} \frac{R(S,t)f(t)}{\varphi(t)\varphi(t)}$$

$$= \int_{u(-\infty)}^{u(S)} \varphi(S)\frac{dr}{du}\,du + \lim_{t\to-\infty} \varphi(S)\frac{f(t)}{\varphi(t)}$$

$$= \varphi(S)(r(u(S)) - r(u(-\infty)) + \varphi(S)\,r(u(-\infty))$$

$$= \varphi(S)\,r(u(S)) = f(S)$$

<u>例3.</u> $T=0, T$ として $R^1\times R^1$ 上で定義された reproducing kernel $R(s,t)$ が定常 即ち $R(S,t)=R(S-t)=R(t-S)$ を仮定する

$D_{s,t}=\{u;\ s<u<t\}\ (0<S<t<T)$

$\partial\mathcal{H}(D_{s,t})=\{R(S,\cdot),\ R(t,\cdot)\}$ で張られる $\mathcal{H}$ の閉部分空間

$\mathcal{H}^-(D_{s,t})\equiv\{R(u,\cdot);\ \ 0<u\leq S,\ t\leqq u<T\}$ で張られる $\mathcal{H}$ の閉部分空間。

$\mathcal{H}^+(D_{s,t})\equiv\{R(u,\cdot);\ \ S\leq u\leq T\}$ 〃

この時 T を固定して任意の $0<S<t<T$ に対して $\mathcal{H}^{+|-}(D_{s,t})=\partial\mathcal{H}(D_{s,t})$ が成り立つ時 reciprocal process (Doob) と呼ぶ。この時 $R(t)$ は次の3つの内のいずれかである。[4]

(i) $R(t) = e^{-at}$,　　$0 \leq t \leq T$　　$a > 0$

(ii) $R(t) = \cos at$,　　$0 \leq t \leq T$.　　$T \leq \frac{\pi}{a}$

(iii) $R(t) = 1 - at$　　$0 \leq t \leq T$　　$0 \leq a \leq \frac{2}{T}$

定常でない場合には Yu. I. Golosov [13] であつかってある。

例4. $T = R^d$ で $R(s, t)$ が R^d の平行移動に対して
不変(Homogeneous)な場合又は回転群に対して不変な場合
(isotropic)な場合。
M. I. Yadrenko [15]　　　. E. Wong [12]に論じられている。

例5. $\mathcal{H}$ が $\mathcal{D}_{L^2}^m$ ($m \geq [\frac{n}{2}] + 1$) と同値なノルムの完備化となっている場合 井上[3], L.D. Pitt[10] に論じられている。

例6. $\mathcal{H}$ が $\mathcal{D}_M$ (ultra-distribution) を dense に含む時
小谷[6]に論じられている。

注意 例5 例6 の場合は共に $\mathcal{H}$ が strictly D-local である。

§3.

この節では Gel'fand-Vilenkin の generalized Gaussian random process に対応する場合に §1 と平行した議論を行う。
即ちパラメーター空間 $T=\mathcal{D}(R^d)$ (carrier compact C^∞ 実関数の全体, 定義およびそのいいかえの段階ではトポロジーは考えない) 上の正定値核 $R(\varphi,\phi)$ で次の条件が満たされているとする。

<u>仮定</u>　任意の実数 $a_1,\cdots,a_n$　$b_1,\cdots b_m$ と $\mathcal{D}(R^d)$ の元 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, $\phi_1,\cdots\phi_m$ に対し

$$R\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i,\ \sum_{j=1}^{m}b_j\phi_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_jR(\varphi_i,\phi_j)$$

$\mathcal{H}=\{R(\varphi,\cdot)\,;\,\varphi\in\mathcal{D}(R^d)\}$ を reproducing kernel にする $\mathcal{D}(R^d)$ 上の実 Hilbert 空間

$\mathcal{H}$ の元は $\mathcal{D}(R^d)$ 上の関数からなるが §1 の場合のように普通の点関数の場合と同様な議論を進めるためには $\mathcal{H}$ の元が $\mathcal{D}(R^d)$ の開集合で 0 であること及び $\mathcal{H}$ の元の carrier の概念が定義されなければならない。
そのために次の補題を準備する。

補題4. $\mathcal{H}$の元は$\mathcal{D}(R^d)$上の線型汎関数である。

即ち $u(a\varphi+b\psi)=au(\varphi)+bu(\psi)$

証明 仮定とreproducing propertyより

$$u(a\varphi+b\psi)=(u,\ R(a\varphi+b\psi,\cdot))$$
$$=a(u,\ R(\varphi,\cdot))+b(u,\ R(\psi,\cdot))$$
$$=au(\varphi)+bu(\psi)$$

(q.e.d.)

$\mathcal{H}$の元uがR^dの部分集合G上で0である($u=0$ on G)とは任意の$\varphi\in\mathcal{D}(R^d)$で$\mathrm{car}(u)\in G$なる元に対して$u(\varphi)=0$となる時をいう。この時

補題5. D_i $i=1,2,3\cdots$ 開集合

$u\in\mathcal{H}$が $u=0$ on $D_i \Rightarrow u=0$ on $\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$

証明 $\mathcal{D}(R^d)$の元はすべてcarrier compactだから

$u=0$ on $D_1, D_2 \Rightarrow u=0$ on $D_1\cup D_2$を証明すればよい。

$\varphi\in\mathcal{D}(R^d)$, $\mathrm{car}(\varphi)\subset D_1\cup D_2$とする。 $^\exists G_1, G_2$ 開集合

such that $G_1\cup G_2\supset \mathrm{car}(\varphi)$ かつ $D_1\supset\overline{G_1}$, $D_2\supset\overline{G_2}$

故に $\exists \alpha_i \in \mathcal{D}(R^d)$ such that $\alpha_i = 1$ on $\overline{G_i}$

$car(\alpha_i) \subset D_i$, $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$.

故に

$$\varphi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2}\varphi \quad \text{on} \quad car(\alpha_i)$$
$$= 0 \qquad \text{on} \quad (car(\alpha_i))^c$$

とおくと $\varphi_i = 0$ on $car(\alpha_i) - G_1 \cup G_2$ かつ $G_1 \cup G_2$ 上で $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. 従って $\varphi_i \in C^\infty$, $car(\varphi_i) \subset D_i$ $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$.
故に補題4.と仮定から $u(\varphi) = u(\varphi_1 + \varphi_2) = u(\varphi_1) + u(\varphi_2) = 0$

補題5から $u \in \mathcal{H}$ の carrier が定義される.

即ち $\Lambda = \{D$ 開集合; $u = 0$ on $D\}$ とする時

$$Car(u) = (\bigcup_{D\in\Lambda} D)^c。$$

故に§1とまったく同じ議論ができてマルコフ性が characterize されるが さらに次のようにいいかえることができる。

<u>定義9.</u> $R(\varphi, \psi)$ が D-orthogonal

$\Longleftrightarrow$ $car(\varphi) \subset D$ かつ $car(\varphi) \cap car(\psi) = \emptyset$ ならば

$$R(\varphi, \psi) = 0$$

補題 6. $R(\varphi,\psi)$ が D-orthogonal

$\Longrightarrow$ (i) $car(\varphi)\subset D$ ならば $car(R(\varphi,\cdot))\subset car(\varphi)\subset D$

(ii) $\{R(\varphi,\cdot);\ car(\varphi)\subset D\}$ は $\{u\in\mathcal{H};\ car(u)\subset D\}$ の中で dense

証明. (i) $car(\varphi)\subset D$, $car(\varphi)\cap car(\psi)=\phi$ ならば仮定より $R(\varphi,\psi)=0$ 故に $car(R(\varphi,\cdot))\subset(car(\varphi))\subset D$

(ii) $u\in\mathcal{H}$ $car(u)\subset D$ かつ任意の φ such that $car(\varphi)\subset D$ に対して $(u,R(\varphi,\cdot))=0$ とすると $(u,R(\varphi,\cdot))=u(\varphi)=0$

従って $u=0$ on D 一方仮定から $u=0$ on $(car(u))^c$

従って補題5から $u=0$ on $(car(u))^c\cup D=R^d$

故に $u=0$ in $\mathcal{H}$ (q.e.d.)

定理 11. $R(\varphi,\psi)$ が D-orthogonal

$\Longrightarrow$ A が D-local

証明. $u=0$ on D とする時 任意の v such that $car(v)\subset D$ に対して $(u,v)=0$ をいえばよい。ところが補題6より任意の φ such that $car(\varphi)\subset D$ に対して $(u,R(\varphi,\cdot))=0$ をいえばよい。仮定より $u=0$ on D だから $(u,R(\varphi,\cdot))=u(\varphi)=0$

故に $Au=0$ on D.

<u>補題7.</u> $R(\varphi,\varphi)$ が D-orthogonal かつ $\overset{c}{\overline{D}}$-orthogonal

$\Longrightarrow$ (i) $car(\varphi) \subset (\partial D)^c$ ならば $car(R(\varphi,\cdot)) \subset car(\varphi) \subset (\partial D)^c$

(ii) $\{R(\varphi,\cdot)\,;\, car(\varphi) \subset (\partial D)^c\}$ は $\{u \in \mathcal{H}\,;\, car(u) \subset (\partial D)^c\}$ で dense.

<u>証明.</u> (i) $car(\varphi) \subset (\partial D)^c$ ならば $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(R^d)$ $car(\varphi_1) \subset D$, $car(\varphi_2) \subset \overset{c}{\overline{D}}$ と分解できるから補題6の証明と同様にして $car(R(\varphi,\cdot)) \subset car(\varphi)$

(ii) 補題6の証明とまったく同様 (q.e.d.)

<u>定理12.</u> $R(\varphi,\varphi)$ が D-orthogonal かつ $\overset{c}{\overline{D}}$-orthogonal

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$ が weakly D-local.

<u>証明</u> 補題7と $R(\varphi,\cdot)$ の線型性から $car(\varphi) \subset (\partial D)^c$ なる φ に対し $R(\varphi,\cdot) \in \{u_1 + u_2\,;\, car(u_1) \subset D,\ car(u_2) \subset \overset{c}{\overline{D}}\}$ かつ dense に存在する. 従って weakly D-local. (q.e.d.)

<u>定理13.</u> $R(\varphi,\varphi)$ が D-orthogonal かつ $\overset{c}{\overline{D}}$-orthogonal

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$ は D-Markov

<u>証明</u> 定理1, 3, 11, 12より明らか. (q.e.d.)

$\mathcal{F}$ を $(\overline{D})^i = D$ を満す開集合のある族で任意の disjoint な二つの開集合を分離していると仮定する。即ち $F_1 \cap F_2 = \phi$, 開集合に対し $^\exists D \in \mathcal{F}$ such that $D \supset F_1$, $\overline{D} \cap F_2 = \phi$。この時

<u>定理14.</u> 任意の $D \in \mathcal{F}$ に対して

(i) $u \in \partial\mathcal{H}(D) \Rightarrow car(u) \subset \partial D$

(ii) $\mathcal{H}$ は D-Markov

$\Longrightarrow$ $R(\varphi, \psi)$ は orthogonal 即ち

$car(\varphi) \cap car(\psi) = \phi \Rightarrow R(\varphi, \psi) = 0$

<u>証明</u> 仮定より $car(\varphi) \cap car(\psi) = \phi$ ならば $^\exists D \in \mathcal{F}$ such that $D \supset car(\varphi)$ かつ $\overline{D} \cap car(\psi) = \phi$、仮定(i)より $u \in \partial\mathcal{H}(D)$ に対し $(u, R(\varphi, \cdot)) = u(\varphi) = 0$ かつ定義から $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{H}(D)$ だから $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{H}_0^-(D) \equiv \mathcal{H}^-(D) \ominus \partial\mathcal{H}(D)$

一方 $car(\psi) \subset \overline{D}^c$ だから $R(\psi, \cdot) \in \mathcal{H}^+(D)$ 故に仮定(ii)より

$(R(\varphi, \cdot)), R(\psi, \cdot)) = R(\varphi, \psi) = 0$

$R(\varphi, \psi)$ が Schwartz の意味の distribution である時は Fernique[1]によって次のような表現定理が得られている。

定理15.

(i) $R(\varphi,\psi) \equiv \langle R, \varphi\otimes\psi \rangle$ は $\mathcal{D}(R^d \times R^d)$ 上の Schwartz の意味の distribution である.

(ii) $\mathrm{car}(\varphi) \cap \mathrm{car}(\psi) = \phi \to R(\varphi,\psi) = 0$

$$\Longrightarrow \quad R(\varphi,\psi) = \int_{R^d} \left(\sum_{k,l} D^k\varphi \, D^l\psi \, dm_{k,l} \right)$$

$$D = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_d}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}} \qquad k_1+\cdots+k_d = k$$

Σ は任意のコンパクト集合上で有限和.

注意　$dm_{k,l}$ は必ずしも正の測度ではなく又表現も一意ではない。例えば

$$R(\varphi,\psi) = \int_R (\varphi+\varphi'')^2 dx = \int_R (\varphi^2+\varphi''^2 - 2\varphi'^2) dx$$

定理16.　特に $d=1$ の時 $R\times[0,1]$ 上の正の測度が存在して

$$R(\varphi,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \left(\sum_k a_k(x,t) \frac{d^k}{dx^k}\varphi(x) \right)^2 dm(x,t)$$

とかける. [1, Theorem IV. 1.3]

BIBLIOGRAPHY

[1] X.Fernique; Processus Linéaires, Processus Généralisés, Ann.Inst.Fourier, 17(1967), 1-92.

[2] I.M.Gel'fand and N.Ya.Vilenkin; Generalized functions. vol.4.

[3] K.Inoue; 多次元径数をもつ Gaussian process のある class について, 修士論文(1970).

[4] B.Jamison; Reciprocal processes, the stationary Gaussian case, Annal.Math.Stat. vol.41(1970), 1624-1630.

[5] F.Knight; A remark on Markovian germ fields, Z.Wahr./Geb. 15(1970), 291-296.

[6] S.Kotani; R^d-径数正規定常過程のマルコフ性について, 修士論文(1972).

[7] N.Levinson and H.P.McKean,Jr.; Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta Math. vol. 112(1964), 99-143.

[8] H.P.McKean, Jr.; Brownian motion with a several dimensional time, Theory Prob. Appl. 8(1963),335-354.

[9] G.M.Molchan; Characterization of Gaussian fields with Markov property, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. (Soviet Math. Dokl.) vol.12(1971), 563-566.

[10] L.D.Pitt; A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter,Archive for Rational Mechanics and Analysis, 17(1971), 367-391.

--- ; On two problems from the spectral theory of stationary Gaussian processes, pre-print.

[11] K.Urbanik; Generalized stationary processes of Markovian character, Studia Math. XXI (1962), 261-282.

[12] E.Wong; Homogeneous Gauss-Markov random fields, Ann. Math.Stat. 40(1968).

(13) Ю.И.Голосов; Об одном виде стохастической зависимости для гауссовских процессов.
Теория Вероятностей Математическая Статистика, 5 (1971), 34-42.

(14) Т.И.Мирская, А.С.Пабединскайте, А.А.Темпельман;
Гильбертовы пространства некоторых воспроизводящих ядер и эквивалентность гауссовских мер.
Литовский Математический Сборник, 7 (1968), 459-469.

(15) М.И.Ядренко; Изотропные случайные поля марковского типа в эвклидовом и гильбертовом пространствах,
Труды Всесоюзного Совещания по Теории Вероятностей и Математической Статистике, (1958), 263-279.

--- ; Изотропные случайные поля марковского типа,
Теория Вероятностей Математическая Статистика, 5 (1971), 128-137.