数理解析研究所講究録
第151巻 1972年 117-122

Gaussian process の Markov 性の定義に関する一つの注意

名市大 教養　井原俊輔

Pitt [1] は Gaussian process の Markov 性が、Hilbert 変換によって特徴づけられることを注意した。ここでは Markov 性の定義に関する、河野 [2] の議論との関連を見ながら Pitt の結果を紹介する。

[2] と同様, $\{X(t), t\in R^n\}$ を real valued Gaussian random field とする。以下, 記号, 言葉は [2] と全く同じものを使いますので, その定義については [2] を見て下さい。

以下, 集合 $D\in\mathcal{O}$ を fix して考える。R^n 上の関数 $u(t)$ に対し, 次の様な operator $\hat{H}$ $(\equiv \hat{H}_D)$ を考える。

$$\hat{H}u(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t\in D \\ -u(t), & t\notin D \end{cases} \qquad (1)$$

関数 $u(t)$ に対し, $u^-(t)$, $u^+(t)$ を次の様に定義する。

$$u^-(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t\in D \\ 0, & t\notin D \end{cases} \qquad u^+(t) \equiv \begin{cases} 0, & t\in D \\ u(t), & t\notin D. \end{cases}$$

この記号を使えば

$$\hat{H}u(t) = u^-(t) - u^+(t), \quad t \in R^n \tag{1'}$$

である。

次に $\mathcal{H}$ の subspace $\mathcal{H}_0$ を次式で定義する。

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{O \ni G \supset \partial D} \mathcal{H}_0(G)} \tag{2}$$

（$\overline{\cdot}$ は$\mathcal{H}$における closure）　$R^n \supset {}^\forall F$ closed set に対し

$\bigcup_{\substack{G \supset F \\ G:\text{open}}} \mathcal{H}_0(G) = \{u \in \mathcal{H}\ ;\ \text{car.}\, u \subset F^c\}$ が成り立つことに

注意すると，次のことが容易にわかる。

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \text{car.}\, u \subset (\partial D)^c\}} \tag{2'}$$

Markov 性を上の operator $\hat{H}$ によって特徴づけることが目的である。以下のことが証明できる。

<u>Proposition 1</u>　$\hat{H}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0 \Rightarrow \mathcal{H}$は strictly D-local.

（strictly D-local の定義は [2] の Def. 4 を見よ）

<u>証明</u>　$u \in \mathcal{H}$, $\text{car.}\, u \subset (\partial D)^c$ とすると，(2') より $u \in \mathcal{H}_0$

よって $u = u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0$，かつ仮定より $\hat{H}u = u^- - u^+ \in \mathcal{H}_0$

$$\therefore \quad u^- = \tfrac{1}{2}(u + \hat{H}u) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}.$$

<u>Proposition 2</u>　$\mathcal{H}$がD-regular のとき，$u, \hat{H}u \in \mathcal{H}_0$ なるすべての u に対し，$\|\hat{H}u\| = \|u\| \Rightarrow$ A は D-local.

（ここで，$\|\cdot\|$ は$\mathcal{H}$のノルム。又，D-regular, A が D-local の定義は [2] の Def. 6, 8 を見よ.)

証明 $u\in\mathcal{H}_0(D)$, $v\in\mathcal{H}$ $\mathrm{car}\, v\subset D$ とする。A が D-local をいうには, $(u,v)=0$ をいえばよい。(ここで, $(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{H}$ での内積) $u\in\mathcal{H}_0(D)$ より $u\perp\mathcal{H}(D)$ ([2] の Lemma 1) $\mathcal{H}$ が D-regular だから $u\perp\mathcal{H}^-(D)$.

$$\therefore\quad u\in(\mathcal{H}^-(D))^\perp=\Big(\bigcap_{\mathcal{O}\ni G\supset\bar{D}}\mathcal{H}(G)\Big)^\perp=\overline{\Big(\bigcup_{\mathcal{O}\ni G\supset\bar{D}}\mathcal{H}(G)^\perp\Big)}$$

$$=\overline{\bigcup_{\mathcal{O}\ni G\supset\bar{D}}\mathcal{H}_0(G)}\subset\mathcal{H}_0$$

$$\therefore\quad u\in\mathcal{H}_0.$$

又, (2′) より $v\in\mathcal{H}_0$, 故に $u+v\in\mathcal{H}_0$.

一方, $u=0$, on D, $v=0$ on $\bar{D}$ に注意すると,

$$\hat{H}(u+v)=u-v\in\mathcal{H}_0$$

従って, 仮定より.

$$\|u+v\|=\|\hat{H}(u+v)\|=\|u-v\|$$

$$\therefore\quad (u,v)=0$$

Proposition 3 $\{X(t)\}$ が D-Markov $\Rightarrow$ $\mathcal{O}\ni{}^\forall G\supset\partial D$ に対し $\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

証明 $u=u^-+u^+\in\mathcal{H}_0(G)$ とす. $\{X(t)\}$ が D-Markov だから, $\mathcal{H}$ は strictly D-local ([2] Proposition 2)

$\therefore$ $u^-\in\mathcal{H}$, 従って $u^+\in\mathcal{H}$.

$u\in\mathcal{H}(G)$ だから, 結局, $u^-, u^+\in\mathcal{H}_0(G)$

$$\therefore \quad \hat{H} u = u^- - u^+ \in \mathcal{H}_0(G).$$

又, $\hat{H}(u^- - u^+) = u^- + u^+ = u$ だから結局, $\hat{H}$ は $\mathcal{H}_0(G)$ を $\mathcal{H}_0(G)$ に onto に map することがわかった。

次に $\hat{H}$ が $\mathcal{H}_0(G)$ 上で isometry であることを示す。

$\{X(t)\}$ が D-Markov だから, $(u^-, v^+) = 0$ ($\because$ [2], ~~Lemma~~ Proposition 2 の証明より)

$$\therefore \quad \|u\|^2 = \|u^- + u^+\|^2 = \|u^-\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\|\hat{H}u\|^2 = \|u^- - u^+\|^2 = \|u^-\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\therefore \quad \|\hat{H} u\| = \|u\| \quad \text{for } {}^\forall u \in \mathcal{H}_0(G).$$

以上の3つの Proposition から次のことがわかる。

<u>Theorem</u> $\{X(t)\}$ が D-Markov $\Longrightarrow$ $\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary。

もし, $\mathcal{H}$ が D-regular ならば, 逆も成立。

<u>証明</u> 後半のことは, Proposition 1, 2 と, [2] の Proposition 1, 3 から明らか。

(前半) ${}^\forall u \equiv u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0$ に対し, ${}^\exists u_n \equiv u_n^- + u_n^+ \in \mathcal{H}_0(G_n)$ $u_n \to u$ (in $\mathcal{H}$)。 ただし, $\mathcal{O} \ni G_n \supset \partial D$, $G_n \searrow$.

Proposition 3 で示したように, $u_n^-, u_n^+ \in \mathcal{H}_0(G_n)$, $(u_n^-, u_m^+) = 0$

従って, $\{u_n^-\}$, $\{u_m^+\}$ も各々 Cauchy 列になり, $u_n^- \to u^-$, $u_n^+ \to u^+$ (in $\mathcal{H}$) がわかる,

$$\therefore \quad u^-, u^+ \in \mathcal{H} \quad \text{かつ} \quad (u^-, u^+) = 0$$

後は Proposition 3 と同様に, $\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものが, unitary であることがわかる。

特に, $\{X(t), t \in R^1\}$ が stationary Gaussian process の場合には, Theorem の条件は, Hilbert 変換 H;

$$HF(x) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{F(x-y)}{y} dy, \quad (F \in L^1) \qquad (3)$$

の言葉で表される。即ち, $\{X(t)\}$ の spectral density を Δ とし, $L^2_{\Delta^{-1}} = L^2(R^1; \Delta^{-1}(x)dx)$ とし,

$$\mathcal{H}_\varepsilon \equiv \{F \in L^2_{\Delta^{-1}};\ \hat{F}(t) = 0 \text{ for } |t| \leq \varepsilon\}$$

($\hat{F}$ は F の Fourier 変換)

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon} \qquad (\overline{\cdot} \text{ は } L^2_{\Delta^{-1}} \text{ での closure})$$

とおくと,

Corollary (Pitt [1])

$\{X(t)\}$ が Markov $\Longleftrightarrow$ Hilbert 変換 H を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

(今の場合, $\{X(t)\}$ が $(-\infty, 0)$-Markov のとき, 単に $\{X(t)\}$ は Markov という)

証明 写像, $L^2_{\Delta^{-1}} \ni F \longleftrightarrow \hat{F} \in \mathcal{H}$ が $L^2_{\Delta^{-1}}$ と $\mathcal{H}$ を unitary に対応させていることと, Hilbert 変換 H に対し, 変換 $\hat{H}$ を

$$\hat{H}\hat{F} \equiv \widehat{HF} \quad (F \in L^2)$$

で与えると，$\hat{H}$に対し(1)が a.e. $t \in R^1$で成り立つ($D = (-\infty, 0)$として)ことに注意すると，Corollary は Theorem の言い直しにすぎないことがわかる。

文　献

[1] Pitt, L.D. On two problems from the spectral theory of stationary Gaussian processes. to appear.

[2] 河野敬雄 多重マルコフ性の定義といくつかの例について