

特殊な Markov 性をもつ

Random field

名大 理 久保 泉

§ 1. 序

この報告の一つの目的は, Fortus [1] の紹介だが, 彼が
そこで扱っている問題の背景は理解出来ないので, 他の例と
共に, 特殊な Markov 性の例としての立場から紹介したい。

他の諸氏の稿に和して, 次のような記号を与えておこう。

$\{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$; 与えられた random field.

$\mathcal{B}(G) \equiv \sigma\{X(t); t \in G\}, \quad G \subset \mathbb{R}^d$

$\mathcal{B}^-(D) \equiv \bigcap_{D \subset G: \text{open}} \mathcal{B}(G)$ 過去の σ -field

$\mathcal{B}^+(D) \equiv \bigcap_{D^c \subset G: \text{open}} \mathcal{B}(G)$ 未来の σ -field

$\partial\mathcal{B}(D) \equiv \bigcap_{\partial D \subset G: \text{open}} \mathcal{B}(G)$ 現在の σ -field

$\mathcal{B}^{+/-}(D)$: minimal splitting field

定義 X が D -Markov $\Leftrightarrow \mathcal{B}^{+/-}(D) = \partial\mathcal{B}(D)$

他の諸氏の稿で詳しく述べられてあるように, homogeneous な Gaussian random field が Markov 性をもつ条件は, その spectrum の言葉で調べられている。又, 内挿, 外挿は, 微分方程式の境界値問題に密接な関係があり, 特に, 楕円型の場合は, Green 関数を使って具体的に, 内外挿を行うことが出来る。

§2. では, 丁度, uniform motion が Markov 過程の中で特殊なものと同じような意味で, 特殊な Markov 性を例として, 波動方程式を充す random field について述べる。

§3. では, 楕円型でよい例をあげ, 具体的に内挿, 外挿問題を解いて, 楕円型との異いを明らかにし, ある意味で, §2. におけるのと類似点があることを示す。

§2. 波動方程式を充す random field.

$\mathbb{R}^2(t, x)$ 上の random field $\{X(t, x)\}$ を考えよう。我々は, path 如に, $X(t, x)$ が波動方程式,

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

を充すことを仮定する。

良く知られているように、方程式(1)の解は、適当な函数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を使って、

$$(2) \quad u(t, x) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

と表わされる。

話をみやすくするためと、§3との比較のため、変数変換

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases} \quad v(\xi, \eta) = u(t, x)$$

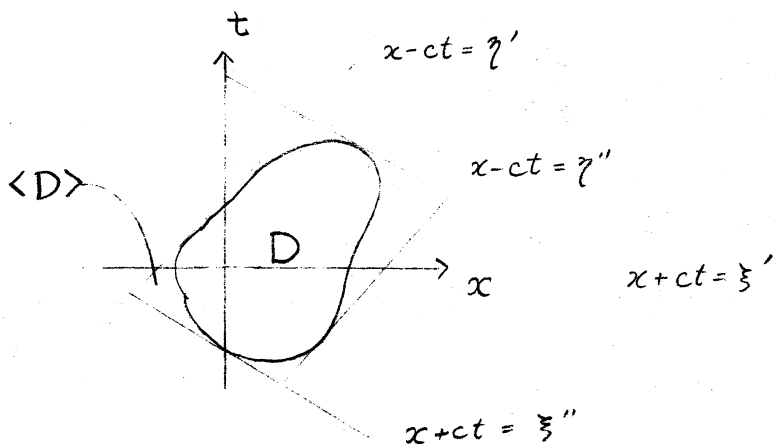
を行う。(2)から直に、

$$(4) \quad v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$(5) \quad v(\xi, \eta) = v(\xi, \eta_0) + v(\xi_0, \eta) - v(\xi_0, \eta_0)$$

なる関係が得られる。(5)式は、三点 (ξ, η_0) , (ξ_0, η) , (ξ_0, η_0) の v の値が定まれば、 $v(\xi, \eta)$ が定まることを意味している。

random field $X(t, x)$ を同じ変数変換をして、 $Y(\xi, \eta)$ で表わそう。今、連結領域 D に対して、平行四辺形 $\langle D \rangle$ を図のように定義する。



式(5)から、 $\langle D \rangle$ の隣り合った二辺の上で、 $X(t, x)$ が与えられれば、 $\langle D \rangle$ の内部の値も定まる。この事実に注目すれば、次の式は、明らかになる。

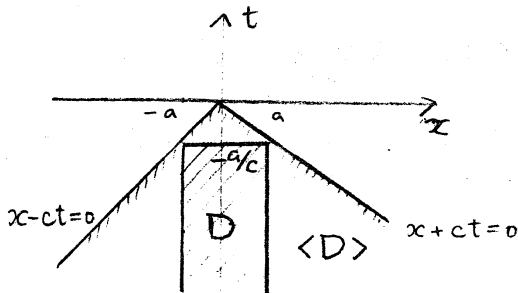
$$\begin{aligned} \partial B(D) &= \partial B(D) = B(\langle D \rangle) \\ (b) \quad B^+(D) &= B(R^2) \end{aligned}$$

従って、

$$\partial B(D) = B^-(D) \cap B^+(D) = B^{+/-}(D) = B^-(D)$$

が得られ、Markov 性をもつことがわかる。しかし、非常に、特殊な case であることは明らかである。

Fortus は、連続で homogeneous な Gaussian random field に対し、 D として、次図のような場合を扱っている



る。 $X(t, x)$ が, homogeneous ならば, そのスペクトル $F(\cdot)$ は, 二直線, $x=ct$, $x=-ct$ の上に縮退していて, random field は, 二つの定常過程, $F(\xi, \omega)$, $G(\eta, \omega)$ と一つの確率変数 H によって,

$$(7) \quad X(t, x) = F(x+ct) + G(x-ct) + H$$

と表現され, F, G, H は互に直交し, F, G のスペクトルは, 原点に台をもたない。

上の結果から, D で X が与えられるならば, $\langle D \rangle$ でわかり $\{X(t, x) = Y(\xi, \eta); \xi, \eta \leq 0\}$ が与えられることになる。大数の法則から, $\{F(\xi); \xi \leq 0\}$, $\{G(\eta); \eta \leq 0\}$, H が, 夫々, 得られ $\langle D \rangle$ 中 $(t_0, x_0) = (\xi_0, \eta_0)$ を外挿する問題は, F , 及び G に対して, $F(\xi_0)$, $G(\eta_0)$ を外挿する問題に帰着される。

$$\text{例 1. } E[X(t, x)X(s, y)] = e^{|x-y+c(t-s)|} + e^{|x-y-c(t-s)|}$$

この例では, F, G は, Uhlenbeck の Brown 運動になる。

従って, $X(t_0, x_0)$ の外挿 U は,

$$(8) \quad U = \begin{cases} e^{-x_0-ct_0} F(0) + G(x_0-ct_0) & x_0-ct_0 < 0, x_0+ct_0 > 0 \\ e^{-x_0-ct_0} F(0) + e^{-x_0+ct_0} G(0) & x_0-ct_0 > 0, x_0+ct_0 > 0 \\ F(x_0+ct_0) + e^{-x_0+ct_0} G(0) & x_0-ct_0 > 0, x_0+ct_0 < 0 \end{cases}$$

§ 3. 楕円型でない例

簡単のため \mathbb{R}^2 で考える。 $\{Y(\xi, \eta); (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\}$ を平均 0 の homogeneous Gaussian random field で共分散

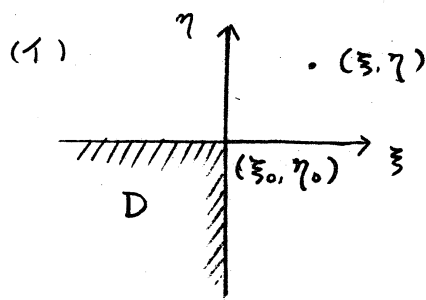
$$E[Y(\xi, \eta)Y(\xi', \eta')] = e^{-|\xi-\xi'| - |\eta-\eta'|}$$

をもつものとする。このスペクトル密度は

$$(9) \quad \Delta(\lambda, \mu) = \frac{4}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}$$

で与えられる。これは、小谷、井上、岡部、神田氏等の定式化の範囲に達して楕円型でない例である。

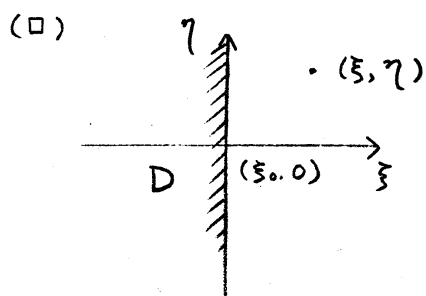
まず、外挿のことから述べると、次のようになる



D から (ξ, η) の外挿 U は

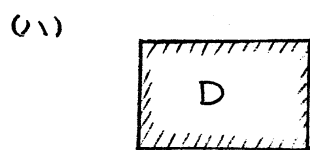
$$U = E[Y(\xi, \eta) | \mathcal{B}^-(D)]$$

$$= e^{-\xi+\xi_0 - \eta+\eta_0} Y(\xi_0, \eta_0)$$



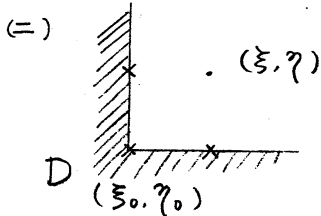
$U = E[Y(\xi, \eta) | \mathcal{B}^-(D)]$

$$= e^{-\xi+\xi_0} Y(\xi_0, \eta)$$

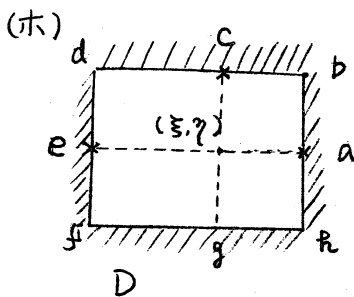


U は、 (ξ, η) の位置によって (イ) または (ロ) の case になる!

内挿は多小, 複雑で,



$$\begin{aligned}
 U &= E[Y(\xi, \eta) | \mathcal{B}^-(D)] \\
 &= e^{-\eta+\eta_0} Y(\xi, \eta_0) - e^{-\eta+\eta_0-\xi+\xi_0} Y(\xi_0, \eta_0) \\
 &\quad + e^{-\xi+\xi_0} Y(\xi_0, \eta)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 U &= E[Y(\xi, \eta) | \mathcal{B}^-(D)] \\
 &= E[Y(\xi, \eta) | Y(a), Y(b), Y(c), Y(d) \\
 &\quad Y(e), Y(f), Y(g), Y(h)]
 \end{aligned}$$

であることが確かめられる。具体的な係数は省略する。

以上の外, 内挿問題の結果は, ξ, η -軸に平行な直線で囲まれた図形に対して, 単純 Markov 性が成立することを示している。(i.e. $\mathcal{B}^{+/-}(D) = \mathcal{B}(\partial D)$!)

もっと一般の領域 D に対しても多分

$$(10) \quad U \equiv E[Y(\xi, \eta) | \mathcal{B}^-(D)] = E[Y(\xi, \eta) | \partial \mathcal{B}(D)] = E[Y | \mathcal{B}(\partial D)]$$

が成立するのであろうが, 具体的な表現は知らない。楕円型の場合のように行くのであろうか? 類推すれば, $\psi(\xi, \eta)$ を ∂D 上の連続函数とすると, 方程式

$$(11) \quad \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) u = 0$$

$$u(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta) \in \partial D$$

の解が一意に存在して、特に $\psi(x, y) = \gamma(x, y)$ としたとき、(11)の解が ψ になれば良い。事実 (イ)~(ホ)の例は (11)の解になっている。

我々の例においては、境界条件は多分 (11)の通りで良いのであろうが、一般に楕円型でない場合に、境界条件は、どのように与えればよいのか？ この解答を誰方かに御教示をお願いしたいというのが、この例を敢て取上げた理由である。

文 献

Fortus [1] On extrapolation of a random field
satisfying the wave equation. *Theory of Probability
and its applications* Vol 8, No. 2. (1963)