数理解析研究所講究録
第152巻 1972年 21-52

3次元球面内の輪環体
についての基本的性質

神戸大 理　　鈴木晋一

§0. 序

以下、PL圏での話しである。種数 p の輪環体、これを T_p で示す、とは、Euler characteristic $1-p$ の連結な1次元複体の3次元球面における正則近傍と位相同型な3次元多様体とする。

以前の論文[14]において、対 $(T_p \subset S^3)$ に関する素な分解の一意性について証明したが、二つの補題3.10と3.11はいささか不注意に書いた。このノートでは、対 $(T_p \subset S^3)$ について知られる基本的な性質を整理し、またこれの取扱いに関する基本的な手法について詳しく述べたい。最後に、津久井氏の論文[16]に述べられる特殊な場合について、分解の一意性の証明を与える。(尚、分解定理については§3参照。)

§1. 定義と準備

1.1. D^n と S^n により、標準的な n 次元胞体と n 次元球面を示す。特に、D^1 とまたは S^1 と位相同型なるものを、それぞれ単純弧、単純閉曲線という。一般に単純閉曲線に対して方向を指定していないが、必要な際は適当な方向を与えて考えていただきたい。

尚、3次元多様体はすべて、コンパクト、連結かつ方向付可能なものとする。

1.2. 定義：3次元多様体 M が irreducible とは、M における任意の2次元球面が M で3次元胞体を bound するとき、また ∂-irreducible とは、M における任意の proper な2次元胞体 C について、∂C が ∂M で2次元胞体を bound するときとする。

1.3. イソトピー：位相写像 $\psi : Y \to Y'$ のイソトピーとは、$H(y,t) = (\eta_t y, t)$ なる位相写像 $H : Y \times [0,1] \longrightarrow Y' \times [0,1]$ のことである。但し、$\eta_t : Y \to Y'$ は位相写像で、$\eta_0 = \psi$ とする。Y の部分空間 X_1 と X_2 のイソトピーとは、$\eta_1(X_1) = X_2$ なる Y の恒等写像のイソトピーである。この時、特に $X_1 \approx X_2$ で示す。

1.4. 便宜上の約束：以下の話では、3次元多様体 M に proper に埋蔵されている二つの2次元多様体 X_1 と X_2,（但し共に連結とは限らない）を考察することが多い。よく知られ

る"一般の位置"の議論により、Mの恒等写像のイソトピーが存在して $\eta_1(X_1)$ と X_2 が transversal に交わるように出来る。よって以下では、特にことわらない限り、"$X_1 \cap X_2$ は、有限個の互いに交わらない単純弧と単純閉曲線とから成り、それらは X_1 においても X_2 においても proper である。"と仮定する。

またいわゆる"最小"の曲線というのをよく利用する。即ち、$X_1 \cap X_2$ の単純閉曲線 Γ が X_1 上で<u>最小</u>であるとは、Γ が X_1 上で、$\mathring{C} \cap X_2 = \emptyset$ なる2次元胞体Cを bound するとき、また $X_1 \cap X_2$ の単純弧 γ が（X_1上で）<u>最小</u>であるとは、γ が X_1 から $\mathring{C} \cap X_2 = \emptyset$ なる2次元胞体Cを切りとるときである。今 $X_1 \cong S^2$ または $X_1 \cong D^2$ で更に $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ならば、$X_1 \cap X_2$ には少くとも一つの最小な単純弧または単純閉曲線が X_1 には存在し、更に $X_1 \cap X_2$ に単純閉曲線が含まれているならば、X_1 上には必ず最小の単純閉曲線が存在することは明らかである。

1.5. <u>補題</u>：Mを irreducible な3次元多様体、D_1 と D_2 を $\partial D_1 = \partial D_2$ なるMで proper な2次元胞体とする。すると、∂M を固定したMにおける D_1 と D_2 のイソトピーが存在する。

証明：略

1.6. <u>定義</u>：(1) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を、それぞれ 2次元閉多様体F上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とする。$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ が

互いに交叉するような有限個の点から成り、更に$\mathcal{A}$の一つの弧と$\mathcal{B}$の一つの弧によってboundされるF上の2次元胞体が全く存在しないとき、$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$とは簡約化されているという。

(2) Mを3次元多様体、$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$を、それぞれMにおける互いに交叉しないproperな2次元胞体の系とする。$\partial\mathcal{C}$と$\partial\mathcal{D}$が∂Mで簡約化されており、更に$\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$が単純閉曲線を含まないとき、$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$とは簡約化されているという。

1.7. 補題(Epstein [2])：$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$とを、それぞれ2次元閉多様体F上の、互いに交わらない単純閉曲線の系とすると、Fの恒等写像のイソトピーで、$\eta_1(\mathcal{A})$と$\mathcal{B}$が簡約化されているものが存在する。

1.8. 補題：Mをirreducibleな3次元多様体、$\mathcal{C}$と$\mathcal{D}$とをそれぞれ互いに交わらないMにおけるproperな2次元胞体の系とする。更にHを1.7で得られる$\partial\mathcal{C}$と$\partial\mathcal{D}$とを簡約化する∂Mの恒等写像のイソトピーとする。すると、Hは、$\eta_1(\mathcal{C})$と$\mathcal{D}$とを簡約化するようなMの恒等写像のイソトピーに拡張できる。

証明：Epstein [2]の議論より、Hは明らかにMの恒等写像のイソトピー，再びHで示す、に拡張できる。$\eta_1(\mathcal{C})\cap\mathcal{D}$が単純閉曲線を含んでいるなら、Mのirreducibleの条件を用いて、$\eta_1(\mathcal{C})$上の最小の単純閉曲線から順に、∂Mを固定するよ

うなMのイソトピーで単純閉曲線を除去すればよい。

1.9. <u>Meridian</u> と <u>Meridian-disk</u>：M を $\partial M \neq \emptyset$ でかつ ∂M が連結な3次元多様体とする。∂M 上の単純閉曲線 a について、$a \simeq 1$ (in M) かつ $\partial M - a$ が連結のとき、a を M の <u>meridian</u> と呼ぶ。互いに交わらない M の meridian の集まり $\{a_1, \cdots, a_n\}$ について、$\partial M - (a_1 \cup \cdots \cup a_n)$ が連結のとき $\{a_1, \cdots, a_n\}$ を M の <u>meridian の系</u>と呼ぶ。更に、M における proper な2次元胞体 A と、互いに交わらない proper な2次元胞体の集まり $\{A_1, \cdots, A_n\}$ をそれぞれ、∂A と $\{\partial A_1, \cdots, \partial A_n\}$ が meridian と meridian の系のとき、<u>meridian-disk</u>，<u>meridian-disk の系</u>と呼ぶ。M が irreducible であれば、meridian a と、meridian の系 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ に対して、$\partial A = a_1$, $\{\partial A_1, \cdots, \partial A_n\} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ なる meridian-diskA と meridian-disk の系 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ が存在し（Dehn's Lemma [11] と Loop Theorem [10],[13] に依る)、イソトピーを除いて一意的である（補題1.5 と 1.8 に依る)。

次に挙げるのは、輪環体のよく知られる特性である。

1.10. <u>補題</u>：M を、S^3 に埋蔵可能な3次元多様体で、∂M が連結でその種数を p とすると、次の三つは同値である：

(1) $M \cong T_p$.

(2) M の meridian の系 $\{a_1, \cdots, a_p\}$ が存在する.

(3) $\pi_1(M)$ が階数 p の自由群である。

1.11. 補題（Feustel [3], Griffiths [5], etc.）：γ を ∂T_p 上の単純閉曲線とし、$p \geqq 1$ とすると、次の三つは同値である：

(1) T_p に γ に沿って3次元胞体を張付けて得られる3次元多様体が、種数 $p-1$ の輪環体である。

(2) T_p の meridian の系 $\{a_1, \cdots, a_p\}$ が存在し、$\gamma \cap (a_1 \cup \cdots \cup a_p) = \gamma \cap a_1$ は唯一つ交叉点から成る。

(3) 商群 $\pi_1(T_p)/\{\gamma\}^\nu$ が階数 $p-1$ の自由群である。ここに $\{\gamma\}^\nu$ は、ホモトピー類 $[\gamma]$ を含む $\pi_1(T_p)$ の最小の正規部分群を示す。

1.12. 定義：M と M' を、$\partial M \neq \emptyset$, $\partial M' \neq \emptyset$ が連結であるような3次元多様体とする。M と M' の <u>disk-sum</u>，これを $M \#_\partial M'$ と記す、は ∂M 上の2次元胞体を $\partial M'$ 上の2次元胞体に張り合わせることにより得られる。$\#_\partial$ は位相同型を除いて well-defined であり、可換であり結合律も成り立つ。連結な境界を持つ3次元多様体 M が <u>∂-素</u> であるとは、$M \not\cong D^3$ でさらに M の任意の分解 $M = M_1 \#_\partial M_2$ について M_1, M_2 の少くとも一方が3次元胞体のときである。次が成り立つ。

1.13. <u>補題</u>（Gross [6], Swarup [15]）：M を連結な境界を持つ3次元多様体とする。$M \not\cong D^3$ ならば、M は ∂-素な3次元多様体 $P_1, \cdots, P_u$ の disk-sum と位相同型であり、P_i は順序と位相同型を除いて一意的に決定される。

§2. S^3に埋蔵され得る3次元多様体.

2.1. 定義：$\mathfrak{SC}$により、連結な境界を持ち、S^3に埋蔵可能な3次元多様体の集合を示す。

実際、対$(T_p \subset S^3)$の研究において、$\mathfrak{SC}$の元の性質を知ることが重要である。次に挙げる三つの補題はよく知られているもので、時にことわりなく利用することがある。

2.2. 補題(Fox[4])：$\mathfrak{SC}$に属する3次元多様体Mに対して、$M \cong S^3 - \mathring{T}_p$ なる対$(T_p \subset S^3)$が存在する。

2.3. 補題(Papakyriakopoulos [11])：$\mathfrak{SC}$に属する3次元多様体は irreducible である。([15] の Prop. 2.7 等を参照.)

2.4. 補題：M, M' を $\mathfrak{SC}$ に属する3次元多様体とする.

(1) disk-sum $M \natural M'$ もまた $\mathfrak{SC}$ に属する。

(2) ∂M の種数が 1 ならば、M は ∂-素である。

(3) ∂M の種数が 1 より大きいとき、M が ∂-素である必要十分条件は、M が ∂-irreducible なることである。([15] 参照.)

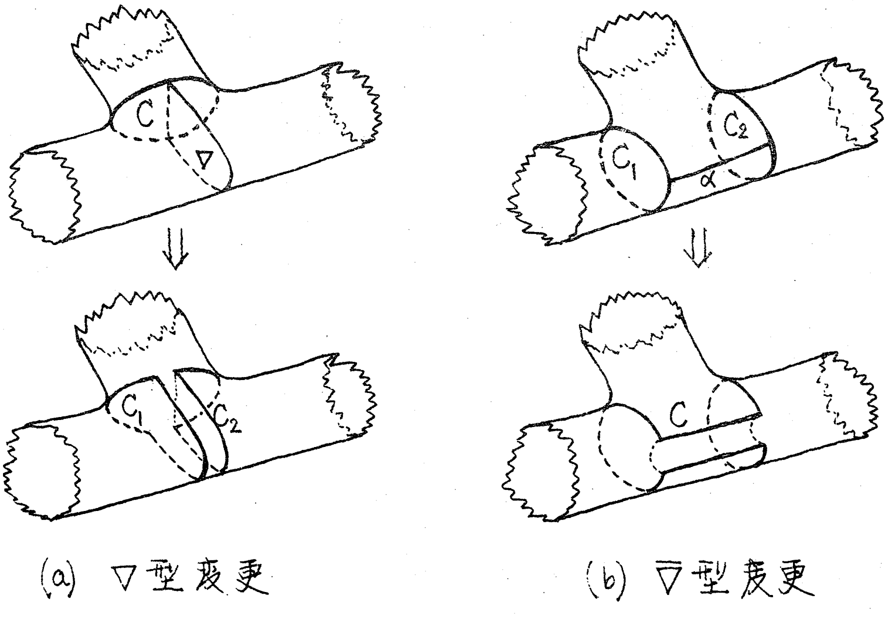
(4) $M = T_1 \cong D^2 \times S^1$ が、$\mathfrak{SC}$ に属し、∂-素であってしかも ∂-irreducible ではない唯一の3次元多様体である。

(5) M が ∂-素である為の必要十分条件は、$\pi_1(M)$ が自由積に関して分解不可能なことである。([8] を参照.)

次に $\mathfrak{SC}$ に属する3次元多様体に proper に埋蔵されている2次元胞体について調べる。ここに挙げる性質は、今回の諸

のなかで最も重要な役割をはたすものである。

2.5. 2次元胞体の変更：Cを3次元多様体Mに埋蔵されているproperな2次元胞体とする。今Mの中の2次元胞体∇で、次の条件を満たすものが存在すると仮定する：$\nabla \cap C = \partial\nabla \cap C$ は一つの単純弧から成り、$\nabla \cap \partial M = \partial\nabla \cap \partial M = \overline{\partial\nabla - C}$. 図1(a) を参照。このとき、$\overline{\partial N(C \cup \nabla; M) \cap \mathring{M}}$ は三つの互いに交わらないproperな2次元胞体となる。（$N(X; Y)$ はXのYにおける正則近傍を示す。）このうちの一つはMにおいてCとイソトープであり、残り二つを$C_1 \cup C_2$ とすると、これらはCとイソトープではない。"$C_1 \cup C_2$ は、Cから(2次元胞体∇に沿っての) ∇型変更によって得られた" と言う。



(a) ▽型変更　　　(b) ▽型変更

図1

逆に、C_1とC_2 を3次元多様体内の互に交わらないproper

2次元胞体とし、αを次の条件を満たす∂M上の単純弧とする：$\alpha \cap (\partial C_1 \cup \partial C_2) = \partial\alpha$，$\partial\alpha \cap \partial C_1 \neq \phi \neq \partial\alpha \cap \partial C_2$。すると$\overline{\partial N(C_1 \cup \alpha \cup C_2 ; M) \cap \mathring{M}}$もまた三つの互いの交わらないproperな2次元胞体となる。このうちの一つはC_1と、もう一つはC_2とそれぞれMでイソトープとなり、残り一つをCとすると、CはC_1ともC_2ともイソトープにはならない。"Cは$C_1 \cup C_2$から（単純弧αに沿っての）∇型変更によって得られた"と言う。（図1(b) 参照）。

2.6. <u>補題</u>（Hosokawa）：$\{A_1, \cdots, A_p\}$をT_pのmeridian-diskの系、CをT_pのproperな2次元胞体とする。Cは、互いに交わらないproperな2次元胞体$C_1, \cdots, C_n$から、有限回の∇型変更によって得られる。但し、各C_iは、T_pにおいて$A_1, \cdots, A_p$の一つとイソトープである。

<u>証明</u>：まず次の条件を満たす互いに交わらないproperな2次元胞体$\{D_1, \cdots, D_p\}$を選ぶ：各D_iはT_pを種数1の輪環体T_1^iと種数p-1の輪環体T_{p-1}^iに分割し、それぞれは$\{A_i\}$と$\{A_1, \cdots, \check{A}_i, \cdots, A_p\}$をmeridian-diskの系として持つ。実際、meridian-diskの系の定義より、∂M上に互いに交わらない単純閉曲線の系$\{b_1, \cdots, b_p\}$を$\partial A_i \cap b_i$が一つの交叉点から成り、$\partial A_i \cap b_j = \phi$, $i \neq j$，なるように選ぶことが出来るので、各D_iは、A_iとイソトープな二つのproperな2次元胞体から、

b_i に沿った▽型変更により簡単に得られる。今、補題1.7, 1.8, 2.3 より、C と $\{D_1, \cdots, D_p\}$ は簡約化されていると仮定する(即ち、$C \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_p)$ は単純閉曲線を含まない)。

もし $C \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_p) = \emptyset$ なら、C はある一つの種数1の輪環体 T_1^i か、3次元胞体 $D_0^3 = \overline{T_p - (T_1^1 \cup \cdots \cup T_1^p)}$ に含まれている。もし $C \subset T_1^i$ なら、明らかに $C \approx A_i$ か $C \approx D_i$ であり、いずれの場合も補題は明らか。もし $C \subset D_0^3$ なら、C はいくつかの $D_1, \cdots, D_p$ より▽型変更を繰返して得られるので、これも補題が成り立つ。

$C \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_p) \neq \emptyset$ のとき、$C \cap D_i$ の D_i 上で最小の単純弧を選び、それが D_i から切取る2次元胞体に沿って▽型変更を次々 C に施すことにより、C は有限個の互いに交わらない2次元胞体 $C_1' \cup \cdots \cup C_m'$ となり、$C_j' \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_p) = \emptyset$ となる。最初の場合の議論と、▽型変更・▽型変更の定義より、補題は証明された。

2.7. 補題2.6 を $\mathbb{SC}$ に属する3次元多様 M に拡張する為に、次の特別な分解を考えよう。今 $M \cong P_1 \#_{\partial} \cdots \# P_u$ とし、$P_1, \cdots, P_u$ は ∂-素とする。D_0^3 を3次元胞体、$D_1, \cdots, D_u$ を互いに交わらない ∂D_0^3 上の2次元胞体とする。∂P_i 上の2次元胞体を D_i に張付けることにより3次元多様体 M^* を得る。$M^* \cong P_1 \# \cdots \# P_u \cong M$ だから、M においては、次の(*)を

満たす互いに交わらない proper な2次元胞体の系 $\{D_1, \cdots, D_u\}$ が存在する：

(*) 各 D_i は M を二つの3次元多様体 $M_1^i \cong P_i$ と $M_2^i \cong P_1 \# \cdots \# \check{P}_i \# \cdots \# P_u$ に分割する。

2.8. <u>定理</u>：M を、∂-素な分解

$$M \cong P_1 \# \cdots \# P_r \# P_{r+1} \# \cdots \# P_u$$

を持つ $\mathfrak{SC}$ に属する3次元多様体とし、$P_i \not\cong T_1$ $(i=1, \cdots, r)$、$P_j \cong T_1$ $(j=r+1, \cdots, u)$ と仮定する。$\{D_1, \cdots, D_u\}$ を条件 (*) を満たす M の proper な2次元胞体の系、$A_{r+1}, \cdots, A_u$ をそれぞれ $P_{r+1}, \cdots, P_u$ の meridian-disk とする。更に、C を M の proper な2次元胞体とすると、C は互いに交わらない proper な2次元胞体 $C_1, \cdots, C_n$ から、有限回の▽型変更によって得られる。但し、各 C_i は、M において、$D_1, \cdots, D_r, A_{r+1}, \cdots, A_u$ の一つとイソトープである。

<u>証明</u>：補題 2.6 とほとんど同じなので省略する。もし、$\partial C \not\simeq 1$ (on ∂M) で、$C \subset P_i$, $(i=1, \cdots, r)$ ならば、補題 2.4 により $C \approx \dot{D}_i$ となることだけを注意しておく。

2.9. <u>参考</u>： 定理 **2.8** の応用として、前に挙げた **1.13** を $\mathfrak{SC}$ に属する3次元多様体 M に限って議論してみよう。これは後の対 $(T_p \subset S^3)$ の分解定理の証明 (§5) の理解にも役立つであろう。まず ∂-素な分解の存在は、補題 2.4 と ∂M の種数

が有限であることより、簡単に証明される。従って問題はその一意性の証明であるが、次の命題を示せば十分である：

［ M を定理2.8と同じものとす。もし M が $M \cong M_1 \# M_2$ なる分解を持つならば、P_i の添数を適当に付け変えることにより、$M_1 \cong P_1 \# \cdots \# P_t$，$M_2 \cong P_{t+1} \# \cdots \# P_u$，$0 \leqq t \leqq u$，と置ける。］

注意：上記の補題2.8（従って2.7）では、分解の一意性は用いていない。

証明：$\{D_1, \cdots, D_u\}$ と $A_{r+1}, \cdots, A_u$ を2.8と同じものとする。仮定から、M を M_1 と M_2 に分割する proper な2次元胞体 C が存在する。定理2.8により、C は互いに交わらない proper な2次元胞体の系 $\mathcal{C} = \{C_1, \cdots, C_n\}$ から、有限回の▽型変更により得られる。但し、各 C_i は $D_1, \cdots, D_r, A_{r+1}, \cdots, A_u$ の一つとイソトープである。$\mathcal{C}$ は M を幾つかの連結要素に分割する。これを $\mathcal{V} = \{V_1, \cdots, V_m\}$ とすると、各 V_i は位相同型を除いて集合

$$\mathcal{D} = \{D^3, P_1, \cdots, P_u, \text{これら} P_1, \cdots, P_u \text{の幾つかの disk-sums}\}$$

に属し、更に各 $P_1, \cdots, P_r$ は丁度一つの $\mathcal{V}$ の元 V_i についてのみ、その ∂-素な要素として含まれる。

さて、$\mathcal{C}$ の二つの要素、これを仮に C_{n-1} と C_n とする、に対して最初の▽型変更を行い、得られた2次元胞体を C_{n-1} と

記すことにする。すると、新しい2次元胞体の系 $\mathcal{C}'=\{C_1,\cdots,C_{n-1}\}$ と $\mathcal{C}'$ が M を分割して得られる3次元多様体の集合 $\mathcal{V}'=\{V_1',\cdots,V_{m'}'\}$ が得られる。ここで二つの場合が考えられる。

(i) $\mathcal{V}'$ に丁度一つ元，これを $V_{m'}'$ とする、が存在して、$V_{m'}'\cap C_{n-1}\neq\emptyset$ となるとき： ▽型変更の定義から、$V_{m'}'$ は $\mathcal{V}$ の一つの元と T_1 との disk-sum と位相同型となることがすぐ判る。もし $r=u$ ならば、$\mathcal{C}$ の各元も $\mathcal{C}'$ の各元も必ず M を二つの連結要素に分割するので、この(i)の場合は生じない。従って $V_{m'}'$ は再び集合 $\mathcal{P}$ に属し、特に各 $P_1,\cdots,P_r$ は丁度一つ $\mathcal{V}'$ の要素に対してその∂-素な要素として含まれる。

(ii) $\mathcal{V}'$ に丁度二つの元，これを $V_{m'-1}'$ と $V_{m'}'$ とする、が存在して、$V_{m'-1}'\cap C_{n-1}\neq\emptyset\neq V_{m'}'\cap C_{n-1}$ となるとき：再び▽型変更の定義より、$V_{m'-1}'$ と $V_{m'}'$ の一方は $\mathcal{V}$ の一つの元と位相同型であり、他の一つは $\mathcal{V}$ の二つの元の disk-sum か $\mathcal{V}$ の一つの元と T_1 との disk-sum のいずれかと位相同型となることが容易に結論される。実際 $r=u$ ならば、(i) で述べたと同じ理由で最後の場合、即ち $\mathcal{V}$ の元と T_1 との disk-sum、は生じない。結局 $\mathcal{V}'$ の元はすべて集合 $\mathcal{P}$ に属し、更に各 $P_1,\cdots,P_r$ は丁度一つの $\mathcal{V}'$ の元に対してその∂-素な要素として含まれる。

上の議論を反復すると、最後には $\mathcal{C}^{(n-2)}=\{C\}$ と $\mathcal{V}^{(n-2)}=\{V_1^{(n-2)},V_2^{(n-2)}\}=\{M_1,M_2\}$ が得られ、M_1 も M_2 も $\mathcal{P}$ に属しかつ各 $P_1,\cdots,$

P_r は M_1 と M_2 のどちらか一方の∂-素を要素として含まれることが判る。この時 $M_1 \cong P_1 \#_\partial \cdots \#_\partial P_s \# T_1 \#_\partial \cdots \#_\partial T_\ell$ ならば、群論でよく知られる Grushko-Neumann の定理により、M_2 は $u-r-\ell$ 個の T_1 を∂-素な要素として持つことが判り、証明は完結する。

2.10. 定理2.8 の系：M を $\mathbb{SC}$ に属する3次元多様体とし、$\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$ で更に、G_1, G_2 共に自由積に関して分解不可能で無限巡回群でもないと仮定する。C_1 と C_2 を、M の proper な2次元胞体で、$\partial C_1 \not\simeq 1 \not\simeq \partial C_2$ (on ∂M) とすると、$C_1 \approx C_2$.

2.11. 定理2.8 の系：M を $\mathbb{SC}$ に属する3次元多様体とし、$\pi_1(M) \cong Z * G$ で更に、G は自由積に関して分解不可能で、$G \not\cong Z$ と仮定する。C_1 と C_2 を、M の proper な2次元胞体で $\partial C_1 \not\sim 0 \not\sim \partial C_2$ (on ∂M) とすると、$C_1 \approx C_2$。

2.10，2.11 のいずれの場合も、仮定を満たす2次元胞体 C_1, C_2 の存在は、補題2.4 に依る。証明はいずれも初等的で C_1, C_2 の条件と、∇型変更の定義を活用して得られるので、省略する。

§3. 対 $(T_p \subset S^3)$ の素な分解，主定理

ここで、序で述べた対の分解定理を整理し、更にこの話の主定理を挙げる。

3.1. 定義：二つの対 $(T_p \subset S^3)$ と $(T'_p \subset S^3)$ とが合同とは、

方向を保つ位相写像 $\psi: S^3 \to S^3$ で $\psi(T_p)=T'_p$ なるものが存在するときとする。

もちろんこの合同の関係は、同値関係である。対 $(T_p \subset S^3)$ の合同類を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ で示し、$(T_p \subset S^3)$ の knot type という。もし $(T_p \subset S^3)$ と $(T'_p \subset S^3)$ が合同ならば、それらの補空間 $S^3 - \mathring{T}_p$ と $S^3 - \mathring{T}'_p$ はもちろん位相同型であるので、混乱の無い場合には、"$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の補空間 $S^3 - \mathring{T}_p$" により、$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ のある代表元 $(T_p \subset S^3)$ の補空間 $S^3 - \mathring{T}_p$ を意味するものとする。

3.2. <u>対の和</u>：二つの knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ と $\langle T_q \subset S^3 \rangle$ とが、同一の S^3 の中で、しかも2次元球面 S^2_0 の反対の側に表現されており、$T_p \cap T_q = \partial T_p \cap \partial T_q = D^2_0 \subset S^2_0$ なる2次元胞体 D^2_0 を共有しているとすると、種数 $p+q$ の対 $(T_p \underset{D^2_0}{\cup} T_q \subset S^3)$ を得る。この新しい対の合同類を $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ と $\langle T_q \subset S^3 \rangle$ の<u>和</u>といい、$\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$ で示す。また S^2_0 は $\langle T_p \cup T_q \subset S^3 \rangle$ の分解 $\langle T_p \subset S^3 \rangle \# \langle T_q \subset S^3 \rangle$ を与えるという。

Alexander の定理 [1] と Newman-Gugenheim の homogeneity Th. により、次が得られる。

3.3. <u>補題</u>：すべての knot type の集合 $\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\cdots\}$ において、和 # は well-defined であり、可換で結合律も成り立つ。即ち、$\{\langle T_p \subset S^3 \rangle \mid p=0,1,2,\cdots\}$ は、演算 # のもとで可換な半群となる。特に、$\langle T_0 \subset S^3 \rangle$ がその単元となる。

3.4. 定義： knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素であるとは、$p \neq 0$ で更に、$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$ なる任意の分解について、$p_1 = 0$, $p_2 = 0$ の少くとも一方が必ず成立するとき。

この定義より次が得られる。

3.5. 補題：もし $\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle$ ならば、$p = p_1 + p_2$ である。

3.6. 補題：すべての種数 1 の knot type $\langle T_1 \subset S^3 \rangle$ は素である。

上記補題 3.5 と 3.6 と、種数の有限性とにより次を得る。

3.7. 定理：すべての $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ は、素な knot types の和 $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$ に分解される。

そこで当然ながら、その分解の一意性が問題となる。即ち

3.8. 問題：$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ についての素な分解は一意か？即ち 3.7 における和の要素 $\langle T_{p_i} \subset S^3 \rangle$ は一意的に決定されるか？

この問題の解答はまだ無い。次に挙げるのが、今回の話の主定理である（Tsukui [16], Theorem 5 参照）。

3.9. 定理： $p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$$

を持ち、各 $i = 1, \cdots, u$ について

(**) $S^3 - \mathring{T}_{p_i}$ は ∂-素 である

と仮定する。更に、$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を持つならば、これら二つの素分解は順序を除いて一致する。

証明は §§ 4 と 5 で与える。条件 (**) を満たさない素な knot types が存在することは、別の機会に述べたので、今回は省略する。3.9 の証明の前に系を挙げておく。

3.10. <u>系</u>：$p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が二つ素分解

$$\begin{aligned} \langle T_p \subset S^3 \rangle &= \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_p} \subset S^3 \rangle \\ &= \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_p} \subset S^3 \rangle \end{aligned}$$

を持つとすると、この二つの素分解は順序を除いて一致する。

<u>証明</u>：明らかに $p_i = 1 = q_i$, $i = 1, \cdots, p$, だから、2.4 により $S^3 - \mathring{T}_{p_i}$, $S^3 - \mathring{T}_{q_i}$ はすべて2素である。

3.11. <u>系</u>：knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ について、$\pi_1(S^3 - \mathring{T}_p) \cong G_1 * G_2$ で更に、G_1, G_2 が自由積に関して分解不可能ならば、$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意である。

3.12. <u>系</u>：種数 2 の knot type $\langle T_2 \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意である。

上記の二つの系は、定理 3.9 を用いずとも、前章の系 2.10 と 2.11 を用いて、容易に証明される。

§4. Unknotted な対 $(T_p \subset S^3)$.

4.1. <u>定義</u>：対 $(T_p \subset S^3)$ が <u>unknotted</u> とは、$S^3 - \mathring{T}_p \cong T_p$。

Dehn's Lemma により次を得る。

4.2. <u>補題</u>：種数 1 の unknotted な対は互いに合同である。

この補題により、種数 1 の unknotted な対の合同類を、特に $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ で示す。更に $(n-1)\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0 \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ を単純に $n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ と記す。もちろん $\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ は素である。

もし対 $(T_p \subset S^3)$ が unknotted ならば ∂T_p は S^3 の Heegaard の分解を与える。従って、Waldhausen の結果を我々の立場で言換えると次のようになる。

4.3. <u>補題</u> (Waldhausen [17])：$p \neq 0$ で $(T_p \subset S^3)$ が unknotted ならば、$\langle T_p \subset S^3 \rangle = p\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$ な素分解を持ち一意である。

補題 4.3 は、unknotted な対 $(T_p \subset S^3)$ に対しては、特に T_p の meridian の系 $\{a_1, \cdots, a_p\}$ と $S^3 - \mathring{T}_p$ の meridian の系 $\{b_1, \cdots, b_p\}$ が存在して、$a_i \cap b_i$ が丁度一つの交叉点から成り、$a_i \cap b_j = \phi$, $i \neq j$, が成り立つ。Papakyriakopoulos [12] を参照。

定理 3.9 を証明する為に、次の補題が重要である。

4.4. <u>補題</u>：$p \neq 0$ なる knot type $\langle T_p \subset S^3 \rangle$ が素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle \# n\langle T_1 \subset S^3 \rangle^0$$

を持つ、各 $i = 1, \cdots, v$, について

(***) $S^3 - \mathring{T}_{p_i}$ は ∂-irreducible である

と仮定する。更に $\langle T_p \subset S^3\rangle$ が分解 $\langle T_{p-n} \subset S^3\rangle \# n\langle T_1 \subset S^3\rangle^{\circ}$ を持つならば、

$$\langle T_{p-n} \subset S^3\rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3\rangle \# \cdots \# \langle T_{p_\nu} \subset S^3\rangle$$

である。

証明には、Waldhausen [17] に依る "gutes System" の概念を対 $(T_p \subset S^3)$ に拡張して利用する。

4.5. 定義：3次元多様体 $S^3 - \mathring{T}_p$ の meridian-disk の系 $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ が対 $(T_p \subset S^3)$ の good-system であるとは、T_p の meridian-disk の系 $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ が存在して次を満たす：

(i) $A_i \cap B_i = \partial A_i \cap \partial B_i$ は丁度一つの交叉点から成る、

(ii) $A_i \cap B_j = \emptyset$ for $i > j$.

$\mathcal{B}$ を、$\mathcal{A}$ に対する ordered-system と言う。

以下 good-system の性質をいくつか挙げておく。

4.6. 補題 (Waldhausen [17])：$(T_p \subset S^3)$ の任意の good-sytem $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ に対して、

(ii)′ $A_i \cap B_j = \emptyset$ for $i \neq j$,

を満たす ordered-system $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ が存在する。

証明は、[17] の Lemma (2.2) と全く同じである。次の初等的な事実がなかなか有力である。

4.7. 補題：$\{A_1\}$ を $(T_p \subset S^3)$ の good-system，$\{B_1\}$ を ordered-system とすると、2次元球面 $\partial N(A_1 \cup B_1; S^3)$ は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}$$

を与える。更に次が成り立つ.

$$\langle T_{p-1} \subset S^3 \rangle = \langle T_p \cup N(A_1; S^3 - \mathring{T}_p) \subset S^3 \rangle$$
$$= \langle \overline{T_p - N(B_1; T_p)} \subset S^3 \rangle.$$

補題4.7に補題1.11と4.6を合わせると次を得る.

4.8. 補題：$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ を $(T_p \subset S^3)$ の good-system とすると，各 $i = 1, \cdots, n$, について

$$T_p(A_i) \equiv T_p \cup N(A_i; S^3 - \mathring{T}_p) \cong T_{p-1}.$$

更に $\quad T_p(\mathcal{A}) \equiv T_p \cup N(A_1; S^3 - \mathring{T}_p) \cup \cdots \cup N(A_n; S^3 - \mathring{T}_p),$

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle \# n \langle T_1 \subset S^3 \rangle^{\circ}.$$

4.9. 補題：$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ ~~が~~ $(T_p \subset S^3)$ の good-system で、$\mathcal{B}$ が共通の ordered-system ならば、$\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_p(\mathcal{A}') \subset S^3 \rangle$.

4.10. 定義：$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$, $\mathcal{A}' = \{A_1', \cdots, A_n'\}$ をそれぞれ3次元多様体Mの互に交わらない properな2次元胞体の系とする。$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が単純▽-同値、$\mathcal{A} \overset{\triangledown}{\approx} \mathcal{A}'$ で示す，とは，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ の元の添数を適当に付け変えると，$A_i \approx A_i'$ (for $i = 1, \cdots, n-1$) でかつ、A_n' は $A_{n-1} \cup A_n$ から、▽型変更で得られたとき。

▽型変更の定義より、$A_{n-1} \cup A_n'$ から、▽型変更により A_n が得られるので、$\mathcal{A} \overset{\triangledown}{\approx} \mathcal{A}'$ ならばもちろん $\mathcal{A}' \overset{\triangledown}{\approx} \mathcal{A}$ である。

更に、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が ▽-同値とは、有限個の、Mの proper な2

次元胞体の系の列 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{A}_m=\mathcal{A}'$ が存在して，$\mathcal{A}_i \overset{\nabla}{\sim} \mathcal{A}_{i+1}$，$i=0,1,\cdots,m-1$，のとき。もちろん$\nabla$-同値は同値関係であり，これを $\mathcal{A} \overset{\nabla}{\sim} \mathcal{A}'$ で示す。

4.11. 補題：$\mathcal{A}=\{A_1,\cdots,A_n\}$, $\mathcal{A}'=\{A_1',\cdots,A_n'\}$ を，対 $(T_p\subset S^3)$ の補空間 $S^3-\mathring{T}_p$ の properな2次元胞体の系とする。もし，$\mathcal{A} \overset{\nabla}{\sim} \mathcal{A}'$ ならば，

$$\langle T_p\cup N(\mathcal{A}; S^3-\mathring{T}_p)\subset S^3\rangle = \langle T_p\cup N(\mathcal{A}'; S^3-\mathring{T}_p)\subset S^3\rangle.$$

証明：$\mathcal{A} \overset{\nabla}{\approx} \mathcal{A}'$ のとき証明すれば十分である。ところが $\partial(T_p\cup N(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}; S^3-\mathring{T}_p))$ 上では $\partial A_n\approx\partial A_n'$ であり，証明は終わる。

4.12. 補題：$\mathcal{A}=\{A_1,\cdots,A_n\}$ を $(T_p\subset S^3)$ の good-systemとし，$\mathcal{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$ を $S^3-\mathring{T}_p$ の互いに交わらないproperな2次元胞体の系とする。もし，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{X}$ が次の三つの仮定

(1) $\mathcal{A}\cap\mathcal{X}=\emptyset$,

(2) $T_p\cup N(\mathcal{X}; S^3-\mathring{T}_p)\cong T_{p-n}$,

(3) 各 $i=1,\cdots,n$，について，$\partial X_i\simeq 1$ (on $\partial T_p(\mathcal{A})$)

を満たすならば，$\mathcal{A} \overset{\nabla}{\sim} \mathcal{X}$ (in $S^3-\mathring{T}_p$) である。

証明：条件(3)より，$\mathcal{X} \overset{\nabla}{\sim} \mathcal{X}'=\{X_1',\cdots,X_n'\}$ で，(1) $\mathcal{A}\cap\mathcal{X}'=\emptyset$，(2) $T_p\cup N(\mathcal{X}'; S^3-\mathring{T}_p)\cong T_{p-n}$，(3)$'$ $\partial X_1'\cup\cdots\cup\partial X_n'$ は $\partial T_p(\mathcal{A})$ 上で互いに交わらない2次元胞体の系 $\tilde{X}_1\cup\cdots\cup\tilde{X}_n$ をboundする……を満たす2次元胞体の系 $\mathcal{X}'$ が存在する。よって，$\mathcal{A}$

$\simeq \mathcal{X}'$ を示せばよい。

条件(2)より、$\partial X_i' = \partial \tilde{X}_i \not\sim 0$ (on ∂T_p) であり、$\partial T_p - (\partial X_1' \cup \cdots \cup \partial X_n')$ が連結であることが判る。$T_p(\mathcal{A})$ の定義より、各 $i = 1, \cdots, n$, について、$\partial T_p(\mathcal{A})$ 上に二つの2次元胞体 $A_i^+ \cup A_i^-$ が存在して、$A_i^+ \approx A_i \approx A_i^-$ (in $S^3 - \mathring{T}_p$) である。まず次を主張する:

(i) 各 $\tilde{X}_i$, $i=1,\cdots,n$, に対して、少くとも一つの $\mathcal{A}$ の元、これを A_j とする、が存在して、A_j^+ と A_j^- の一方が $\tilde{X}_i$ に含まれ、他方が $\tilde{X}_i$ には含まれない。なぜなら、もしこのような A_j が存在しないならば、明らかに $\partial X_i = \partial \tilde{X}_i \sim 0$ (on ∂T_p) となり、これは条件(2)に反する。

そこで、

$$\mathcal{A}(X_i') = \{ A_j \in \mathcal{A} \mid A_j^+ \subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^- \not\subset \tilde{X}_i \text{, または } A_j^+ \not\subset \tilde{X}_i \text{ かつ } A_j^- \subset \tilde{X}_i \} \subset \mathcal{A}$$

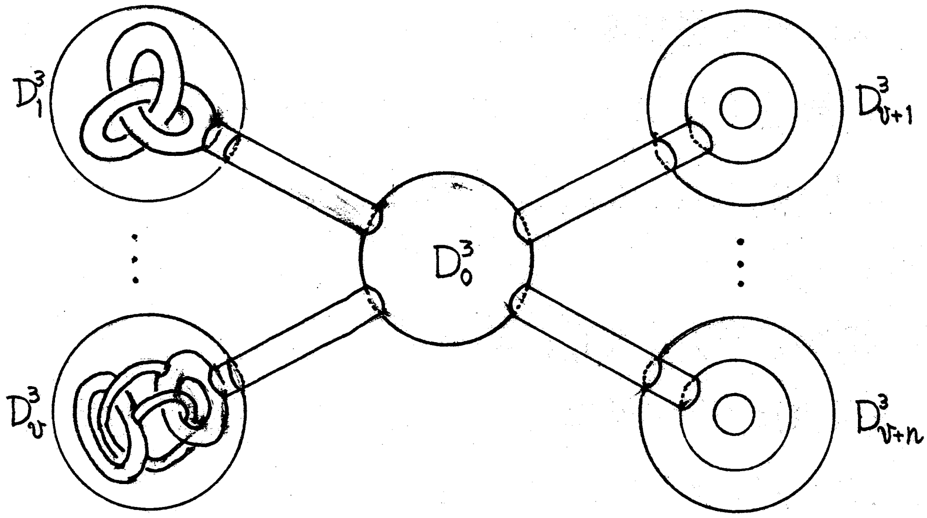
とおくと、次が判る:

(ii) $i \neq k$ ならば $\mathcal{A}(X_i') \neq \mathcal{A}(X_k')$。なぜなら、もし $\mathcal{A}(X_i') = \mathcal{A}(X_k')$ ならば、$\partial T_p - \partial X_i' - \partial X_k'$ は連結でなくなり、条件(2)に反する。

これから後は簡単なので省略する。

4.13. <u>**補題4.4の証明**</u>:判り易くする為に、証明を三段に分割する。

第一段：まず、$\langle T_p\subset S^3\rangle$ の代表元を次のようにとる：S^3 の中に、互いに交わらない $v+n+1$ 個の3次元胞体 $D_0^3, D_1^3, \cdots, D_{v+n}^3$ を選び、各 $D_1^3,\cdots, D_v^3$ の内部に $\langle T_{p_1}\subset S^3\rangle, \cdots, \langle T_{p_v}\subset S^3\rangle$ の代表元を作り、$D_{v+1}^3, \cdots, D_{v+n}^3$ の内部に $\langle T_1\subset S^3\rangle^0$ の代表元を作る。∂D_0^3 上に、互いに交わらない $v+n$ 個の2次元胞体をとり、各代表元の境界上の2次元胞体と、∂D_i^3 とは一つの2次元胞体で交わるような細い棒でつなぐ(下図参照)。



次に、$\langle T_1\subset S^3\rangle^0$ の各々の代表元について、good-system とその ordered-system を選ぶことにより、$(T_p\subset S^3)$ の good-system $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ とその ordered-system $\mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_n\}$ を得る。もちろん、(ii)' $A_i\cap B_j=\emptyset$ for $i\neq j$, が成立し、$\langle T_p(\mathcal{A})\subset S^3\rangle = \langle T_{p_1}\subset S^3\rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v}\subset S^3\rangle$ となる。

作り方から、SC に属する3次元多様体 $S^3-\mathring{T}_p$ に対して $\mathcal{D}=\{D_1, \cdots, D_{n+v}\}=\{\partial D_1^3\cap(S^3-\mathring{T}_p), \cdots, \partial D_{n+v}^3\cap(S^3-\mathring{T}_p)\}$ は 2.7

(*) の条件を満たす2-素な分解を与えていることに注意。

一方仮定から、$(T_p \subset S^3)$ の good-system $\mathcal{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$ で、$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3\rangle = \langle T_{p-n} \subset S^3\rangle$ を満たすものが存在する。今、$\mathcal{Y}=\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ を (iii)' $X_i \cap Y_j = \emptyset$ for $i \neq j$, なる ordered-system とする。ところで、補題 1.7 と 1.8 とにより、$\partial\mathcal{A} \cup \partial\mathcal{D}$ と $\partial\mathcal{X}$, $\partial\mathcal{A}\cup\partial\mathcal{D}$ と $\partial\mathcal{Y}$, とはそれぞれ ∂T_p 上で、$\mathcal{A}\cup\mathcal{D}$ と $\mathcal{X}$ とは $S^3-\mathring{T}_p$ で簡約化されているとしてよい。

今、$\mathcal{A}\cap\mathcal{X}$ の連結要素の個数を λ とすると次を得る：

(4.14) <u>補題</u>：種数 $p+\lambda$ の対 $(T_{p+\lambda} \subset S^3)$ と、その二つの good-system $\mathcal{A}'=\{A'_1,\cdots,A'_{n+\lambda}\}$, $\mathcal{X}'=\{X'_1,\cdots,X'_{n+\lambda}\}$ が存在して、次を満たす。

(1) $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3\rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{A}') \subset S^3\rangle$,
$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3\rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{X}') \subset S^3\rangle$.

(2) $\mathcal{A}'\cap\mathcal{X}'=\emptyset$, $\mathcal{D}\cap\mathcal{A}'=\emptyset$.

<u>証明</u>：もし $\mathcal{A}\cap\mathcal{X}=\emptyset$ ならば何もしなくてよい。

今、$A_i \cap X_j$ の単純弧 β について、正則近傍 $N(\beta; S^3-\mathring{T}_p)$ をとり、二つの2次元胞体 $N(\beta; S^3-\mathring{T}_p)\cap\partial T_p = N(\beta\cap\partial T_p; \partial T_p)$ を $B\cup Y$ とおく。$T_p \cup N(\beta; S^3-\mathring{T}_p)$ は種数 $p+1$ の輪環体で、これを単に $(T_{p+1}\subset S^3)$ と記し、この対について考察する。β は A_i でも X_j でも proper だから $\overline{A_i - N(\beta; S^3-\mathring{T}_p)}$ も $\overline{X_j - N(\beta; S^3-\mathring{T}_p)}$ も二つの2次元胞体から成る。これらを、それぞれ $A_i^* \cup A_i^{**}$,

$X_j^* \cup X_j^{**}$ とおく。特に、$A_i^* \cap B_i = A_i \cap B_i$，$A_i^{**} \cap B_i = \phi$，$X_j^* \cap Y_j = X_j \cap Y_j$，$X_j^{**} \cap Y_j = \phi$ と仮定してよい。そこで次の法則で添数を付変えると、新しい対$(T_{p+1} \subset S^3)$の二つのgood-system $\mathcal{A}' = \{A_1', \cdots, A_{n+1}'\}$，$\mathcal{X}' = \{X_1', \cdots, X_{n+1}'\}$を得る。

$$\begin{cases} A_k \to A_k' & \text{for } k < i, \\ A_i^* \to A_i', \quad A_i^{**} \to A_{i+1}', \\ A_k \to A_{k+1}' & \text{for } k > i. \end{cases} \qquad \begin{cases} B_k \to B_k' & \text{for } k < i, \\ B_i \to B_i', \quad B \to B_{i+1}', \\ B_k \to B_{k+1}' & \text{for } k > i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_k \to X_k' & \text{for } k < i, \\ X_j^* \to X_j', \quad X^{**} \to X_{j+1}', \\ X_k \to X_{k+1}' & \text{for } k > j. \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_k \to Y_k' & \text{for } k < j, \\ Y_j \to Y_j', \quad Y \to Y_{j+1}', \\ Y_k \to Y_{k+1}' & \text{for } k > j. \end{cases}$$

明らかに、(1) $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(\mathcal{A}') \subset S^3 \rangle$，$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+1}(\mathcal{X}') \subset S^3 \rangle$，(2) $\mathcal{A}' \cap \mathcal{X}' = \mathcal{A} \cap \mathcal{X} - \beta$、が成り立ち、更に $\mathcal{D} \cap \mathcal{X}' = \mathcal{D} \cap \mathcal{X}$ である。

この操作を λ 回繰返すことにより、(4.14) が得られる。

<u>第二段</u>：次に $\mathcal{D} \cap \mathcal{X}'$ を除く。第一段と同じように、$\mathcal{D} \cap \mathcal{X}'$ の連結要素の個数を μ とすると、次が得られる。

(4.15) <u>補題</u>：種数 $p+\lambda+\mu$ の対 $(T_{p+\lambda+\mu} \subset S^3)$ と、その二つの good-system $\mathcal{A}'' = \{A_1'', \cdots, A_{n+\lambda+\mu}''\}$，$\mathcal{X}'' = \{X_1'', \cdots, X_{n+\lambda+\mu}''\}$ と、更に、互いに交わらない proper な2次元胞体の系 $\mathcal{D}' = \{D_1', \cdots, D_v'\}$ が $S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda+\mu}$ に存在して次を満たす：

(1) $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(\mathcal{A}'') \subset S^3 \rangle$,

$\langle T_p(\mathcal{X}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+\mu}(\mathcal{X}'') \subset S^3 \rangle$,

(2) $\mathcal{A}'' \cap \mathcal{X}'' = \phi$, $\mathcal{A}'' \cap \mathcal{D}' = \phi$, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{X}'' = \phi$,

(3) $\mathcal{D}'$ は $S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda+\mu}(\mathcal{A}'')$ を ν 個の ∂-irreducible 3次元多様体に分解する。

証明：$D_i \cap X'_j$ の（D_i 上の最小の）単純弧 Y について、正則近傍 $N(Y; S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda})$ をとり、前の証明と同じように、二つの2次元胞体 $N(Y; S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda}) \cap \partial T_{p+\lambda}$ を $B \cup Y$ とおく。すると、$T_{p+\lambda} \cup N(Y; S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda})$ は種数 $p+\lambda+1$ の輪環体となり、これを $T_{p+\lambda+1}$ と書く。Y は D_i でも X'_j でも proper だから、$\overline{D_i - N(Y; S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda})} = D_i^* \cup D_i^{**}$, $\overline{X'_j - N(Y; S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda})} = X_j^* \cup X_j^{**}$ とおき、$X_j^* \cap Y'_j = X'_j \cap Y'_j$, $X_j^{**} \cap Y'_j = \phi$ としてよい。$D_i \cap (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') = \phi$ より $(D_i^* \cup D_i^{**}) \cap (\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}') = \phi$ である。そこで、前の場合と同じように、次の法則で添数を付変えると、新しい対 $(T_{p+\lambda+1} \subset S^3)$ の二つの good-system $\mathcal{A}'' = \{A''_1, \cdots, A''_{n+\lambda+1}\}$, $\mathcal{X}'' = \{X''_1, \cdots, X''_{n+\lambda+1}\}$ と、$S^3 - \mathring{T}_{p+\lambda+1}$ における互いに交わらない2次元胞体の系 $\mathcal{D}' = \{D'_1, \cdots, D'_\nu\}$ を得る。

$$\begin{cases} A'_k \to A''_k & k = 1, \cdots, n+\lambda, \\ D_i^* \to A''_{n+\lambda+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_k \to B''_k & k = 1, \cdots, n+\lambda, \\ B \to B''_{n+\lambda+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_k \to X''_k & \text{for } k < j, \\ X_j^* \to X''_j, \quad X_j^{**} \to X''_{j+1}, \\ X'_k \to X''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'_k \to Y''_k & \text{for } k < j, \\ Y'_j \to Y''_j, \quad Y \to Y''_{j+1}, \\ Y'_k \to Y''_{k+1} & \text{for } k > j. \end{cases}$$

$$D_k \to D'_k \quad \text{for } k \neq i, \qquad D^{**} \to D'_i.$$

明らかに、(1) $\langle T_p(\mathcal{A}) \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda}(\mathcal{A}') \subset S^3 \rangle = \langle T_{p+\lambda+1}(\mathcal{A}'') \subset S^3 \rangle$,

$\langle T_p(\mathcal{X})\subset S^3\rangle=\langle T_{p+\lambda}(\mathcal{X}')\subset S^3\rangle=\langle T_{p+\lambda+1}(\mathcal{X}'')\subset S^3\rangle$, (2) $\mathcal{A}''\cap\mathcal{X}''=\phi$, $\mathcal{A}''\cap\mathcal{D}'=\phi$, $\mathcal{D}'\cap\mathcal{X}''=\mathcal{D}\cap\mathcal{X}'-\gamma$ が成り立ち、$\mathcal{D}$ の条件より (3) も成り立つ。

この操作を μ 回繰返すことにより、(4.15)が得られる。

第三段：前段の補題(4.15)により得られた二つの good-system $\mathcal{A}''$ と $\mathcal{X}''$ が、補題4.12 の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{X}$ の条件を満たすことを示せば、補題4.11 により、補題4.4 の証明は完了する。4.12(1)は(4.15)の(2)であり、4.12(2) は $\mathcal{X}''$ が good-system であることより当然成り立つ。4.12(3)は、(4.15)の(3)と(2) ∂-irreducible の定義を合わせると得られる。

§5. 主定理3.9 の証明.

主定理3.9 を証明する為に、まず次の補題が必要である。

5.1. 補題： $p\neq 0$ なる knot type $\langle T_p\subset S^3\rangle$ が、素分解

$$\langle T_p\subset S^3\rangle=\langle T_{p_1}\subset S^3\rangle\#\cdots\#\langle T_{p_u}\subset S^3\rangle$$

を持ち、各 $i=1,\cdots,u$ について

(＊＊＊) $S^3-\mathring{T}_{p_i}$ は ∂-irreducible である

と仮定する。更に $\langle T_p\subset S^3\rangle=\langle T_q\subset S^3\rangle\#\langle T_r\subset S^3\rangle$ なる分解が存在するならば、$\langle T_{p_i}\subset S^3\rangle$ の添数を適当に付け変えて

$$\langle T_q\subset S^3\rangle=\langle T_{p_1}\subset S^3\rangle\#\cdots\#\langle T_{p_t}\subset S^3\rangle,$$

$$\langle T_r\subset S^3\rangle=\langle T_{p_{t+1}}\subset S^3\rangle\#\cdots\#\langle T_{p_u}\subset S^3\rangle$$

とすることが出来る。但し $0 \leqq t \leqq u$。

即ち、上記(***)の仮定を持つならば、$\langle T_p \subset S^3 \rangle$ の素分解は一意であることを示している。

<u>証明</u>：補題4.4 の証明……即ち 4.13……の第一段と同じように、3次元球面 S^3 の中に $u+1$ 個の交わらない3次元胞体 $D^3_0, D^3_1, \cdots, D^3_u$ をとり、各 $D^3_1, \cdots, D^3_u$ の内部に $\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle, \cdots, \langle T_{p_u} \subset S^3 \rangle$ の代表元を作る。各代表元の境界上の2次元胞体と ∂D^3_0 上の2次元胞体を、∂D^3_i と一つの2次元胞体で交わるような細い棒でつなぐことにより、$(T_p \subset S^3)$ を得る。作り方から、$\mathcal{D} = \{D_1, \cdots, D_u\} = \{\partial D^3_1 \cap (S^3 - \mathring{T}_p), \cdots, \partial D^3_u \cap (S^3 - \mathring{T}_p)\}$ とおけば、$\mathcal{D}$ は 2.7 の (*) の条件を満たす系であることが判る。

今、仮定から、分解 $\langle T_q \subset S^3 \rangle \# \langle T_r \subset S^3 \rangle$ を与える2次元球面 Σ が S^3 に存在する。ところが定理2.8 より、$S^3 - \mathring{T}_p$ の proper な2次元胞体 $\Sigma \cap (S^3 - \mathring{T}_p)$ は、互いに交わらない2次元胞体の系 $\{C_1, \cdots, C_n\}$ より、有限回の▽型変更により得られる。但し、各 C_i は $D_1, \cdots, D_u$ の一つとイソトープである。$\partial D_1, \cdots, \partial D_u$ は、T_p で2次元胞体 $\partial D^3_1 \cap T_p, \cdots, \partial D^3_u \cap T_p$ を bound するので、$\partial C_1, \cdots, \partial C_n$ もまた T_p で2次元胞体 $E_1, \cdots, E_n$ を bound するとしてよい。結局、S^3 のなかに、互いに交わらない2次元球面の系 $\{C_1 \cup E_1, \cdots, C_u \cup E_u\}$ が得られ、この系は、分解

$$\langle T_p \subset S^3\rangle = \langle T_{s_1} \subset S^3\rangle \# \cdots \# \langle T_{s_{n+1}} \subset S^3\rangle$$

を与え、各要素 $\langle T_{s_i} \subset S^3\rangle$ は、集合

$$\mathcal{P} = \{\langle T_0 \subset S^3\rangle, \langle T_{p_1} \subset S^3\rangle, \cdots, \langle T_{p_u} \subset S^3\rangle,$$
$$\text{これら } \langle T_{p_1} \subset S^3\rangle, \cdots, \langle T_{p_u} \subset S^3\rangle \text{ の幾つかの和}\}$$

に属し、更に各 $\langle T_{p_1} \subset S^3\rangle, \cdots, \langle T_{p_u} \subset S^3\rangle$ は丁度一つの要素 $\langle T_{s_i} \subset S^3\rangle$ について、その素な要素として含まれる。

この後は、2.9 の証明と全く平行に進むので、詳細は省略する。要するに、$\Sigma \cap (S^3 - \mathring{T}_p)$ を $\{C_1, \cdots, C_n\}$ から ∇型変更により構成する際に、∇型変更に用いる ∂T_p 上の単純弧の列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ に沿って、同時に $\{E_1, \cdots, E_w\}$ にも ∇型変更を行えば、補題 1.5 等の援用により、Σ が得られる。次の補題を挙げておけば十分であろう。証明は略すが、∇型変更の定義をよく見れば明らかである。

5.2. 補題： $(T_p \subset S^3)$ を $\langle T_p \subset S^3\rangle$ の代表え、Σ_1, Σ_2 を S^3 の中の交わらない 2 次元球面で、$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ は分解

$$\langle T_p \subset S^3\rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3\rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3\rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3\rangle$$

を与えるとする。更に、Σ_1 と Σ_2 はそれぞれ、分解

$$\langle T_p \subset S^3\rangle = \langle T_{p_1} \subset S^3\rangle \# \langle\langle T_{p_2} \subset S^3\rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3\rangle\rangle,$$
$$\langle T_p \subset S^3\rangle = \langle T_{p_2} \subset S^3\rangle \# \langle\langle T_{p_1} \subset S^3\rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3\rangle\rangle$$

を与えるとする。α を ∂T_p 上の単純弧で次の条件をみたすとする：$\alpha \cap \Sigma_1 = \partial\alpha \cap \Sigma_1 \neq \emptyset \neq \alpha \cap \Sigma_2 = \partial\alpha \cap \Sigma_2$.

今、Σを、$(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap (S^3 - \mathring{T}_p)$に$\alpha$に沿って▽型変更を行い、同時に$(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap T_p$に$\alpha$に沿って▽型変更を行って得られた$S^3$の2次元球面とすると、$\Sigma$は分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \langle T_{p_2} \subset S^3 \rangle\rangle \# \langle T_{p_3} \subset S^3 \rangle$$

を与える。

5.3. <u>主定理3.9の証明</u>：素分解

$$\langle T_p \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$$

を与える2次元球面の系を$\{\Sigma_1, \cdots, \Sigma_{u-1}\}$とおけば、2次元胞体の系$\{\Sigma_1 \cap (S^3 - \mathring{T}_p), \cdots, \Sigma_{u-1} \cap (S^3 - \mathring{T}_p)\}$は、$S^3 - \mathring{T}_p$の∂-素な分解を与える。補題1.13（2.9参照）より、$S^3 - \mathring{T}_p$の∂-素な分解は一意であるから、このうち丁度n個はT_1である。即ち、$\langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle, \cdots, \langle T_{q_u} \subset S^3 \rangle$の中に、丁度n個$\langle T_1 \subset S^3 \rangle$が含まれる。補題4.4から

$$\langle T_{p_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{p_v} \subset S^3 \rangle = \langle T_{q_1} \subset S^3 \rangle \# \cdots \# \langle T_{q_v} \subset S^3 \rangle$$

としてよい。補題2.4より、この分解は補題5.1の(***)の条件をみたすので、定理3.9の証明は完了する。

5.4. <u>参考</u>：定理3.9は、(**)の仮定の上に更に、同じ個数の素分解を持つならば、その二つの素分解が一致する・・・という、非常に強い仮定のもとでの話しとなったが、ここはもっと弱くすることが可能である。が、準備が長くなり過ぎるので、今回はこの形に止めた。また、書き易くする為に、輪

環体 T_p の話にしたが、Tsukui[16] のように閉曲面にしても ほとんど同じ結果が得られる。

参考文献

[1] J.W.Alexander : On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 10(1924), 6-8.

[2] D.B.A.Epstein : Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math.,115(1966), 83-107.

[3] C.D.Feustel : On pasting balls to handlebodies, Bull. Amer. Math.Soc., 76(1970), 720-722.

[4] R.H.Fox : On the imbedding of polyhedra in 3-space, Ann. of Math.(2), 49(1948), 462-470.

[5] H.B.Griffiths : On systems of curves orthogonal to a 3-dimensional handlebody, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 31 (1967), 89-115.

[6] J.L.Gross : A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary, Trans.Amer.Math.Soc.,142(1969), 191-199.

[7] T.Homma : On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3, Osaka Math.J., 6(1954), 129-134.

[8] W.Jaco : Three-manifolds with fundamental group a free product, Bull.Amer.Math.Soc., 75(1969), 972-977.

[9] W.Magnus, A.Karrass and D.Solitar : Combinatorial Group Theory, Interscience, New York, 1966.

[10] C.D.Papakyriakopoulos : On solid tori, Proc.London Math. Soc.(3), 7(1957), 281-299.

[11] C.D.Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and asphericity of knots, Ann. of Math.(2), 66(1957), 1-26.

[12] ―――――― : A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures, Ann. of Math.(2), 77(1963), 250-305.

[13] J.Stallings : On the loop theorem, Ann. of Math.(2), 72 (1960), 12-19.

[14] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J. Math., 7(1970), 375-396.

[15] G.A.Swarup : Some properties of 3-manifolds with boundary, Quart.J.Math. Oxford(2), 21(1970), 1-24.

[16] Y.Tsukui : On surfaces in 3-space, Yokohama Math.J., 18 (1970), 93-104.

[17] F.Waldhausen : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7(1968), 195-203.