数理解析研究所講究録
第152巻 1972年 77-84



# Stable homeomorphism について

北大 理 小林一章

## §1. 序

話は特にことわらない限りTOP－categoryでの事とします。$R^n$, $S^n$を各々$n$次元ユークリッド空間，球面とする。

$n$次元 stable homeomorphism conjecture (SH($n$))：
$R^n$の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。（$R^n$の代りに$S^n$としてもよい。）

これは$n \neq 4$のとき肯定的に解決されています(see [3])。

homeomorphism $h: R^n \longrightarrow R^n$が次の条件を満足するとき$h$を weak locally convex homeomorphism という。

条件：$^\exists x \in R^n$, $^\exists \varepsilon > 0 \ni h(\partial B^n_\varepsilon(x)) \cap \overrightarrow{h(x)y} = 1$点。

ただし$y$は$\partial B^n_\varepsilon(h(x))$の任意の点．又$\partial B^n_\varepsilon(p)$は$p$を中心半径$\varepsilon$の$n$－ball $B^n_\varepsilon(p)$の境界。特に$\varepsilon = 1$のときは$\varepsilon$を省略します。$\overrightarrow{pq}$は$p$から出て$q$を通る半直線。

次に homeomorphism $h: R^n \longrightarrow R^n$が$h = h_1 \circ \cdots \circ h_k$とかけて，全ての$h_i$が weak locally convex homeomor－

phism (各 $h_i$ に対し $x_i$, $\varepsilon_i > 0$ が対応している)であるとき, $h$ を SWC-homeomorphism という。明らかに stable homeomorphism は SWC-homeomorphism である。

定理1。 $SHC_{n-1}$ が正しければ $R^n$ の任意の orientation preserving SWC-homeomorphism は stable である。

$n \neq 4$ のとき[3]によって正しいから 次が得られる。
系。$R^4$ の任意の orientation preserving SWC-homeomorphism は stable。

定理2。$M^n$ を orientable connected closed manifold とする。$SHC_n$ が正しければ, $M^n$ の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。

系。$M^n$ は上と同じとする。$n \neq 4$ のとき $M^n$ の任意の orientation preserving homeomorphism は stable である。

$M^n$ を $n$ 次元 manifold, $X$ を $M^n$ の $m$ 次元 proper submanifold とする。このとき $X$ の $M$ における closed tubular neighborhood とは, closed $(n-m)$-cell bundle $p$: E

$\longrightarrow X$ のことである。ただし $p$ は retraction で $E$ は $M^n$ の locally flat submanifold である。$E|\partial X \subset \partial M$, $E|\mathrm{Int}\, X \subset \mathrm{Int}\, M$ のとき $E$ meets boundary regularly という。

定理3。$M^n$ $(n \neq 4)$ : 境界のある $n$ 次元 manifold.
$f : I \longrightarrow M^n$ ; locally flat proper embedding
$(I = [0, 1])$
$\Rightarrow$ $f(I)$ は $M^n$ で closed trivial tubular neighborhood をもつ。

［おわび］シンポジュウムでの tubular neighborhood の uniqueness に関する定理は証明にミスがありましたので，省略させていただきます。

§2。

［定理1の証明］ $h : R^n \longrightarrow R^n$ を orientation preserving weak locally convex homeomorphism としたとき，$h$ がある空でない open set $U \subset R^n$ において $h|U = \mathrm{id}.$ を示せば十分である。$h$ の定義より ${}^\exists x \in R^n$, ${}^\exists \varepsilon > 0$ $\ni$
$h(\partial B^n_\varepsilon(x)) \cap \overrightarrow{h(x)y} =$ one point for ${}^\forall y \in \partial B^n_\varepsilon(h(x))$.

従って $B^n_\varepsilon(h(x)) \cup h(B^n_\varepsilon(x)) \subset \mathrm{Int}\, B^n_\eta(h(x))$ なる $B^n_\eta(h(x))$ をとると $^\exists$ ambient isotopy $\{H_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ of $R^n$ $\ni$

(1) $H_0 = id.$ $H_1 h(B^n_\varepsilon(x)) = B^n_\varepsilon(h(x))$

(2) $H_t | R^n - \mathrm{Int}\, B^n_\eta(h(x)) = id.$

次に $B^n_\varepsilon(x) \cup B^n_\varepsilon(h(x)) \subset \mathrm{Int}\, B^n_\xi(x)$ なる $B^n_\xi(x)$ をとると

$^\exists$ ambient isotopy $\{G_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ of $R^n$ $\ni$

(1) $G_0 = id.$ $G_1(B^n_\varepsilon(h(x))) = B^n_\varepsilon(x)$

(2) $G_t | R^n - \mathrm{Int}\, B^n_\xi(x) = id.$

従って $G_1 H_1 h$ は $R^n$ の orientation preserving homeomorphism で $G_1 H_1 h(B^n_\varepsilon(x)) = B^n_\varepsilon(x)$ である。又 $G_1 H_1 h | \partial B^n_\varepsilon(x)$ は $S^{n-1}$ から自分自身への orientation preserving homeomorphism であるから，$SHC_{n-1}$ が正しいという仮定によって $G_1 H_1 h | \partial B^n_\varepsilon(x)$ は stable である。故に[3]によって isotopic to the id.

即ち $^\exists$ ambient isotopy $\{\tilde{K}_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ of $\partial B^n_\varepsilon(x)$ $\ni$

$$\tilde{K}_0 = id. \qquad \tilde{K}_1 = (G_1 H_1 h | \partial B^n_\varepsilon(x))^{-1}.$$

更に $\{\tilde{K}_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ の $R^n$ への extension で次の性質をもつ ambient isotopy $\{K_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ が存在する，

(1) $K_0 = id.$ $K_1 | B^n_\varepsilon(x) = (G_1 H_1 h | B^n_\varepsilon(x))^{-1}$

(2) $K_t | R^n - \mathrm{Int}\, B^n_\xi(x) = id$

従って $K_1 G_1 H_1 h$ は $R^n$ の orientation preserving homeomorphism で次の性質をもつ

(1) $K_1G_1H_1h \mid R^n - \mathrm{Int}(B^n_\eta(h(x)) \cup B^n_\xi(x)) = h \mid R^n - \mathrm{Int}(B^n_\eta(h(x)) \cup B^n_\xi(x))$

(2) $K_1G_1H_1h \mid B^n_\varepsilon(x) = id.$

故に(2)より $K_1G_1H_1h$ は stable homeomorphism であり，また(1)によって $h$ は stable homeomorphism である ∎

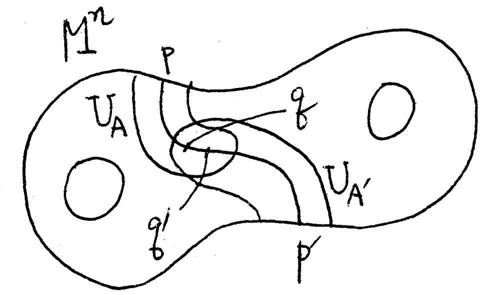
［定理２の証明］ $h: M^n \longrightarrow M^n$ を orientation preserving homeomorphism とする。[1]によって $SHC_n$ が正しいとすると $n$ 次元 annulus conjecture が正しい。そこで任意の orientable $n$-manifold は stable manifold である［1］。仮定より $M^n$ は connected だから $M^n$ の１点で $h$ が stable であることを示せば十分である。しかしこれは $SHC_n$ が正しいという条件のもとでは明らかである。従って $h$ は stable である。

［定理３の証明］ $f(I)$ は $M^n$ の中の locally flat proper simple arc だから［2］によって $f(I)$ は次の性質をもつ２つの open arcs $A$ と $A'$ の union としてかかれる，

(1) $A$，$A'$ は $M^n$ の中で近傍 $U_A, U_{A'}$ をもつ

(2) $U_A \cap f(I) = A$ で $(U_A, A)$ は $(H^n_+, H^1_+)$ に homeomorphic である。ここで $H^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_1 \geqq 0\}$

(3) $U_{A'} \cap f(I) = A'$ で $(U_{A'}, A')$ は $(H^n_+, H^1_+)$ に homeomorphic である。




点 $p, p', q, q'$ を図のようにとる。

$a$：端点 $p, q$ をもつ $A$ の subarc

$a'$：端点 $p', q'$ をもつ $A'$ の subarc

$b$：端点 $p', q$ をもつ $A'$ の subarc

とする。

上の(2)から $^\exists$ locally flat embedding $F: D^{n-1}\times[0,7] \longrightarrow U_A$

$\ni$ (i) $F(D^{n-1}\times[0,7]) \cap f(I) = F(\theta\times[0,7]) = a$

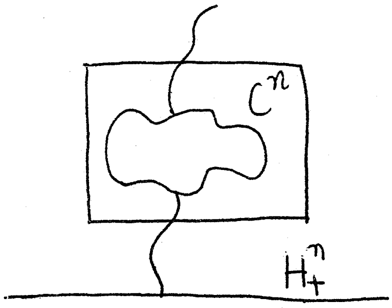
(ii) $F(\theta, 0) = p$, $F(\theta, 6) = q'$, $F(\theta, 7) = q$

(iii) $F(D^{n-1}\times[6,7]) \subset U_A \cap U_{A'}$

(iv) $F(D^{n-1}\times[0,7]) \cup A$ もまた locally flat

ここで $\theta$ は $D^{n-1}$ の中心とする。

$g: U_{A'} \longrightarrow H^n_+$ を homeomorphism とし $g(F(D^{n-1}\times[6,7]))$




を内部に含むような rectangular cell $C^n \subset \mathrm{Int}\, H^n_+$ をとると，$n \neq 4$ だから[3]によって annulus conjecture が成立しており，従って

$C^n - gF(\mathrm{Int}(D^{n-1}\times[6,7])) \cong S^{n-1}\times[0,1]$.

故に $^\exists$ ambient isotopy $\{G_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ of $H^n_+$ $\ni$

(1) $G_0 = id.$ $\quad G_1 gF(D^{n-1}\times[6,7]) = C^n$

(2) $G_t | H^n_+ - U(C^n) = id.$ ここで $U(C^n)$ は $C^n$ の collar を含んでいるような $H^n_+$ における $C^n$ の近傍とする.

今 $C^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in H^n_+ \mid s_i \leqq x_i \leqq t_i,\ s_i, t_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$

としたとき $C^{n-1}_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C^n \mid x_1 = t_1\}$

$C^{n-1}_- = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C^n \mid x_1 = s_1\}$ とする。

$G_1 g F(0, 7) = (r_1, \cdots, r_n)$ としたとき $G_1 g F(0, 7) \in C^{n-1}_-$,

$G_1 g(p') = (0, r_2, \cdots, r_n)$ と仮定してよい。明らかに $r_1 = s_1$,

$s_i < r_i < t_i$ , $i = 2, 3, \cdots, n$ である。

次に $(U_{A'}, A')$ は $(H^n_+, H^1_+)$ に homeomorphic 即ち unknot であるから $\exists$ homeomorphism $K : H^n_+ \longrightarrow H^n_+ \ni$

(1) $KG_1 g(b) =$ segment from $(0, r_2, \cdots, r_n)$ to $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$

(2) $K | \partial H^n_+ \cup C^n = id.$

ここで $\partial H^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in H^n_+ \mid x_1 = 0\}$

(3) $K$ は compact support をもつ。

従って $\|x\|$ が十分大なる $x \in H^n_+$ に対し $KG_1(x) = x$ である。

$P^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in H^n_+ \mid 0 \leqq x_1 \leqq r_1,\ s_i \leqq x_i \leqq t_i,\ i = 2, \cdots, n\}$

$P^{n-1}_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in P^n \mid x_1 = r_1\}$ とすると

$P^{n-1}_+ = C^{n-1}_-$ である。

そこで $E = F(D^{n-1} \times [0, 7]) \cup g^{-1} G_1^{-1} K^{-1}(P^n)$ とすると, $E$ は $f(I)$ の trivial tubular neighborhood である。

## References

[1] Brown, M and Gluck, H : Stable structures on

manifolds I. II. III., Ann. of Math. 79 (1964), 1–58
[2] H. Gluck : Unknotting $S^1$ in $S^4$, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 91–94
[3] R. C. Kirby : Lectures on triangulations of manifolds (mimeographed note, UCLA, 1969)