数理解析研究所講究録
第 152 巻 1972 年 130-159

4次元ユークリッド空間内の特殊なホモロジー3-球面についての一考察

東大 理　永瀬 輝男

§0. 序

我々は，次の様な，R^4 に PL-embed された closed oriented 3-manifold M を考える：

i) $M^3 \subset R^3 \times [0,3]$

ii) M^3 は surgeries の trace

iii) index i の critical handles は i-level 上にある。

上の様な M^3 が，R^4 内の homology 3-sphere である為の必要条件を調べたい。さらに，ある特別な，R^4 内の 3-sphere が 4-ball を bound することを示す。

この論文を書くにあたつて，本間龍雄教授，田村一郎教授，加藤十吉教授のいろいろな御指導を感謝します。

§1. 定義と記号

我々はP.L. categoryを用いる。特に断らない限り，manifold Mによって，R^4内のclosed oriented connected triangulated 3-manifoldを表わす。また一般に，そのtriangulationをもMで表わす。

R^nは，n次元ユークリッド空間で，$R^n = R^{n-1} \times R$と見て，最後の座標をR^nのlevelと呼ぶことにする。

$$[a,b] = \{x \in R^1 \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b) = \{x \in R^1 \mid a < x < b\}$$

その他，$(a,b]$，$[a,b)$等も一般の通りとする。

$(\cdots)$のclosure，interior，boundaryを，$\overline{(\cdots)}$，$\overset{\circ}{(\cdots)}$，$\partial(\cdots)$で表わすことにする。また，closure作用は，常に最大の空間で作用するものとする。

manifold Mに対して，

$$M(a) = M \cap R^3 \times a$$

$$M[a,b] = M \cap R^3 \times [a,b]$$

その他，$M(a,b)$，$M(a,b]$，$M[a,b)$等も同様とする。

Iによって，unit intervalを表わす。また，$I^n = I^{n-1} \times I$と見る。

$c = 0, 1, 2, 3$に対して，$H(c) = I^{3-c} \times I^c$，$D_1H(c) = \partial I^{3-c} \times I^c$，$D_2H(c) = I^{3-c} \times \partial I^c$とする。

Mを次の様な*manifold*とする：

0) $M \subset R^3 \times [0,3]$

1) 点列 $-1 = a_{-1} < 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 3 < a_{k+1} = 4$ が存在して，$[0,3] - a_0 - a_1 - \cdots - a_k$ 内の任意の点 t に対して，$M(t)$ は，2-*manifold* である。

2) $i = 0, 1, \cdots, k-1$ に対して，

$$\bar{M}(a_i, a_{i+1}) \underline{\underline{L}} M\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times [a_i, a_{i+1}]$$

但し $\underline{\underline{L}}$ は，*level preserving homeomorphic* を表わす。

3) 次の様な *map* $f_i : \bigcup_{j=1}^{n_i} H(C_{ij}) \longrightarrow R^3 \times a_i$ が存在する：

☆ f_iは *embedding*

☆ $f_i(\bigcup_j H(C_{ij})) \cap \bar{M}(a_{i-1}, a_i) = f_i(\bigcup_j D_2 H(C_{ij}))$

但し $i = 0, 1, \cdots k$

4) $\bar{M}(a_i, a_{i+1}) \cap R^3 \times a_i$

$\cong \{\bar{M}(a_{i-1}, a_i) \cap R^3 \times a_i - f_i(\bigcup_j H(C_{ij})\}$

$\cup\ f_i(\bigcup_j D_1 H(C_{ij}))$

但し，$\cong$は *homeomorphic* を表わす。

また，本間龍雄教授の *lecture note* によって，R^4内の *closed* 3-*manifold* は全て，上の条件 0)〜4) を満すように R^4 の *ambient isotopy* で動かせることが知られているので，特別な条件では

ない。このとき，M を surgeries $\{H(c_{ij})\}_{i,j}$ の trace と呼ぶことにする。このとき，$f_i(H(c_{ij}))$ を a_i level 上の index c_{ij} の critical handle といい，また $H(c_{ij})$ で表わすことにする。特に，$c_{ij}=1$ (or 2) の時 $f_i(I^1\times\frac{1}{2})$ (or $f_i(\frac{1}{2}\times I^2)$) を critical disk という。

また，$^-M(a_{i-1},a_i)\cap R^3\times a_i = F_i$ は $R^3\times a_i$ 上の closed 2-manifold で，$R^3\times a_i - F_i$ はいくつかの domain に分かれるが，unbounded な domain を外部と名づけ，それをもとにして，隣りの domain を内部と呼び，さらに，その隣りの domain を外部と呼ぶようにして，各 domain を内部と外部に分ける。ここで，2つの領域が隣り合うとは，各 closure が交わることとする。

もし $H(c_{ij})$ が F_i の内部 (or 外部) の closure に含まれる時，$H(c_{ij})$ を内部 (or 外部) の critical handle ということにする。$N(M)=$ M の critical handles の数，とする。

注意） 2)に於て，$\hat{=}$ は次のことを示す：

Covering isotopy theorem

$F: M\times I \longrightarrow Q\times I$ が locally unknotted isotopy で，∂M を fix しているならば，F は ∂Q を fix した ambient isotopy で cover される。

一方，(3,2)-Shöenflies theorem が正しいから，$^-M(a_i,a_{i+1})$ は $^-M(a_i,a_{i+1})\cap R^3\times a_i$ と $^-M(a_i,a_{i+1})\cap R^3\times a_{i+1}$ との間の

locally unknotted isotopyと見なせる。よって，covering isotopy theoremから次の様なmap $h: R^3\times[a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\doteqdot} R^3\times[a_i, a_{i+1}]$が存在する：

$h|M(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\times[a_i, a_{i+1}]: M(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\times[a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\doteqdot} {}^{-}M(a_i, a_{i+1})$

Mを上の様なmanifoldとし，Hをcritical handleとする。次の様なlevel-preserving embedding $h: I^3\times[a,b]\to R^4$が存在するとする：

☆ $h(I^3\times a)=H$ (or $h(I^3\times b)=H$)

☆ $h(I^3\times[a,b])\cap M=H\cup h(h^{-1}(D_1H)\times[a,b])$

(or $h(I^3\times[a,b])\cap M=H\cup h(h^{-1}(D_2H)\times[a,b])$)

このときMは$^{-}(M-h(I^3\times[a,b])\cup(h(\partial(I^3\times[a,b])))-M)=M'$に$R^4$でambient isotopicである。このmanifold M'をmap hのもとで，Hのlevelをaからb（or bからa）にchangeすることによってMから得られたという。また簡単にHのlevelをaからb（or bからa）にchangeするという。このとき単にchangeされるposition（上の場合は$h(I^3\times b)$）を示すときは，Changeの代りに"move"という言葉を用いることにする。即ちmoveは仮想的なChangeである。

Mを上の様なmanifoldとし，H(c)をcritical handleとする。$c=1$ (or 2)のとき，kを$I^{3-1}\times 0$ (or $0\times I^2$)内の

proper simple arcで，次の様なlevel-preserving embedding $h: I^3 \times [a,b] \to R^4$が存在するとする：

1) $h(I^3 \times a) \cap M = $ (a regular neighbourhood D of k in $I^{3-1} \times 0$) $\times I$

(or $h(I^3 \times a) \cap M = $ (a regular neighbourhood D of k in $0 \times I^2$) $\times I$

2) $h(I^3 \times (a,b]) \cap M \cong (D \cap \partial I^{3-1}) \times I \times (a,b]$

(or $h(I^3 \times [a,b)) \cap M \cong I \times (D \cap \partial I^2) \times [a,b))$

このとき，Mは$^{-}(M - h(I^3 \times [a,b])) \sqcup h(\partial(I^3 \times [a,b])) - M) = M'$に$R^4$でambient isotopicである。このmanifold M'をkにそって$H(C)$をup (or down)-splittingをして得られたmanifoldという。また簡単にkにそって$H(C)$をup (or down)-splittingするという。(see Fig-1)

§2. いくつかの命題と定義

命題1. Mを次の様なmanifoldとする：

1) $M \subset R^3 \times [0,3]$

2) Mはsurgeriesのtrace

3) index cのcritical handlesはc-level上にある。

このとき，次の様なmanifold M'が存在する：

a) M'は1) 2) 3)を満す.

b) M'はMにR^4で ambient isotopic

c) index 1と2の同じ側の critical disks を1.5-level に move したとき，各 critical disks は互いに高々一点でしか交わらず，他の critical disks とは高々3つとしか交わらない。

（証明）

我々は，inside の critical handle の場合のみを証明する。outside の場合もまったく同様である。

初めに，index 1と2の critical disks の任意の move をとる。このとき，index 1の critical disks の move をうまくとれば，同じ側の critical disks 同士の intersection は points にできる。また，異る側同士は proper simple arcs で交わるようにできる。ここで，proper とは，各 critical disks に対しての意味である。

次に，内部の index 2の critical handle を次の様に split する (see Fig-2)： Dをその critical handle の critical disk とする。$p_1 p_2 \cdots p_n$ をDと inside の index 1の critical disks との intersection とする。KをDと outside critical disks との intersection とする。（実は，KはDと outside の index 1の critical disks との intersection である。）そこで，Dの proper arc の

set $\{t_i\}$ を次の様にとる:

1) $t_i \cap t_j = \phi \quad (i \neq j)$

2) $t_i \cap K = \phi$

3) $t_i \cap \{p_s\} = \phi$

4) $D - \bigcup_i t_i$ の connected component は高々1つの $\{p_s\}$ の点を含む。

5) $D - \bigcup_i t_i$ の connected component の closure は $\{t_i\} \cup \{p_s\}$ の elements を高々3つしか含まない。

そこで，D を $\cup t_i$ にそって down-split する。これを各 index 2の critical handle にほどこすと，各 critical disks は互いに高々一点でしか交わらず，index 2の critical disk は，高々3つの index 1の critical disk としか交わらない。しかし index 1の critical disks に関しては，この限りではない。しかし，index 1に対しても，同じように up-split をほどこせばよい。

（証 終）

上の様な性質をもつ manifold M を，property E をもつ，という。

命題2. M を critical handles が 2つの manifold とする。すると，M は 4-ball を bound する。

(証明)

定義から明らかである。

命題3. Mが property E を持てば, property E を保存しつつ, index 0 と 3 の critical handles は各々1つにできる。

(証明)

M_0はいくつかの3-ballsから成り, M_1は2-spheresとそれらをつなぐ3-balls(すなわち outside の index 1 の critical handles)とから成る。そこで, 異る spheres にまたがる critical handle を1つとってその level を0に change すれば, M_0は1つ減じた3-ballsからなる。一方 index 2 の critical handles は $^{-}M_{[0,2)}$ の connected components をつなぎ得ないから, 上の操作は, M_0がただ1つの3-ball になるまで続けることができる。index 3 についても同様にできる。 (証終)

命題4. manifold M の index 1 と 2 の critical handles が同じ側にあるならば, M は4-ball を bound する。

(証明)

outside の場合を考えれば十分である。初めに, index 1 の critical handles を0-level に change する。すると, M_0は solid torus である。

次に index 2 の critical handles を 0-level にchange する。すると，M_0 は genus 0 の 3-manifold である。但し，∂M_0 は $R^3 \times 0$ 内の closed 2-manifold であるので，genus は ∂M_0 の genus で定める。

すると，(3, 2)-Schöenflies theorem から，M_0 は 3-ball である。したがって命題2から証明される。

(証終)

§3. Cancelation Theorem

定理1．M を property E をもつ manifold で，H(1) と H(2) を同じ側の critical handle とする。もしこの２つの critical handles の 1.5-level への move で，２つの critical disks が一点のみで交わるようなものがあるならば，次の様な manifold M' が存在する：

1) M' は M に R^4 で ambient isotopic

2) $N(M) - N(M') = 2$

(証明)

outside の場合のみ証明すれば十分である。

さて，仮定から，次の様な $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ と level-preserving embeddings $h_1': I^2 \times I \times [1, 1+2\varepsilon] \longrightarrow R^4$ 及び

$h_2': I \times I^2 \times [1+\varepsilon, 2] \rightarrow R^4$ が存在する：

i) $h_i'(I^{3-i} \times I^i \times i) = H(i)$

ii) $h_1'(I^2\times I\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])\cap h_2'(I\times I^2\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])$

$= h_i'(h_i'^{-1}(h_i'(I^{3-i}\times I^i\times(1+\varepsilon))\cap h_j'(I^{3-j}\times I^j$

$\times(1+\varepsilon))\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])$ ここで，$i\neq j$，$i,j=1,2$.

次に$H(2)$を$1+\varepsilon$-levelにchangeする。M_1をchangeによって得られたmanifoldとする。すると，次の様なlevel preserving embedding h: $I^3\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon]\to R^4$が存在する：

i) $h(I^3\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])\cap M_1$

$= h(I^2\times I\times(1+\varepsilon)\cup(I\times I\times 0\cup\partial I\times I\times I)$

$\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])$

ii) $h(I^3\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon])\cap\overline{M_1[0,1+\varepsilon)}$

$= h((I\times I\times 1\cup I\times\partial I\times I)\times(1+\varepsilon))$。

そこで，cを$I^3\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon]$の内点とする。$D_1=I\times I\times 0\cup\partial I\times I\times I$，$D_2=I\times I\times 1\cup I\times\partial I\times I$とする。

$M'=\overline{(M_1-h(I^3\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon]))}\cup h(c\circ K)$とすればよい。

ここで，$K=D_1\times(1+\varepsilon)\cup\partial D_1\times[1+\varepsilon,1+2\varepsilon]\cup D_2\times(1+2\varepsilon)$。

(see Fig-3)　　　　　　　　(証終)

上の定理のmanifold M'を$H(1)$と$H(2)$をcancelして得られたmanifoldという。また単に，$H(1)$と$H(2)$をcancelするという。

注意)　上のMは，一般には，property Eを持たない。し

かし，§0で言っているⅰ）ⅱ）ⅲ）はみたしている。

§4． 定義

Mを property E を持つ manifold とする。このとき inside (or outside) の critical handles を 1.5-level に change することができる。Tを次の様な inside (or outside) の critical handles の union $\sqcup$ の strong deformation とする。(see Fig-4)

初めに，index 2 の critical handles を critical disks に strong deformation する。$\sqcup'$をその結果とする。$\{D_i\}$を index 1 の critical disks とする。各 i に対して$\{P_{i1} \cdots P_{in_i}\}$を$D_i$と index 2 の critical handles との intersection とする。P_iを critical disk D_iの中心とする。（ここでは，各 critical handle の product 性，即ちI^3を用いている。）すると，critical disks と critical handle との intersection は，$\{P_{i1} \times I, \cdots, P_{in_i} \times I\}$となる。そこで各 index 1 の critical handles を$(P_i \circ \{P_{i1} \cdots P_{in_i}\}) \times I$に strong deformation する。（ここで，$\circ$は，join を示している。）Tを上の結果とする。我々は，このTを inside (or outside) ribbon とよぶ。また各 index 2 の critical disks D に対して，C(D)をDと，index 1 の critical disks との交点の数とし，

$C(T) = \sum_{D} \max(0, C(D) - 2)$ とする。このC(T)を

$\mathcal{P}$のcomplexityと呼ぶ。

§5. いくつかの命題

命題5. LとJをcompact connected 2-complexesとする。XをJのconnectedでないsubcomplexとする。$f: X \to L$をembeddingとする。このとき，$K = L \underset{f}{\cup} J$とおくと，map $j_*: H_1(L) \to H_1(K)$はsurjectionではない。ここで，j_*は，inclusion mapがinduceした，homology間のmapである。

(証明)

背理法を用いる。

j_*がsurjectiveとする。すると，Mayer-Vietorisのexact sequenceを考える：

$$H_1(J) + H_1(L) \xrightarrow{j_*} H_1(K) \xrightarrow{\partial} H_0(X) \xrightarrow{i} H_0(J) + H_0(L)$$

さて，j_*がsurjectiveより，∂は0-mapである。したがって，iはinjectiveである。一方，JとLはconnectedで，Xは，connectedでないから，iはinjectiveではない。これは矛盾．　　　　（証終）

命題6. Lをcomplexとし，$\{D\}$をfinite disksのdisjoint unionとする。$g: \{\partial D\} \to L$をembeddingとする。このとき，$K = L \underset{g}{\cup} \{D\}$とおくと，$\mathrm{Ker}\{j_*: H_1(L) \to H_1(K)\}$は，$\{[\partial D]\}$によってgenerateされるsubgroupである。

ここで，∂_*は，inclusion map が induce する homology 間の map で，$[\partial D]$ は，∂Dによって represent される，$H_1(L)$の element である。

(証明) Mayer-Vietoris の exact sequence より証明される。

§6. 定理とその系

定理2. Mを property E を持つ homology 3-sphere とする。T を inside (or outside) ribbon とする。

$\partial T = T \cap {}^{-}M'[0, 1.5)$とする。ここで，$M'$は inside (or outside) の critical handles を 1.5-level に change してできた manifold である。このとき，

1) $T' \cap \partial T$ は connected である。ここで，T'は T の任意の connected component である。

2) $H_1(T, \partial T) = 0$

(証明)

背理法を用いる。1)または2)が成立たないとする。

まず，$M'[0, 1.5]$は，${}^{-}M'[0, 1.5) \cup T$ に deform する。

1)が成立たなければ，∂T の定義から，命題5を用いると，$H_1(M'[0, 1.5], {}^{-}M'[0, 1.5)) \neq 0$ が示せる。また，2)が成立たなければ，$H_1(M'[0, 1.5], {}^{-}M'[0, 1.5)) \cong H_1({}^{-}M'[0, 1.5) \cup T, {}^{-}M'[0, 1.5)) \cong H_1(T, \partial T)$。よって，いずれにせよ，$H_1(M'[0, 1.5], {}^{-}M'[0, 1.5)) \neq 0$ が示される。

Dを index 2 の outside (or inside) の critical disk とする。$^{-}M'(1.5, 2.0)$ の product 性を用いて，∂D を 1.5-level に change する。すると，∂D と index 1 の inside critical disks との intersection number は 0 であるから（何故なら，index 2 の outside の critical disk と，index 1 の inside critical disk を 1.5-level に move すると，proper arc で交わる）$[\partial D]$ は，$H_1(M'[0,1.5], {}^{-}M'[0,1.5])$ 内で homologue 0 である。よって命題6から，

$$H_1(M'[0,1.5], {}^{-}M'[0,1.5)) \cong H_1(M'[0,2.0], {}^{-}M'[0,1.5))$$
$$\cong H_1(M', {}^{-}M'[0,1.5))$$

一方，$^{-}M'[0,1.5)$ は connected であるから，次の exact 列を考える：

$$H_1(M') \xrightarrow{i} H_1(M', {}^{-}M'[0,1.5)) \xrightarrow{\partial} H_0({}^{-}M'[0,1.5)) \xrightarrow{j} H_0(M)$$

ここで，$H_1(M')=0$ かつ，j は isomorphism であるから ∂ は 0-map，よって，$H_1(M', {}^{-}M'[0,1.5))=0$ これは，矛盾である。（証終）

系1. M を property E を満す homology 3-sphere で，ある side の ribbon に対して，$C(\mathcal{P})=0$ であるならば，M は 4-ball を bound する。

(証明)

ribbon Tは，高々2ヶ所の"のりしろ"を持った矩形を張り合わせることによつて，できているとしてよい。何故ならば，$C(\mathbb{P})=0$ より，3ヶ所の"のりしろ"を持った矩形は存在しない。

初めに，1つの，"のりしろ"を持った矩形をとる。次に，それと，それに接する critical handle を cancel する。
(see Fig-5)

この操作を，続けられる限り続ける。もはやできなくなつてもまだ ribbon が存在したら，次の様にして矛盾を出す:
(see Fig-6) 3つ以上の矩形が，1か所に集っている所を，singular line とよぶことにする。(see Fig-7)

Tを各 singular line で cut する。すると，2つの，"のりしろ"を持った矩形に分解する。

次のことは明らかである。
$\partial T = \{x \in T \mid x$ は，分解した矩形の boundary の点で，"のりしろ"の上にない $\}$

singular line の数の induction によって次の補題を証明できる:

補題　次の様な ribbon Rが存在する:

① Rは丁度2つの，"のりしろ"を持った矩形によって，はりあわされてできる。

② singular line は唯一つである。

③ ∂R は上の ∂T と同じように定義するとき,

$H_1(T, \partial T) \cong H_1(R, \partial R)$ となる。

(補題の証明)

矩形は $I \times I$ の構造を持ち, $I \times \partial I$ が"のりしろ"であるとして一般性を失わない。

次の操作ρは, 用いられるだろう:

$I_1 \times I_1$, $I_2 \times I_2$, $I_3 \times I_3$ を矩形とする3つの矩形が, $I_1 \times 1$, $I_2 \times 1$, $I_3 \times 0$ で,"のりづけ"されているとき, $I_1 \times 1$ を $I_3 \times 0$ に"のりづけ"し, $I_2 \times 1$ を $I_3 \times 1$ に"のりづけ"する。(Fig-8)

induction の仮定の中に, 操作ρを用いることを入れて証明する。

まず, 1つの矩形をTからはずす。その結果をT'とすると, T'はまた, 丁度2つの"のりしろ"を持った矩形によって構成されている ribbon である。(see Fig-9)

[Case A] T'の connected component が1つのとき:

T'は induction の仮定から1つの singular line をもつ ribbon R'に操作ρによって変形できる。そこで取り去った矩形を初めについていた部分にはりつける。各,"のりしろ"部分を, 操作ρを用いてR'の singular line の所に slide すればよい。それをRとする。

[Case B] Tの connected component が2つのとき：
各々を T_1' と T_2' とする。すると induction の仮定から，各 component に対して R_1' と R_2' が存在する。そこで，取り去った矩形を最初についていた部分にはりつける。次に各〃のりしろをまた操作 ρ を用いて R_1' と R_2' の singular line に slide する。（see Fig-10）次に取り去った矩形を用いて，R_1' の singular line に集まる"のりしろ"を R_2' の singular line に slide する。それを R とする。（補題の証終）
（系1の証明の続き）
さて，定理2から，∂R は connected でなくてはならない（実際 connected でなければ，$H_1(R, \partial R) \neq 0$）。
したがって，R はいくつかの輪管と0ではない，いくつかのメービウスの帯の各母線を1つにはりあわせたものになる。（see Fig-11）したがって，$H_1(R, \partial R) \neq 0$ したがって定理2に矛盾する。したがって，Tを構成していた側の index 1と2の critical handles は cansel されるから命題4により証明される。

系2. Mを property Eを持つ manifold とする。すると，同じ side の index 1の critical handles の数と index 2の critical handles の数は等しい。

（証明） outside の index 1 の critical handles を，1.2-level に change し，outside の index 2 の critical handles を 1.8-level に change した manifold を M' とする。

$$T_i^1 = M'[0,1]$$
$$T^1 = M'[0,1.2]$$
$$T_0^2 = M'[0,1.8]$$
$$T^2 = M'[0,2.0] \quad \text{とする。}$$

次の exact sequence を考える：

$$H_3(K) + H_3(T_0^2) \longrightarrow H_3(M') \xrightarrow{\partial} H_2(K \cap T_0^2) \longrightarrow H_2(K) + H_2(T_0^2) \longrightarrow H_2(M') = 0$$

ここで，$K = \overline{(M' - T_0^2)}$ 。

上の sequence で $H_3(K) = H_2(K) = H_3(T_0^2) = 0$ であって，∂ は isomorphism であるから，$H_2(T_0^2) = 0$ である。

そこで，また次の exact sequence を考える：

$$H_2(T_0^2) \longrightarrow H_1(T_0^2, T_i^1) \longrightarrow H_1(T_i^1) \xrightarrow{j} H_1(T_0^2)$$

定理2の後半と同様にして，j の injection が示せるから，$H_2(T_0^2) = 0$ より，$H_1(T_0^2, T_i^1) = 0$ となる。

さらに次の exact sequence を考える：

$$H_2(T_0^2, T_i^1) \to H_2(T_0^2, T^1) \to H_1(T^1, T_i^1) \to H_1(T_0^2, T_i^1)$$

すると，定理2によって $H_1(T_0^2, T_i^1) = 0$ であるから，

$H_2(T_0^2, T_i^1) = 0$ より　$H_2(T_0^2, T^1) \cong H_1(T^1, T_i^1)$。

また, $H_2(T_0^2, T^1)$ は, outside の index 2 の critical handles の数を示し, $H_1(T^1, T_i^1)$ は outside の index 1 の critical handles の数を示している。

同様にして, inside にも示せる。　　（証終）

Fig-1

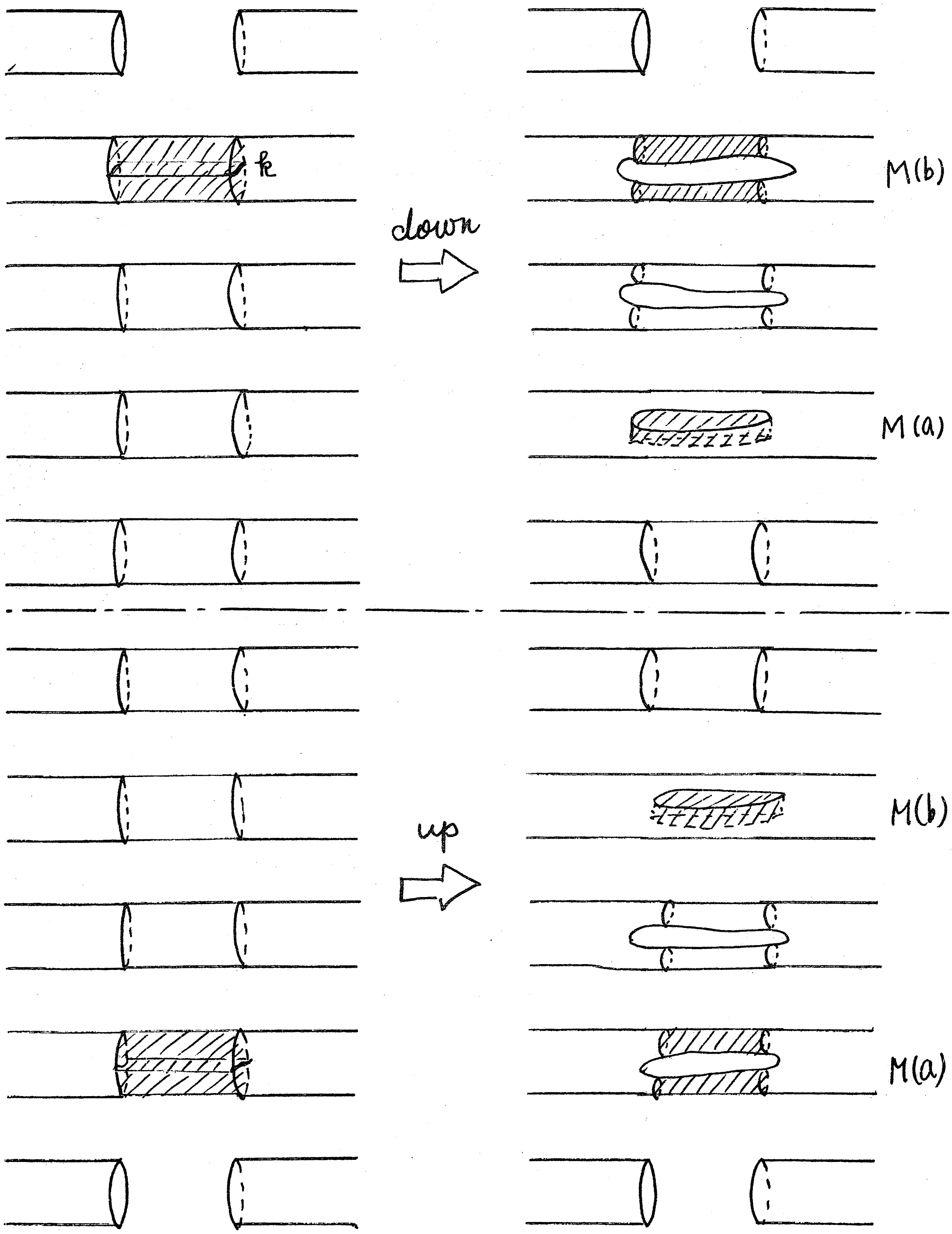


Fig-2

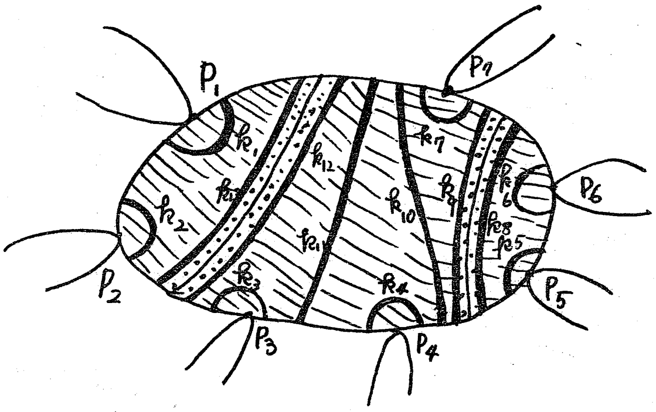


Fig-3

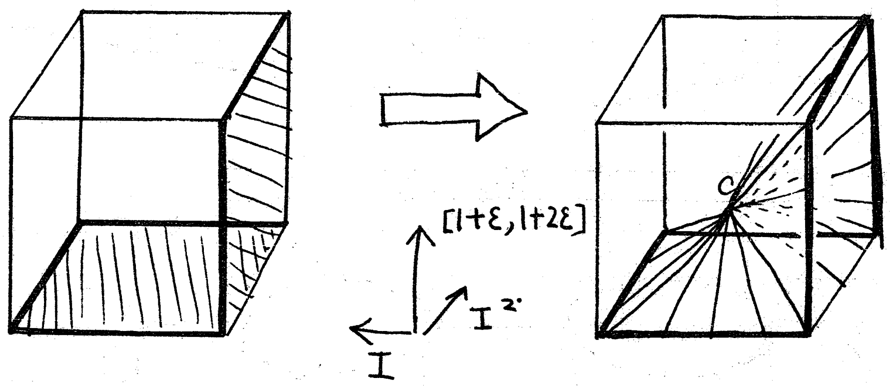


Fig-4

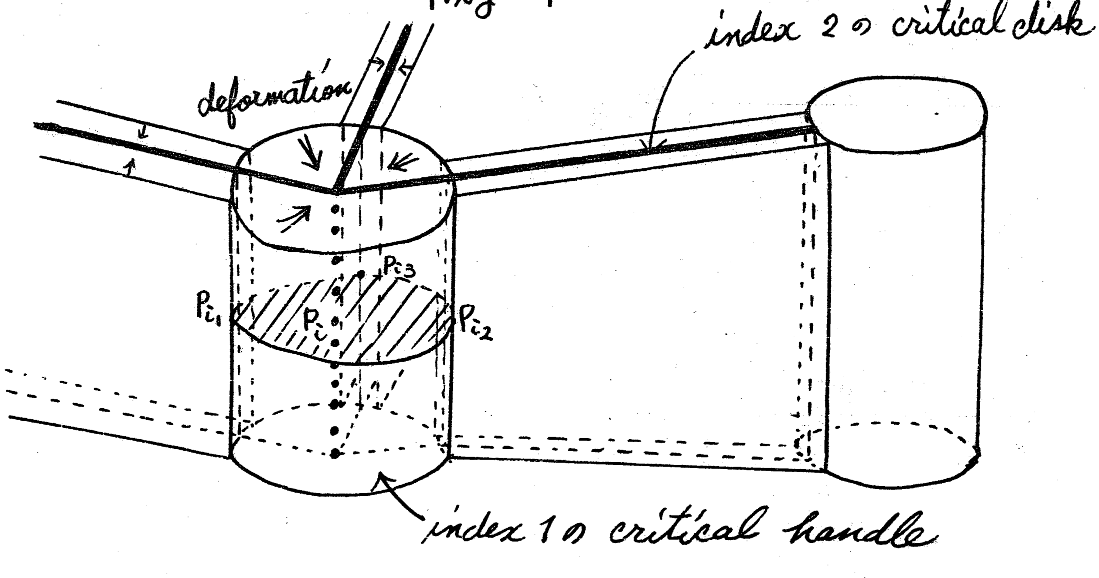


Fig-5

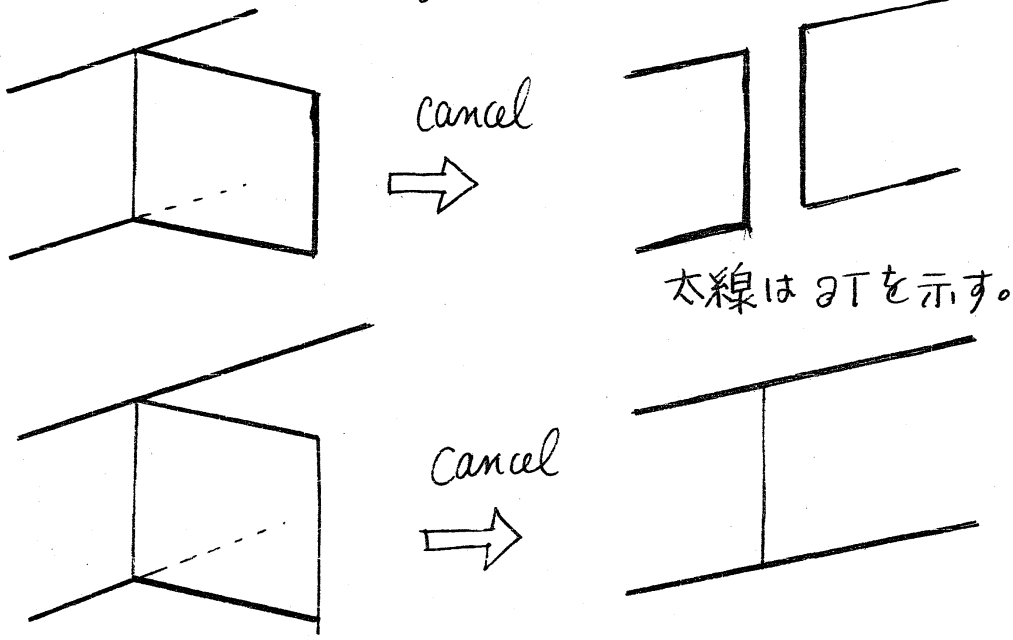


Fig-6

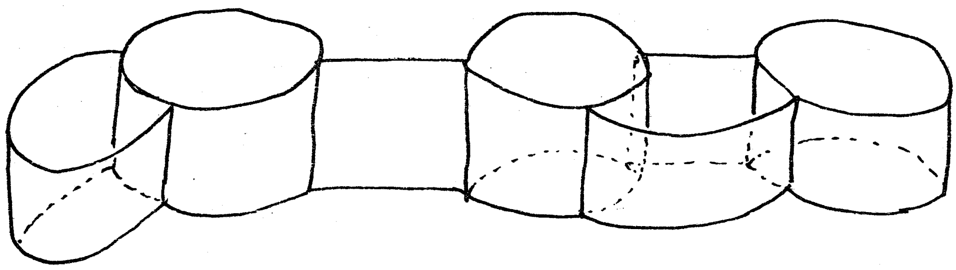


Fig-7

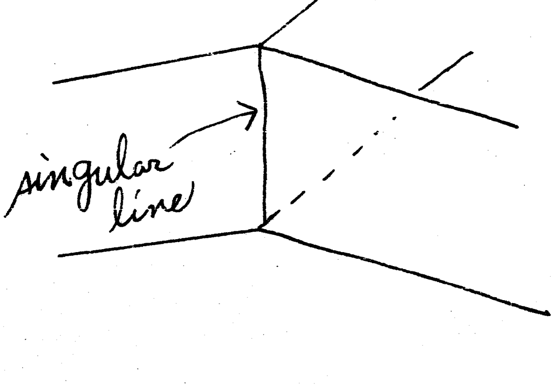


Fig - 8

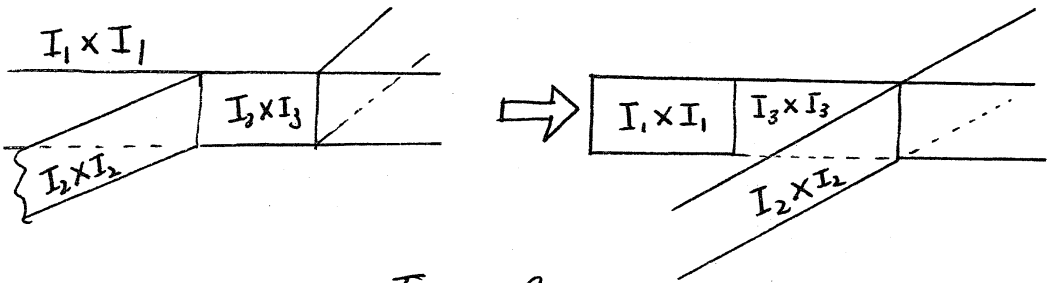


Fig - 9

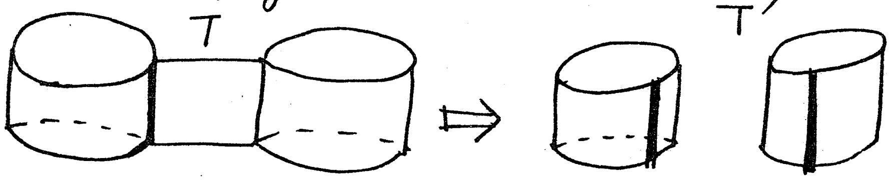


Fig-10

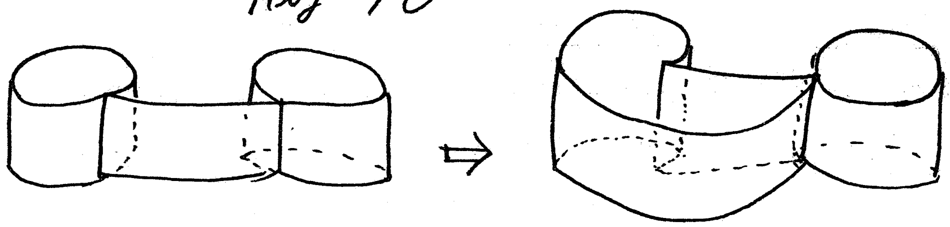
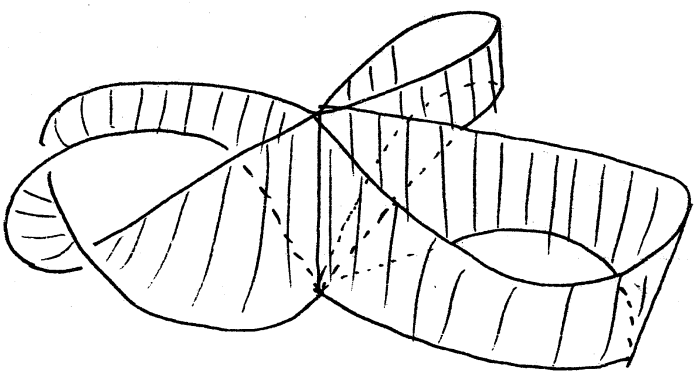


Fig-11



An Example of Homology 3-sphere in R^4

by

Teruo Nagase

We shall consider of the following conjecture:
Given a homology 3-sphere M in R^4 whose all critical points of index i with respect to a level line in the space lie on level i, does it bound a 4-ball in R^4 ?

In this note, we shall obtain a negative answer for this conjecture. Full details will be published later.

I wish to thank Professor T. Homma, Professor M. Kato, Professor S. Maseki, and Y. Tsukui for their encouragement in preparation of this paper.

<u>Theorem</u>. There exists a homology 3-sphere in R^4 which does not bound a 4-ball in R^4, although its critical points of index i with respect to a level line in R^4 (we take a level line of $R^4 = R^3 \times R$ the last axis) lie on level i.

Proof.

I Construction of a homology sphere M (see Fig-1)

(Fig. 1)

First, we take a 3-ball D^3 in $R^3 \times 0$ and an annulus $(\partial D^3=)S^2 \times [0,1] \subset R^3 \times R$. Then in $R^3 \times 1$, attach to $S^2 \times 1 \subset (R^3 \times 1)$ two handles of index 1 from the outside of $S^2 \times 1$ and a hadle of index 1 from the inside of $S^2 \times 1$, disjointly. (inside means the bounded closed domain in $R^3 \times 1$ bounded by $S^2 \times 1$ and outside means the complimentary closed domain of inside).

This gives a surjery of S^2 and the result which is a surface of genus 3 will be denoted by T. We represent element of generator of $\pi_1(T)$ as Fig-2.

(Fig. 2)

Taking $T \times [1,2]$, we then attach three handles of index 2 in the following way :

We choose mutually disjint simple closed curves $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ on T such that ;

(1) $\varepsilon_1 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}$

(2) $\varepsilon_2 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz$

(3) $\varepsilon_3 = byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz$ (see Fig-3)

(Fig. 3)

Substituting $a=b=c=1$ to formula (1) and (2) we get $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=1$. Substituting $x=y=z=1$ to the formula (3) we get $\varepsilon_3=1$. Then it follows from Dehn's lemma and the irreducibility of the solid torus that there exists mutually disjint two 2-disks in the outside of $T \times 2 \subset R^3 \times 2$ bounding $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ and a 2-disk in the inside of $T \times 2 \subset R^3 \times 2$ bounding ε_3.

Thickening these three disks, we have the required hadles of index 2. This gives a surgery of $T \times 2$. And the result of this surgery on T is a 2-sphere S^2 and we may take $S^2 \times [2,3] \cup D^3 \times 3$ where $\partial D^3 = S^2$.

II Computation of $\pi_1(M)$

Then

$$
\begin{aligned}
G = (a,b,c,x,y,z \ : \ & b=x=z=1, \\
& byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}=1 \\
& byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz=1 \\
& byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= (a,c,y \ : \ & ya^{-1}y^{-1}\underline{c^{-1}y^{-1}cyay}^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
& ya^{-1}y^{-1}\underline{c^{-1}c^{-1}y^{-1}cyay}^{-1}c^{-1}yc=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1) \\
= (a,c,y \ : \ & ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
& ya^{-1}y^{-1}c^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}yc=1 \\
& yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1) \\
= (a,c,y \ : \ & ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
& ya^{-1}y^{-1}c^{-1}ay^{-1}aya^{-1}=1 \\
& yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1) \\
= (a,y \ : \ & ya^{-1}ya^{-1}yay^{-1}ay^{-1}ay^{-1}aya^{-1}=1 \\
& aya^{-1}yya^{-1}yay^{-1}ay^{-1}a^{-1}ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}=1) \\
= (v=ay^{-1},y \ : \ & v^{-1}v^{-1}yvvvvyv^{-1}=1 \\
& vyv^{-1}yv^{-1}yvvy^{-1}v^{-1}v^{-1}y^{-1}v=1) \\
= (v,y \ : \ & v^{-1}v^{-1}yvvvvyv^{-1}=1 \\
& vyv^{-1}yv^{-1}yv^{-1}yvvy^{-1}v=1) \\
= (v,w=yv^{-1} \ : \ & v^{-1}v^{-1}wvvvvvw=1, \ vwwwwvvw^{-1}v=1) \\
= (v,w \ : \ & v^{-2}wv^{5}w=1, \ w^{5}v^{7}=1)
\end{aligned}
$$

Let S_7 be the symmetric group of degree 7. We define a homomorphism $f:G \to S_7$ as follows :

$$f(v) = (1526374), \quad f(w) = (34672).$$

Then $f(G)$ is not a trivial subgroup of S_7, so G is a non-trivial group. Then M is not a homotopy 3-sphere. And it is easy to see that M is a homology 3-sphere.

Remark. $\pi_1(M)$ equal to the Mazur's group [1] $(x,y \ : \ x^7=y^5, \ y^4=xyx)$.

Fig. 1

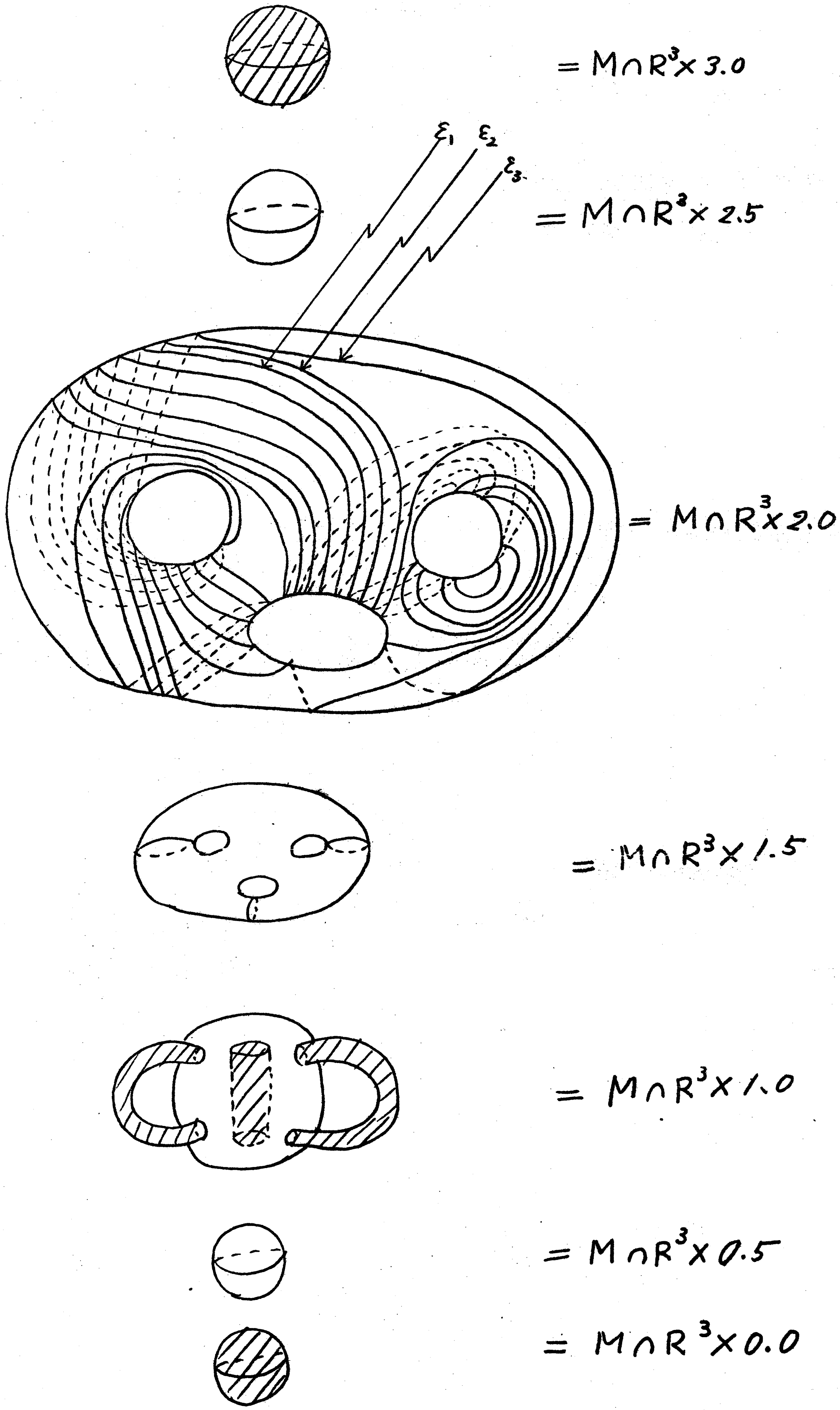


Fig. 2

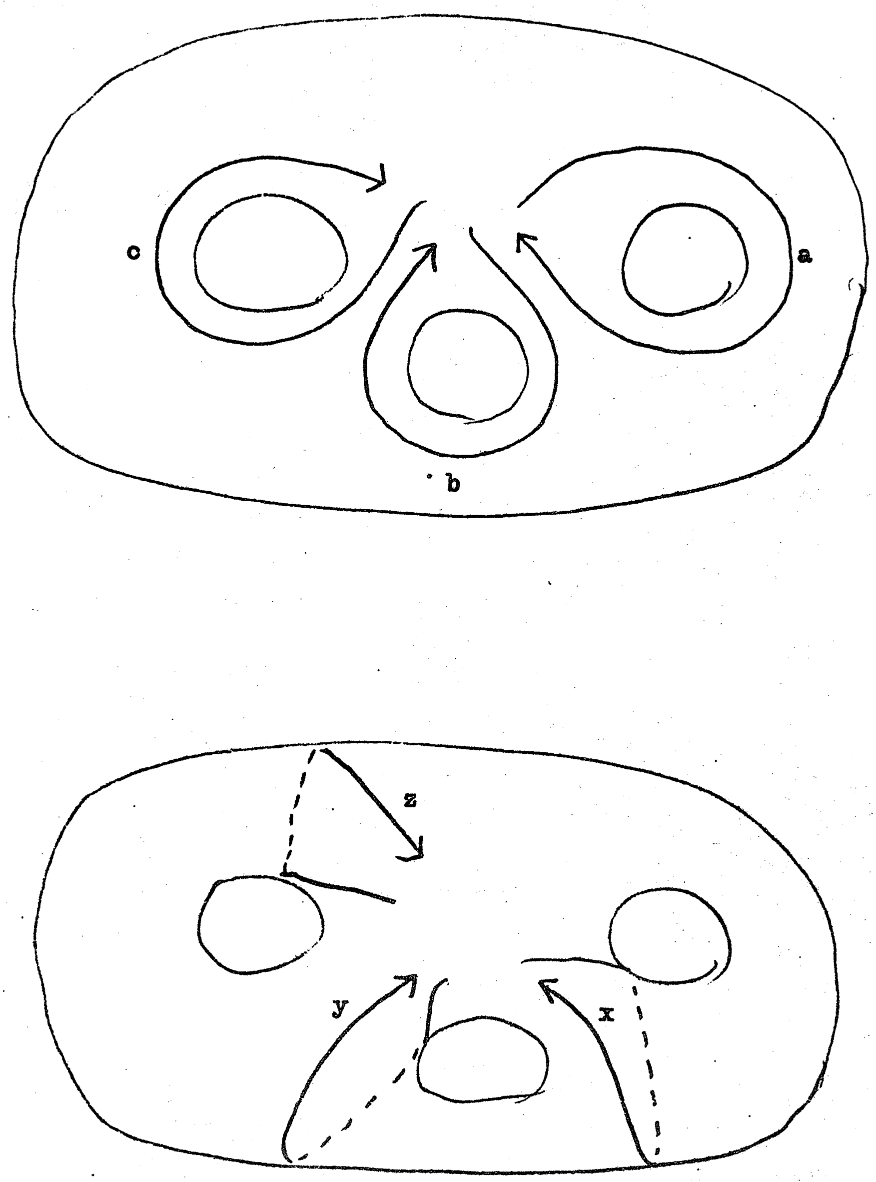
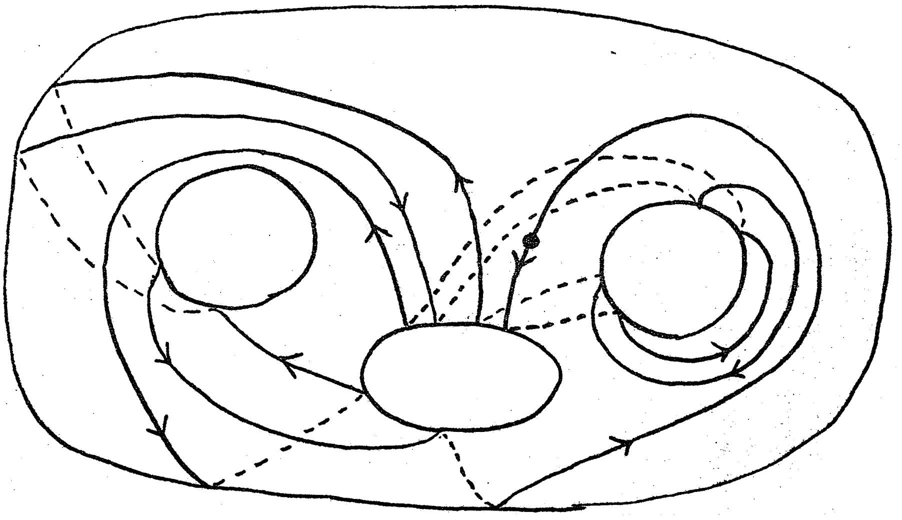
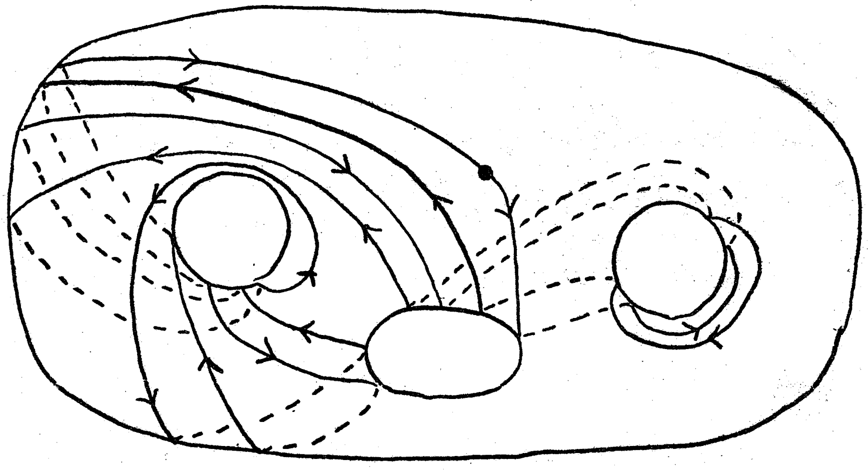


Fig. 3.

ε_1 =



ε_2 =



ε_3 =