数理解析研究所講究録
第152巻1972年169-175

On knotted tori in S^4

上智大　理工　横山和夫

§1. 序

torus knot (link) を4次元へ拡張し、ほとんど同じ結果が成立することを示す。

3次元球面 S^3 のお互いに相交わらない単一閉曲線 $l = k_1 \cup k_2 \cup \cdots\cdots \cup k_s$ を component s の link (in S^3) と呼ぶ。特に component が1の時 knot と呼ぶ。2つの link l_1, l_2 に対して同値類を次の様に定義する。

[定義]　l_1 と l_2 が同値であるとは

$$\exists h : S^3 \longrightarrow S^3 \text{ ; homeomorphism}$$
$$h(l_1) = l_2$$

この同値関係により link は link type に分類される。

[定義]　knot k が unknot であるとは

$$\exists D^2 \subset S^3 \text{ ; 2-disk}$$
$$\partial D = k$$

特別な link として次の様な link が考えられている.

[定義] link l が torus link であるとは

$\exists\, k$; unknot (loop)

$l \subset \partial N(k; S^3)$

ここに $N(\ ;\ )$ は regular neighborhood

これを4次元へ拡張するために次の様に考える.

4次元球面 S^4 のお互いに相交わらない genus 1 の単一閉曲面 $L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_s$ を component s の linked tori (in S^4) と呼ぶ。特に component が1の時 knotted torus と呼ぶ。link と同様に

[定義] 2つの linked tori L_1, L_2 が同値であるとは

$\exists\, h : S^4 \longrightarrow S^4$; homeomorphism

$h(L_1) = L_2$

[定義] knotted torus K が unknot であるとは

$\exists\, D^2 \times S^1 \subset S^4$

$\partial(D^2 \times S^1) = K$

そして torus link の拡張として

[定義] linked tori L が T-linked tori であるとは

$\exists\, K$; unknotted torus

$L \subset \partial N(K; S^4)$

このように定義すると torus link とほとんど同じ結果が

成立する。これを今後考えていこう。

§2. Component の数について.

torus link l については $\partial N(k;S^3)=T^2$ とおくと $T^2\approx S^1\times S^1$ (homeomorphic) だから $H_1(T^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ そこで生成元を a, b とする。 すると $l=k_1\cup k_2\cup\cdots\cup k_s$ の表わす homology class of $H_1(T^2;\mathbb{Z})$ を $pa+qb$ とすると. よく知られた結果として.

<u>Proposition</u> もし任意の i について $k_i\not\sim 0$ on T^2 ならば p と q の最大公約数は l の component の数 s に等しい。

T- linked tori L についても同様なことが成立する。すなわち. $\partial N(K;S^4)=T^3$ とおくと $T^3\approx S^1\times S^1\times S^1$ だから $H_2(T^3;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ そこで生成元を a, b, c とする。 すると $L=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_s$ の表わす homology class of $H_2(T^3;\mathbb{Z})$ を $pa+qb+rc$ とすると.

<u>Theorem</u> もし任意の i について $K_i\not\sim 0$ in T^3 ならば p, q, r の最大公約数は L の component の数 s に等しい。

もっと一般に境界のない(又は連結境界をもつ) PL compact connected n-manifold M^n に対しても, Poincaré duality によって $H_{n-1}(M^n; Z) \cong Z \oplus Z \oplus \cdots\cdots \oplus Z$ であるので，その生成元を $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_s$ とすると

<u>Theorem</u> trivial でない homology class

$$\theta = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots\cdots + p_s a_s$$

に対して，次の2つの条件は同値である．

(i) θ が β 個の connected component をもつ closed submanifold によって実現できる。

(ii) $p_1, p_2, \cdots p_s$ の最大公約数を α とすると $\beta \geq \alpha$.

。証明及び詳しいことは［5］参照．

§3. homology class と link type について．

homology class of $H_1(T^2; Z)$ と link type については良く知られた結果として

<u>Proposition</u> 2つの torus link $l = k_1 \cup k_2 \cup \cdots\cdots \cup k_s$ と $l' = k_1' \cup k_2' \cup \cdots\cdots \cup k_t'$ に対して，もし任意の i, j について $k_i \nsim 0$ $k_j' \nsim 0$ on T^2 ならば，l の表わす homology class を θ，l' の表わす homology class を θ' とすると

$$\theta = \theta' \Longrightarrow l \text{ と } l' \text{ は同じ type}$$

同様なことは T- linked tori についても成立する。す

なわち，

<u>Theorem</u>　2つの $\mathbb{T}$-linked tori $L_1 = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_s$ と $L_2 = K_1' \cup K_2' \cup \cdots \cup K_t'$ に対して，もし任意の i, j について $K_i \nsim 0$，$K_j' \nsim 0$ in $\mathbb{T}^3$ ならば，L_1 の表わす homology class of $H_2(\mathbb{T}^3; Z)$ を θ_1，L_2 の表わす homology class を θ_2 とすると

$$\theta_1 = \theta_2 \Longrightarrow L_1 \text{ と } L_2 \text{ は同じ type}$$

・証明及び詳細は［2］又は［4］参照．

逆については torus link に対しては．

<u>Proposition</u>　torus link ℓ の表わす homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; Z)$ を $pa + qb$ とすると

$$\pi_1(S^3 - \ell) = \{x, y \,;\, x^p = y^q\}$$

そして Alexander matrix，Alexander polynomial を考えることにより，次の様に torus link は完全に分類されている。

<u>Proposition</u>　2つの link ℓ, ℓ' に対して，ℓ と ℓ' が同じ type である必要十分条件は ℓ, ℓ' の表わす homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; Z)$ をそれぞれ $pa+qb$，$p'a+q'b$ とすると $p = |p'|$ $q = |q'|$ 又は $p = |q'|$，$q = |p'|$ が成り立つことである。但し ℓ, ℓ' の component k_i, k_j' に

171

homologous 0 on $\mathbb{T}^2$ なるものは存在しないとする。

ところが $\mathbb{T}$-linked tori については $N(K; S^4) \approx D^2 \times S^1 \times S^1$ であるが、∂D^2 と homology intersection number in $\mathbb{T}^3$ が 1 である生成元を特に c としておくと

<u>Theorem</u> $\mathbb{T}$-linked tori L の表わす homology class of $H_2(\mathbb{T}^3; Z)$ を $pa + qb + rc$，p と q の最大公約数を α とすると

$$\pi_1(S^4 - L) = \{x, y \ ; \ x^\alpha = y^r\}$$

証明は van Kampen の定理を2回うまく使うことによって得られる。

したがって torus link と同じ方法によっては分類が完全にはできない。他の方法によって分類できるかもしれない。それは今後の課題である。

［参考文献］

[1] R. H. Crowell and R. H. Fox ; INTRODUCTION TO KNOT THEORY. Ginn and Company (1963)

[2] W. Jaco ; Surfaces embedded in $M^2 \times S^1$. Can. J. Math., vol 22 (1970)

[3] K. Reidemeister ; KNOTENTHEORIE. Chelsea

(1948) New York

[4] K. Yokoyama ; Surfaces embedded in a 3-manifold. Master thesis (Kobe Univ.)

[5] K. Yokoyama ; $\tilde{L}$-equivalence and representations of homology classes. Yokohama Math. J. (to appear)