数理解析研究所講究録
第153巻1972年176-194

非線型整数計画法について

中央大・理工　西見二昭

§1 序

通常，整数計画法とは線型計画問題に於て整数解の範囲内で最適解を追求することの意味に用いられる。この分野では，LP では見られなかった困難が多々存在するにもかかわらず近年各種のかなり実用的な手法が開発されている。一方「非」線型計画問題の整数値最適解を求める方法—非線型整数計画法—については，未だ実用的なアルゴリズムは存在しない。

筆者の経験によれば，F. Glover[(1)] の "surrogate constraint" の手法（これは線型整数計画法のために開発された）は種々の整数計画法のアルゴリズムと併用するとき多くの場合後者の能率化に極めて有効であった。しかも以下に示されるように "surrogate constraint" の理論上の有効性は，目的関数や制約不等式の線型性に全く依拠していないのである。このことは非線型計画法における，"surrogate constraint" を系統的

に活用した実用的解法の可能性を示唆している。

従ってまた，非線型整数計画問題に於ける"S-制約"("surrogate constraint"を今後このように略記する）を構成する実用的な手法の開発が，この角度からのアプローチにとって不可欠となってくる。本稿後半では，"S-制約"の一つの簡明な構成法（非線型性が余り強くない場合に有効）を示した。

使用する主な記号を以下に掲げておく。

$M = \{1, \ldots, m\}$ ，　m：制約不等式の個数。

$N = \{1, \ldots, n\}$ ，　n：変数の個数。

$\lambda_j \ (j \in N)$ ：正の整定数。

x ：実 n-ベクトル。

$X = \{x \mid 0 \leqq x_j \leqq \lambda_j \ (j \in N)\}$

$\Omega = \{x \mid x \in X, \ x_j \ \text{integer} \ (j \in N)\}$

$U = \{(u_1, \ldots, u_m) \mid u_i \geqq 0 \ (i \in M), \ \exists i \in M \ (u_i \neq 0)\}$

$g(x), F_1(x), \ldots, F_m(x)$ ：X をふくむ R^n のある領域で定義された実数値関数で，連続的微分可能。

§2　非線型整数計画法における"surrogate constraint"

ここでとりあつかう非線型計画問題は次の形のものである。

［問題 I］　$\Omega_0 = \{x \mid F_i(x) \geqq 0 \ (i \in M), \ x \in \Omega\}$ において $g(x)$ を最小にする x を求めよ。

今後これを次のように略記する。

$$[\mathrm{I}] \qquad \min\{g(x) \mid F_i(x) \geqq 0 \ (i \in M),\ x \in \Omega\}$$

[I] から整数値制約条件を除くと次の [F] が得られる。

$$[\mathrm{F}] \qquad \min\{g(x) \mid F_i(x) \geqq 0 \ (i \in M),\ x \in X\}$$

[I] または [F] に対する"S-制約"とは，任意の $u \in U$ から得られる $\sum_{i=1}^{m} u_i F_i(x) \geqq 0$ なる不等式のことをいう。$u_i \geqq 0$ かつ $u \neq 0$ であるから $M^+(u)$ を

$$M^+(u) = \{i \mid u_i > 0\} \subset M$$

と定義すると，U の定義から $M^+(u) \neq \phi$ である。

[I], [F] における m 個の制約式 $F_i(x) \geqq 0$ $(i \in M)$ を，ある S-制約でおきかえた問題をそれぞれ [IS]，[FS] とする。即ち，

$$[\mathrm{IS}] \qquad \min\{g(x) \mid f(x) \geqq 0 \ (f = uF,\ u \in U),\ x \in \Omega\}$$

$$[\mathrm{IF}] \qquad \min\{g(x) \mid f(x) \geqq 0 \ (f = uF,\ u \in U),\ x \in X\}$$

次の lemma が示すように，S-制約はもとの m 個の制約条件の「代理」として原問題の種々の情報を提供する。

(lemma)

1° $\bar{x}$ が [I] で feasible $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ は [IS], [FS] で feasible.

2° [IS] が infeasible $\Longrightarrow$ [I] は infeasible.

[FS] が infeasible $\Longrightarrow$ [I], [F] は infeasible.

3° $\bar{x}$ が [IS] または [FS] の feasible solution.

$\Longrightarrow$ $\exists i \in M^+ \ (F_i(\bar{x}) \geqq 0)$.

$\bar{x}$ が [IS] または [FS] の feasible solution

$$\Longrightarrow [\ \exists i \in M^{+}(F_i(\bar{x}) < 0) \Rightarrow \exists k \in M^{+}(F_k(\bar{x}) > 0)\ ]$$

4° [Iś], [I] の optimal solution をそれぞれ $\bar{x}$, $\hat{x}$ とすると $g(\bar{x}) \leqq g(\hat{x})$

5° [Iś] の optimal solution が [I] で feasible

$\Longrightarrow$ それは [I] の optimal solution である。

この lemma により，enumerative に整数計画問題 [I] を解くさいに [Iś] に対する infeasible vector は初めから考慮しなくてよいし，またあるś-制約下での optimal vector を $\bar{x}$ とするとき，4° によって，$g(\bar{x}) \leqq g(x)$ を満足しない格子点は全部棄却して差支えない。

tree search 型のアルゴリズムでは，ś-制約を用いて先ず枝全体の test を行ない，枝に属するどの vector も [Iś] に対して infeasible であるか，または $g(x) < g(\bar{x})$ （ただし $\bar{x}$ は [Iś] の最適解）であることが判明したら直ちにその枝を棄てて隣りの枝へ移ってよい。従って 2つの s-制約 $f(x) \geqq 0$ と $\bar{f}(x) \geqq 0$ とがあったとき

$$\min\{g(x) \mid f(x) \geqq 0, x \in \Omega\} \geqq \min\{g(x) \mid \bar{f}(x) \geqq 0, x \in \Omega\}$$

ならば制約 $f(x) \geqq 0$ の方を $\bar{f}(x) \geqq 0$ より「強い」という。

実際に tree search 型のアルゴリズムを実施してみると極端に時間を消費することが多い。しかし，新しい枝に到達したとき，枝に対するあらゆる test に先行して，枝の中に残さ

れた変数に対するなるべく強力なS-制約を構成し，これを用いてあらかじめ枝に関する情報をできるだけ多く引き出しておいてこれを以後の作業に活用することは，Glover[1]が線型問題で示したように極めて有効であり，また以下に示すように非線型問題に対しても有効性を失わないのである。

次にのべる定理1では，あるS-制約の feasible region が原制約のそれよりも広いときは，前と異なる feasible region をもつ新しいS-制約を構成しうることを示し，定理2では，$m=2$ のときには，定理1の結果を用いて「最強の」S-制約を構成することが可能であること，ならびにその構成のしかた即ち

$$\max_{u\in U} \min \{g(x) \mid f(x)\geqq 0\ (f=uF),\ x\in\Omega\} = \min_{x\in\Omega} \{g(x) \mid \bar{u}F(x)\geqq 0\}$$

なる $\bar{u}\in U$ の求め方が示される。

［定理1］　［IS］の feasible solution $\bar{x}$ が［I］では infeasible であるとき，

$$M_1=\{i \mid F_i(\bar{x})\geqq 0,\ i\in M^+\},\qquad M_2=\{i \mid F_i(\bar{x})<0,\ i\in M^+\}\neq\phi,$$

$$\varphi_v=\sum_{i\in M_1} u_iF_i + v\sum_{i\in M_2} u_iF_i \qquad (v>0),$$

$$\Delta^+=\sum_{i\in M_1} u_iF_i(\bar{x}),\qquad \Delta^-=-\sum_{i\in M_2} u_iF_i(\bar{x})$$

とすると

$$0<v\leqq \Delta^+/\Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x})\geqq 0,$$

$$v>\Delta^+/\Delta^- \Rightarrow \varphi_v(\bar{x})<0.$$

［証］　lemma 3° から $\Delta^+>0$，仮定により $\Delta^->0$ で

$\varphi_v(\bar{x}) = \Delta^-(\Delta^+/\Delta^- - v)$ は $\Delta^+/\Delta^- - v$ と同符号。

［定理２］ $m=2$ のときの［I］が feasible ならば，第1図のアルゴリズムが［I］に対する最強の S-制約を与えるような $\varepsilon\,(>0)$ の値が存在する。

［証］ 第1図 box 1 でつくられた S-制約を $F(x)+G(x)\geqq 0$ とし，box 2 で第 i 回目につくられた最適解を x^i とする。$F(x^1)\geqq 0$, $G(x^1)\geqq 0$ ならば $F+G\geqq 0$ が最強の S-制約である（lemma 5° と 4°）。そうでない場合には，

$F(x^1)\geqq 0$, $G(x^1)<0$

を仮定してよい。

$f_v = F + vG \quad (v>0)$

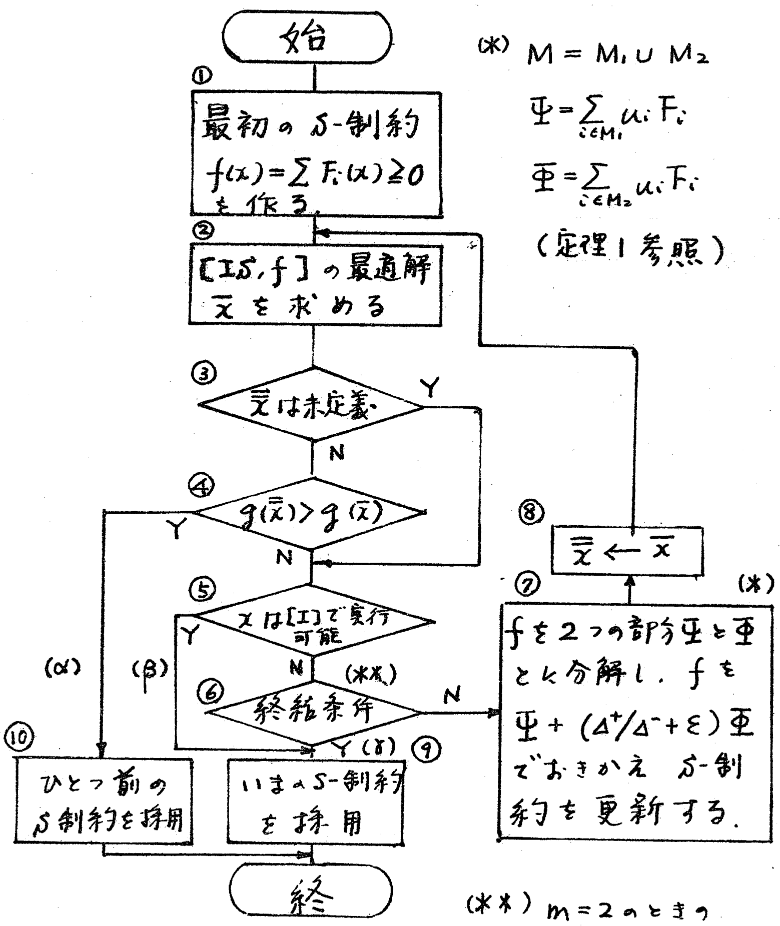
とし，問題

(1) $\min\{g(x) \mid f_v(x)\geqq 0,\ x\in\Omega\}$

の最適解を $x[v]$ とすると，

(2) $\exists v>1\ (G(x[v])\geqq 0)$.

なぜなら，Ω は有限集合だから，$v_0 \leqq v < \infty$ なるすべての v に対し



（第１図）

（※※）$m=2$ のときの終結条件は $\bar{\Phi}(\bar{x})\geqq 0$（定理２参照）

て $x[v_0]$ が (1) の最適解となっているような $v_0(>1)$ が存在しなければならない。しかし，$1<v<\infty$ なる v に対しつねに $G(v[v])<0$ だとすると，$G(x[v_0])<0$ であって，定理1によって $v>-F(x[v_0])/G(x[v_0])$ なる v に対して $x[v_0]$ は $f_v(x)\geqq 0$ をみたさない。これは $v_0\leqq v<\infty$ なる v に対して，$x[v_0]$ が (1) の最適解であることと矛盾。故に (2) が成立。

$G(x^i)<0$ $(i\geqq 1)$ のとき，$v^i=-F(x^i)/G(x^i)$ とおけば，定理1により $v^i<v$ なる v に対して x^i は (1) に対し *infeasible*. 次の x^{i+1} を定めるのに用いられる新しい δ-制約（これは box 7 で作られる）を $F+(v^i+\delta^i)G\geqq 0$ とすると，$\delta^i>0$. そして δ^i の値はあらかじめ ε の値を十分小さく選んでおくことによって十分に小さくすることができる。Ω は有限集合であるから $\delta^i(>0)$ を適当に小さな値にしておくことにより，$x^{i+1}=x[v^i+\delta^i]$ を $v^i<v\leqq v^i+\delta^i$ なる v に対しても (1) の最適解たらしめることができる。

従って第1図の $\varepsilon(>0)$ が適当に小さく選んであれば，$x^1=x[1]$ から出発して $G(x^k)<0$ $(k\leqq i)$ である限り上記のような解の列 $x^{(k+1)}=x[v^k+\delta^k]$ $(1\leqq k\leqq i)$ を逐次作ることができ，定理1によってどの x^k も $0<v\leqq v^k$ なる v に関する (1) の *feasible solution* だから $g(x^{k-1})\leqq g(x^k)$ が成立。一方，$v^k<v^{k+1}$ であるから，(2) によって，やがてある番号 ν で

$$G(x^i)<0 \quad (1 \leqq i \leqq \nu-1) \quad \text{かつ} \quad G(x^\nu) \geqq 0$$

が成り立たねばならない。 x^ν に対しては 〈i〉又は〈ii〉が成立。

〈i〉 <u>$F(x^\nu) \geqq 0$</u> ならば lemma 5° により x^ν が[I]の optimal solution で，得られたふ-制約は lemma 4° により最強である（第1図（β））。

〈ii〉 <u>$F(x^\nu)<0$</u> のとき，$x^\nu=x[v^{\nu-1}+\delta^{\nu-1}]$ は定理1によって $v^{\nu-1}+\delta^{\nu-1} \leqq v<\infty$ なる v に対し（1）の実行可能解である。また前述のように ε は適当に小さく選ばれていて，x^ν は $v^{\nu-1}<v \leqq v^{\nu-1}+\delta^{\nu-1}$ なる v に対し（1）の最適解となっている。故に

(3) $$g(x^\nu)=\max_{v^{\nu-1}<v<\infty} \min \{ g(x) \mid F+vG \geqq 0, x \in \Omega \}.$$

また前記のように $x^{\nu-1}$ は $0<v \leqq v^{\nu-1}$ なる v に関する（1）の実行可能解だから

$$g(x^{\nu-1})=\max_{0<v<v^{\nu-1}} \min \{ g(x) \mid F+vG \geqq 0, x \in \Omega \}.$$

故に

(4) $$\max_{0<v<\infty} \min \{ g(x) \mid F+vG \geqq 0, x \in \Omega \}=\begin{cases} g(x^\nu), & g(x^\nu) \geqq g(x^{\nu-1}) \\ g(x^{\nu-1}), & g(x^\nu)<g(x^{\nu-1}) \end{cases}$$

$g(x^\nu) \geqq g(x^{\nu-1})$ のとき，$F(x^\nu)<0$ かつ $G(x^\nu) \geqq 0$ であったから第1図（γ）による loop 脱出が行なわれ，最強の第 ν ふ-制約が採用される。

最後に，第1図（α）による loop 脱出が（4）の $g(x^\nu)<g(x^{\nu-1})$ に対応する。即ち（α）では $g(x^{i-1})>g(x^i)$ がはじめて成立しており，前頁で述べたように $G(x^k)<0 \Rightarrow g(x^{k-1}) \leqq g(x^k)$

であるから loop を (α) で脱出したとき $G(x^\nu) \geqq 0$ がはじめて成立しており、この番号 i が前記 ν に他ならない。そして番号 ν で $F(x^\nu) < 0$ となっている。(もしそうでなければ x^ν は lemma 5° により [I] の optimal solution であるが、このとき lemma 4° により $g(x^{\nu-1}) \leqq g(x^\nu)$ となり (α) の脱出条件と矛盾する) このとき採用される第 $(\nu-1)$ S-制約は (4) 第2行目によって最強である。 (証終)

この定理によって，$m=2$ の場合には，最強の S-制約の構成の原理的な保証が与えられる。しかし実地に S-制約の構成を行なおうとするといくつかの問題点にぶつかる。

〈i〉 ε のきめ方。 原理的には $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ と漸次 ε を小さくしてゆけば最後に残る S-制約の列は最強の制約に収束するであろうがこれは実用的な方法ではない。また特定の ε の値について上記のアルゴリズムを施行したとき，最強制約を網の目から逃してしまうかも知れない。

〈ii〉 $m \geqq 3$ のとき，定理2に用いられたアルゴリズムの終結条件 (box 6 で $G(\bar{x}) < 0$ and $G(\bar{x}) \geqq 0$) は利用できない。

〈iii〉 第1図によれば box 2 の中へ loop で戻る度に，整数計画問題を解かねばならない。制約不等式が1個しかないとはいえ整数最適解を求めるさいの本質的な困難は厳存している。S-制約の構成は，本来整数計画問題を解く手段であった。

まず〈i〉について。線型の場合でも[(1)~(4)]，非線型の場合でも最強のS-制約が容易に得られる場合には問題ないが，経験上，最強でなくても「かなり強力な」S-制約でも十分に有用であるから，tree search の効率を高めるという目的のためには，ある小さな ε について上記アルゴリズムを遂行すればよい。また〈ii〉については，第1図のアルゴリズムで更新されるS-制約は，定理1によってその feasible region が次第に変形されてゆきその結果目的関数の最適値が次第にせり上げられてゆく――即ち「強化」されてゆくのであるから，「かなり強力な」S-制約でありさえすればよいという立場から「あらかじめ決めておいた回数だけ『強化』を行なったこと」を終結条件とする――という Glover の処理法[(1)]は非線型の場合にも継承してよいだろう。最後に〈iii〉について。F. Glover の最初の手法[(1)]に対する variation がいくつか提唱されている[(2)~(4)]が，いずれも〈iii〉の解決がその motivation となっている。しかしながら，これらの variation は，本質的に問題の線型性に依拠しており，非線型問題への拡張は不可能である。(これらの variation はいずれも「最強の」S-制約の代りに「かなり強力な」S-制約が得られればよいという立場から，S-制約に関する整数-実数混合ミニマックス問題を通常の実数ミニマックス問題で近似させることによってLPの諸命

題を借用する。非線型問題[II]については，関数の凸性・凹性を適当に仮定して「近似的に最強の」S-制約を決定する手法をパラメトリックLPに帰着させることができるが，実用性の点は，未だ十分検討していないけれども，疑問がある）〈iii〉の問題，即ちあるS-制約の下での最適整数解を求めるにはやはり本格的なtree search（たとえば）が必要である。そして強力なS-制約を構成しておくことは，原問題のtree searchの手数を大巾に減殺することになるのだから，box 2で原問題の解法ルーチンを借用しても大局的には有意義な場合もあるであろう。しかし，ここでは「かなり強力な」S-制約が求まればよいという立場から，「制約不等式が1個しかない場合の非線型整数計画問題の簡単な近似解法」をいくつか先ず試みることを提唱する。本格的な解法にくらべてごく短い時間で決着がつくから，feasible solutionが全く得られなかった場合にだけ本格的なルーチンをcallすればよい（feasible solutionを得たあとは粗いきざみで目的関数値を「せり下げ」ればよい）からである。

次にこの「ふるいを兼ねた近似解法」―― これは問題が線型であるようなspecial caseにはGloverのアルゴリズム(1)に帰着する ―― のための諸定理をのべる。

§3 近似解法の準備

まず $0 \leqq x_j \leqq \lambda_j$ なる x_j を $x_j = x_{j1} + 2x_{j2} + 2^2 x_{j3} + \cdots$ と展開し x_{ji} (= 0 or 1) を新変数とみなすことができるから，問題の変数を全部0-1変数とみなしてもよい。このとき $g(x)$ は各変数の積式展開できる[5]から $g(x)$ は x_j の多項式であるとしておいてよい。また $\partial g / \partial x_j \geqq 0$ と仮定してよい。たとえば $g(x) = -x_1 + x_2^2 - 5x_3x_4$ ならば $x_1' = 1 - x_1$ を x_1 の代りに用い，$x_3' = 1 - x_3x_4$ を x_3, x_4 の代りに用いれば $g(x) = x_1' + x_2^2 + 5x_3' - 6$ となる。そして原問題[I]の制約式に $1 - x_3' \geqq x_3 \cdot x_4 \geqq 1 - x_3'$ 又は $2 - x_3' \geqq x_3 + x_4 \geqq 2(1 - x_3')$ を追加すれば[I]と同等な問題が得られ目的関数の偏微係数≧0となる。

以下の諸定理で[定理6]以外では，x_j を0-1変数であるとくに仮定してはいないが上記の事情は定理の有効さを増加する。

[定理3] [FS]または[IS]が feasible ならば次の成分をもつ[FS]または[IS]の最適解が存在する。

$$x_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{if} \quad f_i(x) \geqq 0 \quad \text{and} \quad g_i(x) \leqq 0 \\ 0 & \text{if} \quad f_i(x) \leqq 0 \quad \text{and} \quad g_i(x) \geqq 0 \end{cases} \qquad (x \in X)$$

ただし $f_i(x) = \partial f / \partial x_i$, $g_i(x) = \partial g / \partial x_i$

[証] $\bar{x}$ が最適解で，番号 $i \in P (\subset N)$ につき上記と異なる成分をもっていたとする。このとき δ_i ($i \in N$) を

$\delta_i = 0$ ($i \notin P$), $\delta_i = \lambda_i - \bar{x}_i$ ($i \in P$, $f_i \geqq 0$, $g_i \leqq 0$) , $\delta_i = -\bar{x}_i$

$(i \in P,\ f_i \leqq 0,\ g_i \geqq 0)$ と定めると $\hat{x} = \bar{x}_i + \delta_i$ は定理にのべられた成分をもち，$f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 f_i(\theta\hat{x} + (1-\theta)\bar{x})\,d\theta \cdot \delta_i \geqq f(\bar{x})$ だから $\hat{x}$ は feasible．$g(\hat{x}) = g(\bar{x}) + \sum_{i \in P} \int_0^1 g_i(\theta\hat{x} + (1-\theta)\bar{x})\,d\theta \cdot \delta_i \leqq g(\bar{x})$ であるから $\hat{x}$ は optimal．

［定理 4］ ある $\bar{x} \in X$ に関して $\alpha_i(\bar{x}, x) > 0$，$\beta_i(\bar{x}, x) \geqq 0$ $(x \in X,\ i \in N)$ であり，ある $r \in N$ に関して $\beta_i(\bar{x}, x)/\alpha_i(\bar{x}, x) \leqq \beta_r(\bar{x}, x)/\alpha_r(\bar{x}, x)$ or $\beta_i(\bar{x}, x)/\alpha_i(\bar{x}, x) > \beta_r(\bar{x}, x)/\alpha_r(\bar{x}, x)$ $(x \in X,\ i \in N)$ のいずれかが成立し

$$\bar{x} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{if } \beta_i/\alpha_i \leqq \beta_r/\alpha_r \\ 0, & \text{if } \beta_i/\alpha_i > \beta_r/\alpha_r \end{cases} \quad (i \neq r) \quad \text{ならば}$$

$$g(\bar{x}) = \min\{g(x) \mid f(x) \geqq f(\bar{x}),\ x \in X\}$$

ただし，$\alpha_i(x, y) = \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)y)\,d\theta$

$$\beta_i(x, y) = \int_0^1 g_i(\theta x + (1-\theta)y)\,d\theta$$

［証］ $f(x) \geqq f(\bar{x})$ なる任意の $x \in X$ について，$\delta_i = x_i - \bar{x}_i$ を作れば，x_i の定義から $\delta_i \cdot (\beta_i/\alpha_i - \beta_r/\alpha_r) \geqq 0$．一方

$$f(x) - f(\bar{x}) = \sum_i \delta_i \cdot \int_0^1 f_i(\theta x + (1-\theta)\bar{x})\,d\theta = \sum_i \alpha_i(\bar{x}, x)\,\delta_i \geqq 0$$

$$\therefore\ \delta_r \geqq -\sum_{i \neq r} \alpha_i \cdot \delta_i / \alpha_r \qquad \therefore\ g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i \beta_i(\bar{x}, x) \cdot \delta_i$$

$$\geqq \sum_{i \neq r} (\beta_i - (\beta_r/\alpha_r)\alpha_i) \cdot \delta_i \geqq 0$$

［定理 5］ X の任意の2点 x, y に対して $\alpha_i(x, y) > 0$，$\beta_i(x, y) \geqq 0$ $(i \in N)$ であり，変数番号が

$\beta_p/\alpha_p < \beta_q/\alpha_q \iff p < q$ となるようにつけられているとき，

$$\xi_i^k = \begin{cases} \lambda_i , & i \leqq k \\ 0 , & i > k \end{cases}$$

$$r = \min \{ k \mid f(\xi^k) \geqq 0 ,\ 0 \leqq k < n \}$$

なる r が存在すれば [FS] に次のような最適解が存在する。

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \lambda_i , & i < r \\ 0 , & i > r \end{cases} , \quad 0 < \bar{x}_r \leqq \lambda_r$$

もしそのような r が存在しなければ [FS] は infeasible.

[証] $\underline{n \geqq r \geqq 1 \text{ のとき}}$ $\varphi(\bar{x}_r) = f(\bar{x}) = f(\xi^r) + \alpha_r(\bar{x}, \xi^r) \cdot (\bar{x}_r - \lambda_r)$ とおけば $\varphi(\lambda_r) = f(\xi^r) \geqq 0$. r の定義から $\varphi(0) = f(\xi^{r-1}) < 0$ φ は連続だから $0 < \bar{x}_r \leqq \lambda_r$ なるある $\bar{x}_r$ の値に対して $\varphi(\bar{x}_r) = f(\bar{x}) = 0$ となる。このとき前定理から $g(\bar{x}) = \min \{ g(x) \mid f(x) \geqq 0,\ x \in X \}$ となり定理は成立。

$\underline{r = 0 \text{ のとき}}$ $\bar{x} = 0$. 従って $f(\bar{x}) \geqq 0$. 任意の $x \in X$ に対し $x_i \geqq \bar{x}$ $\therefore g(x) - g(\bar{x}) = \sum_i (x_i - \bar{x}_i) \beta_i \geqq 0$. 故に定理は成立.

<u>r が存在しないときは</u>, $f(\xi^n) < 0$. 任意の $x \in X$ に対し $x_i \leqq \xi_i^n$ $\therefore f(x) = f(\xi^n) + \sum_i (x_i - \xi_i^n) \alpha_i \leqq f(\xi^n) < 0$ 故に [FS] は infeasible.

[定理6] $\lambda_i = 1$ $(i \in N)$ で $f_i(x) > 0$, $g_i(x) \geqq 0$ $(x \in X,\ i \in N)$ とする。変数番号の適当な交換によって $p \leqq r$, $q > r$ ならば $f_p(x) \geqq f_q(x)$ かつ $g_p(x) \leqq g_q(x)$ $(x \in X)$ であるような番号 $r \in N$ が存在し,

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, & i \leqq r \\ 0, & i > r \end{cases}$$

なる $\bar{x}$ に対して　$0 \leqq f(\bar{x}) < f_k(x)$　$(k \leqq r,\ x \in X)$

が成り立つならば

$$g(\bar{x}) = \min\{g(x) \mid f(x) \geqq 0,\ x \in \Omega\}$$

［証］　$f(x) \geqq 0$　なる任意の　$x \in \Omega$　について

$\delta_i = x_i - \bar{x}_i$　を作れば　$\sigma = \sum_i \delta_i$　は非負の整数である。なぜならば　$\sigma \leqq -1$　と仮定すると

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_i \int_0^1 f_i(\xi)\cdot\delta_i\, d\theta \qquad (\xi = \theta x + (1-\theta)\bar{x})$$

$$= f(\bar{x}) - \sum_{i \leqq r} \int_0^1 f_i(\xi)\, d\theta \cdot |\delta_i| + \sum_{i>r} \delta_i \cdot \int_0^1 f_i(\xi)\, d\theta$$

$$\min_{i \leqq r} \int_0^1 f_i(\xi)\, d\theta = \int_0^1 f_{i_0}(\xi)\, d\theta = \mu$$ とすると

$$f(x) \leqq f(\bar{x}) - \mu \sum_{i \leqq r} |\delta_i| + \sum_{i>r} \delta_i \int_0^1 f_i(\xi)\, d\theta$$

$$= f(\bar{x}) + \Big(\sigma - \sum_{i>r} \delta_i\Big)\mu + \sum_{i>r} \delta_i \int_0^1 f_i(\xi)\, d\theta$$

$$\leqq f(\bar{x}) + \sigma\mu$$

$$\leqq f(\bar{x}) - \int_0^1 f_{i_0}(\xi)\, d\theta = \int_0^1 [f(\bar{x}) - f_{i_0}(\xi)]\, d\theta < 0$$

となって　$f(x) \geqq 0$　と矛盾するからである。

また　$g(x) - g(\bar{x}) = -\sum_{i \leqq r} |\delta_i| \int_0^1 g_i(\xi)\, d\theta + \sum_{i>r} \delta_i \int_0^1 g_i(\xi)\, d\theta$

$\geqq \sigma \cdot \min_{i>r} \int_0^1 g_i(\xi)\, d\theta \geqq 0$　が前と同様に得られる。

故に　$g(\bar{x}) = \min\{g(x) \mid f(x) \geqq 0,\ x \in \Omega\}$.

§4 近似最適解のためのアルゴリズム

前節の諸定理を足場にして，第1図 box Z で用いるためのアルゴリズムを構成する。本節では $\lambda_i = 1$，$\partial g / \partial x_i \geqq 0$ $(i \in N)$ が仮定されている。

x を Ω の任意の元とするとき，$x(i)$ は x の i 番目の成分 x_i を $1-x_i$ でおきかえた vector を表わすこととする。$x \in \Omega \Leftrightarrow x(i) \in \Omega$ である。$\alpha(i)$，$\beta(i)$ を次のように定義する。

$$\alpha_i(x) = \int_0^1 f_i(\theta x(i) + (1-\theta)x)\, d\theta = f(x_i=1) - f(x_i=0)$$

$$\beta_i(x) = \int_0^1 g_i(\theta x(i) + (1-\theta)x)\, d\theta = g(x_i=1) - g(x_i=0)$$

ただし，右辺のたとえば $f(x_i=1)$ は $x_j\ (j \neq i)$ には左辺の x_j の値を；x_i には1を代入した $f(x)$ の値である。

ある $x \in \Omega$ に関して，その各成分 x_i に，次の規則によって「局所順位」$\rho_i(x)$ を与える。$1 \leqq \rho_i \leqq n$ であるが，タイが生じたら，たとえば変数番号順に順位を与えればよい。

〈i〉 $\alpha_i(x) > 0$，$\alpha_j(x) \leqq 0 \implies \rho_i < \rho_j$

〈ii〉 $\alpha_i(x) > 0$，$\alpha_j(x) > 0$ ならば

$$\beta_i / \alpha_i < \beta_j / \alpha_j \implies \rho_i < \rho_j$$

$$\beta_i / \alpha_i = \beta_j / \alpha_j,\quad \alpha_i < \alpha_j \implies \rho_i < \rho_j$$

〈iii〉 $\alpha_i(x) \leqq 0$，$\alpha_j(x) \leqq 0$ ならば

$$\beta_i - \alpha_i < \beta_j - \alpha_j \implies \rho_i < \rho_j$$

さて，第1図 box 2 のための近似最適化のアルゴリズムは次の通りである。

《Stage I》

1° $x_i = 0$ $(\forall i \in N)$ set

2° $f(x) \geqq 0$ ならば go to《Stage II》1°

3° 各 x_i に対し $\rho_i(x)$ を計算

4° $\forall i \in N$ $(x_i = 1)$ ならば tree search へ（§2の終参照）

5° $\rho_j = \min\{\rho_i \mid x_i = 0, i \in N\}$ なる j につき $x_j = 1$ set,

go to 2°.

《Stage II》

1° $\forall i \in N$ $(\rho_i = 0$ or $x_i = 0)$ ならば stop. このときの x が近似最適解である.

2° $\rho_k = \max\{\rho_i \mid x_i = 1, i \in N\}$ なる k につき $x_k = 0$ とする.

3° 各 x_i（ただし $\rho_i = 0$ または $x_i = 0$ のものを除く）について $\rho_i(x)$ 計算

4° $f(x) < 0$ ならば x_k の値を1にもどして，$\rho_k = 0$ として go to 1°.

5° $f(x) \geqq 0$ ならば go to 1°

この方法では，「今の x」に対する「次の x」は $x(1), \cdots, x(n)$ のどれかである。x から $x(i)$ へ移ると $f(x), g(x)$ の

値は《Stage I》ではそれぞれ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ずつ増加し，《Stage II》ではそれぞれ $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ ずつ減少する。また《Stage I》で x の「次の x」の候補 $x(i)$ ($x_i=0$, $i\in N$) のなかから，5°の step で $x(j)$ が選出されたとき，

$$g(x(j)) = \min\{g(x(i)) \mid f(x(i)) \geqq f_0,\ i\in N,\ x_i=0\}$$

がつねに成り立っている。ここで $f_0 = f(x(j))$ である。何故なら，$g(x(j)) - g(x(i)) = \beta_j(x) - \beta_i(x)$, $f(x(j)) - f(x(i)) = \alpha_j(x) - \alpha_i(x)$ であるが，局所順位 $\rho_i(x)$ の定義から，5°の step で選ばれた j に関し，$i\in N$ and $x_i=0$ なるすべての i に対して $\alpha_j - \alpha_i \leqq 0 \Longrightarrow \beta_j(x) - \beta_i(x) \leqq 0$ が成立しているからである。

これを反復して《Stage I》で実行可能解を得た後に《Stage II》に於て全局的な最適性からの「ずれ」の補正が，再び局所最適補正に近いやり方の反復で実行される。

従って《Stage I》4°で外へ飛び出すのは，局所的には有効な方策であっても効果が累積していないのか，すぐ隣りの格子点 $x(i)$ 以外の点に有効な「次の x」があるのか，または $f_i(x)$ や $g_i(x)$ の変動が大きいために局所順位数 $\rho_i(x)$ がもはや「次の x」の選出の目やすになっていない — などの場合であろう。また $f_i(x)$, $g_i(x)$ の変動が，[定理3] および [定理5,6] の適用条件の成立を妨げるほど大きくないならば

上記アルゴリズムは《Stage II》10で完結する。線型問題では $f_i(x)$, $g_i(x)$ が定数であったから事情は極めて簡単であった。なお[I]における制約不等式や $g(x)$ の中の非線型項を全部新しい0-1変数とおきかえて，線型不等式を余分につぎたして線型問題におきかえることが原理的には可能であり，またこのようにすれば上記のアルゴリズムはひとつのS-制約を与えるが，このような「線型化」は原変数では矛盾のある非論理的な解を許容するようなS-制約をもたらすので，特別の事情のない限り好ましくないと思われる。

〈文　献〉

(1) F. Glover, A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem, Ops. Res. 13 ('65) 879~919.

(2) E. Balas, Discrete Programming by the Filter Method, ibid 15 ('67) 915~957.

(3) A. M. Geoffrion, An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming, ibid 17 ('69) 437~454.

(4) F. Glover, Surrogate Constraints, ibid 16 ('68) 741~454

(5) T. L. Saaty, "Optimization in Integers and Related Extremal Problems", McGraw-Hill ('70) P. 259.