数理解析研究所講究録
第153巻 1972年 195-211

Superinverses と 単調反復法

早大 理工　室谷義昭

§1. 序

$F: D \subset R^n \to R^n$ とするとき，

$$(1.1)\quad \begin{cases} [x_k, y_k] \supset [x_{k+1}, y_{k+1}], \\ [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は各 } [x_k, y_k] \text{ に含まれる}, \end{cases}$$

(ここに，$[x,y] \equiv \{z \in R^n \mid x \leqq z \leqq y\}$ かつ，不等号は要素毎に考える。)

となる反復列 $\{x_k\}$，$\{y_k\}$ を求める反復法は従来から研究されていた（例えば，Collatz [1]）が，その後 Ortega and Rheinboldt [2]，Muroya [3] と [4] は，行列の (left) sub-inverse という性質を利用して，

$$(1.2)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - B_k F x_k \\ y_{k+1} = y_k - B_k F y_k \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

という形の単調反復法を研究した。その際，彼等は，

$$(1.3)\quad Fy - Fx \leqq A(x,y)(y-x) \quad \text{for } \forall [x,y] \subset D,$$

となる行列 $A(x,y)$ が存在し，列 $\{x_k\}$，$\{y_k\}$ 及び $\{B_k\}$ に対して，

$$(1.4)\quad I - B_k A(x,y) \geqq 0 \quad \text{for } \forall [x,y] \subset [x_k, y_k],$$ （ここに，I は単位行列）

という条件の他に，

(1,5)　$B_k F x_k \leqq 0 \leqq B_k F y_k$，特に，$B_k \geqq 0$ $(k=0,1,2,\cdots)$，

という条件を付していた。

今度，(1,3) の条件を，

(1,6)　$Fy - Fx = A(x,y)(y-x)$　for $\forall [x,y] \subset D$

という条件に代えると，丸めの誤差を考慮した実際の単調反復法([3])にその基礎を置いた，より一般的かつ実用的な単調反復法が得られることに気付いた。その反復法は

イ) 従来の[2]，[3]と[4]の反復法を含み，

ロ) 区間$[x_0, y_0]$のx_0, y_0に対する条件が単に，解の下界及び上界ベクトルになっていればよいし，

ハ) 他に何の条件を付け加えることなしに single-step technique が使えるし，

ニ) 実際の反復法([3])が使用できる，

という特長を持っている点で実用的である。

ここでは，特に，(1,1)を満足する列$\{x_k\}$，$\{y_k\}$を，

(1,7)　$I - C_k A(x,y) \leqq 0$　for $\forall [x,y] \subset [x_k, y_k]$

となる$[x_k, y_k]$における$A(x,y)$の left superinverse C_kを使って作り出す反復法を調べることにする。(left subinverse B_kを使う単調反復法は Muroga [5]で調べる予定。)

講演後に上記の点に気付いたので講演の内容と異なってしまった事をお許し下さい。(講演では特別の場合についてのみ報告した。)
定理3.3

§2. 予備

<u>定義 2.1.</u> $[x_0, y_0]$ で定義された行列 $A(x, y)$ に対し，行列 C が $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の

イ) *left superinverse* とは，　$CA(x, y) \geqq I$ for $\forall[x, y] \subset [x_0, y_0]$,

ロ) *right superinverse* とは，　$A(x, y)C \geqq I$ for $\forall[x, y] \subset [x_0, y_0]$,

ハ) *superinverse* とは，$CA(x, y) \geqq I$ かつ $A(x, y)C \geqq I$ for $\forall[x, y] \subset [x_0, y_0]$,

がそれぞれ成立するときをいう。（逆向きの不等号が成立するときは *super-* を *sub-* に代える。）

$F : [x_0, y_0] \subset R^n \to R^n$　とするとき，

(2.1)　$x \leqq y$ かつ $Fx \geqq Fy$ ならば つねに $x = y$

となるとき，F は $[x_0, y_0]$ で単調であるという。行列 A が正則で，$A^{-1} \geqq 0$ のとき A は単調であるという。

<u>補題 2.1.</u>　(1.6) を満足する $F : D \subset R^n \to R^n$ に対し，

(2.2)　　$A \leqq A(x, y)$　　for $\forall[x, y] \subset D$

となる単調行列 A が存在すれば，A^{-1} は D に含まれる任意の区間 $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の (*left*) *superinverse* である。

証明は定義より明らかである。

<u>補題 2.2.</u>　(1.6) を満足する $F : D \subset R^n \to R^n$ に対し，

F が $[x_0, y_0] \subset D$ で単調であるための必要十分条件は，

(2.3)　　$[I + (I - CA(x, y))]C \geqq 0$　　for $\forall[x, y] \subset [x_0, y_0]$

となる $[x_0, y_0]$ における $A(x, y)$ の正則な *left superinverse* C が存在

し，このような任意の C に対し，

(2.4) $\quad \rho(I - CA(x,y)) < 1 \quad \text{for } \forall [x,y] \subset [x_0, y_0]$,

したがって，この C は非負になる。(ここに $\rho(\cdot)$ は行列のスペクトル半径。)

証明. $B = [I + (I - CA(x,y))]C$ とおくと，$I - BA(x,y) = [I - CA(x,y)]^2$，$\rho(I - BA(x,y)) = \rho^2(I - CA(x,y))$ であるから [4] の *Proposition* 2.4 より直ちに証明される。 Q.E.D.

上の補題2.1は *left superinverse* の構成法を，また補題2.2は F が単調であるための必要十分条件を述べていて，いずれも次節で役立つであろう。その他に次の定義を準備しておく。

定義 2.2. $x, y \in R^n$ に対し，

$x \vee y$ は $z \geq x$ かつ $z \geq y$ となる $z \in R^n$ のうち最小のものを，

$x \wedge y$ は $z \leq x$ かつ $z \leq y$ となる $z \in R^n$ のうち最大のものを

表わす。

定義 2.3. $F: D \subset R^n \to R^n$ とする。 $a \in D$ に対し，

各 $x_k \leq a$ かつ $x_k \to a$ となる任意の $\{x_k\} \subset D$ に対し，$Fx_k \to Fa$，のとき，F は $a \in D$ で左連続であるといい，各 $y_k \geq a$ かつ $y_k \to a$ となる任意の $\{y_k\} \subset D$ に対し，$Fy_k \to Fa$ のとき，F は $a \in D$ で右連続であるという。F が $a \in D$ で左及び右連続のとき，F は順序連続という。

§3. 単調反復法

まず，我々の単調反復法が適用可能であるときの必要条件として，次の補題を得る。

補題 3.1. (1.6) を満足する $F: D\subset R^n \to R^n$ に対し,
各 $[x_0, y_0]\subset D$ における $A(x,y)$ の *left superinverse* C が存在するとき,
$Fx=0$ が $[x_0, y_0]\subset D$ における最小解または最大解を持てば, 他には $[x_0, y_0]$ における解はない。(ここに, $[\bar{x}, \bar{y}]\subset[x_0, y_0]$ かつ $\bar{x}, \bar{y}$ が $Fx=0$ の解で, $[x_0, y_0]$ における任意の解 $\bar{z}$ に対し $\bar{x}\leqq\bar{z}\leqq\bar{y}$ となるとき, $\bar{x}$, 及び $\bar{y}$ をそれぞれ $[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の最小解, 最大解という。)

証明. $\bar{x}$ を $[x_0, y_0]$ における最小解とすると任意の $[x_0, y_0]$ における解 $\bar{z}$ に対し, $\bar{x}\leqq\bar{z}$ かつ, $0=F\bar{z}-F\bar{x}=A(\bar{x},\bar{z})(\bar{z}-\bar{x})$,
故に, $0=CA(\bar{x},\bar{z})(\bar{z}-\bar{x})\geqq\bar{z}-\bar{x}$. よって $\bar{z}=\bar{x}$.
同様に, 最大解が存在するときも証明される。 Q.E.D.

以下の議論においては $F: D\subset R^n\to R^n$ かつ (1.6) を満足するものとする。

我々の単調反復法は次の定理に基礎を置いている。

定理 3.1. (1.6) を満足する $F: D\subset R^n\to R^n$ に対し,

(3.1) $[x_0, y_0]\subset D$ かつ $[x_0, y_0]$ に $Fx=0$ の解があるとする。

このとき,

$$(3.2)\quad \begin{cases} x_{k+1}=(y_k-C_kFy_k)\vee x_k \\ y_{k+1}=(x_k-C_kFx_k)\wedge y_k, \quad (k=0,1,2,\cdots), \\ \text{ここに, 各 } C_k \text{ は } [x_k, y_k] \text{ における } A(x,y) \text{ の left superinverse,} \end{cases}$$

とおくと,

$$(3.3)\quad \begin{cases} C_kFx_k\leqq 0\leqq C_kFy_k \quad (k=0,1,2,\cdots), \\ [x_0, y_0]\supset[x_1, y_1]\supset[x_2, y_2]\supset\cdots\longrightarrow[\bar{x},\bar{y}] \\ \text{かつ, } [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は } [\bar{x},\bar{y}] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

更に,

イ) もし，$[\bar{x},\bar{y}]$ における $A(x,y)$ の left superinverse C で，

(3、4)「$-CF\bar{x} \geq \bar{y}-\bar{x}$ かつ $CF\bar{y} \geq \bar{y}-\bar{x}$」を完全には満足しない，

ものがあれば，$[x_0, y_0]$ を $[\bar{x},\bar{y}]$ とおきかえて，更に，反復(3.2)が続けられる。

ロ) もし，$\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ の部分列 $\{C_{k_m}\}_{m=0}^{\infty}$ の中で，

(3、5) $\lim_{m\to\infty} C_{k_m} = C$ かつ $\rho\left(I - CA(\bar{x},\bar{y})\right) < 1$

となるものがあり，F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続であるならば，$\bar{x}=\bar{y}$ で $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の唯一つの解である。

証明。(3、2) より，$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$，かつ $y_0 \geqq y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots\cdots$.

$[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の解を $\hat{x}$ とすると $x_0 \leqq \hat{x} \leqq y_0$ であるから，

$$F\hat{x} - Fx_0 = A(x_0,\hat{x})(\hat{x}-x_0)$$

$$\therefore\quad C_0(F\hat{x}-Fx_0) = C_0A(x_0,\hat{x})(\hat{x}-x_0) \geq \hat{x}-x_0.$$

$$\therefore\quad \hat{x} \leqq x_0 + C_0(F\hat{x}-Fx_0) = x_0 - C_0Fx_0 \leqq \hat{x} - C_0Fx_0$$

よって，

$$\hat{x} \leqq (x_0 - C_0Fx_0) \wedge y_0 = y_1, \text{ かつ } C_0Fx_0 \leqq 0.$$

同様にして，$\hat{x} \geqq (y_0 - C_0Fy_0) \vee x_0 = x_1$ かつ $C_0Fy_0 \geqq 0$.

故に，$x_0 \leqq x_1 \leqq \hat{x} \leqq y_1 \leqq y_0$ かつ $C_0Fx_0 \leqq 0 \leqq C_0Fy_0$.

$[x_0, y_0]$ を $[x_1, y_1]$ とおき代えることにより，$x_1 \leqq x_2 \leqq \hat{x} \leqq y_2 \leqq y_1$ かつ $C_1Fx_1 \leqq 0 \leqq C_1Fy_1$.

この操作を無限に続けていくと $x_k \to \bar{x}$ かつ $y_k \to \bar{y}$ となる $\bar{x},\bar{y}$ が存在し，$\bar{x} \leqq \hat{x} \leqq \bar{y}$.

これより (3、3) を得る。

次に，イ)の証明は反復の作り方(3.2)より明らかである。

ロ)の証明．まず，$-CF\bar{x} \geqq \bar{y}-\bar{x}$ かつ $CF\bar{y} \geqq \bar{y}-\bar{x}$ となることを示す。

$x_{k_m} - C_{k_m} F x_{k_m} \longrightarrow \bar{x} - CF\bar{x}$，$(m \to \infty)$ であるから

$$y_{k_{m+1}} = (x_{k_m} - C_{k_m} F x_{k_m}) \wedge y_{k_m}$$

で $m \to \infty$ とすると

$$\bar{y} = (\bar{x} - CF\bar{x}) \wedge \bar{y},$$

これより，$-CF\bar{x} \geqq \bar{y}-\bar{x}$ を得る。同様にして $CF\bar{y} \geqq \bar{y}-\bar{x}$ を得る。

したがって，$CF\bar{y} - CF\bar{x} \geqq (\bar{y}-\bar{x}) + (\bar{y}-\bar{x})$，

(3.6) $$\therefore\ [I + \{I - CA(\bar{x},\bar{y})\}](\bar{y}-\bar{x}) \leqq 0.$$

一方，条件(3.5)より，C は $[\bar{x},\bar{y}]$ における $A(x,y)$ の *left super-inverse* で，かつ $\rho(I - CA(x,y)) < 1$ であるので，

$$[I + (I - CA(\bar{x},\bar{y}))]^{-1} = I + (CA(\bar{x},\bar{y}) - I) + (CA(\bar{x},\bar{y}) - I)^2 + \cdots \geqq 0$$

よって，(3，6)より $\bar{y}-\bar{x} \leqq 0$.

故に，$\bar{y} = \bar{x}$ となり，(3.1)と(3.3)により $\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx = 0$ の唯一つの解である。　Q.E.D.

定理3.1の単調反復法(3.2)の特長は，まず $[x_0, y_0] \subset D$ かつ x_0, y_0 が $Fx=0$ の解の一つの下界と上界ベクトルであることだけを要求しており，必ずしも条件(1.5)を満足していなくてもよい。更に，C_k を非負に制限していない。

我々の単調反復法の有効性のもう一つの特長は，他に何の条件を付け加えることなしに，*single-step technique* が使える

ことである。（[3], [4] の Corollary 3.2 と比較せよ。）

<u>系 3.1.</u> 定理3.1の (1.6) と (3.1) を仮定し，

$$(3.7)\quad \begin{cases} x^i_{k+1} = (y^i_k - C^i_k F y_{k,i}) \vee x^i_k \\ y^i_{k+1} = (x^i_k - C^i_k F x_{k,i}) \wedge y^i_k \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

とおく。ここに，

$$(3.8)\quad \begin{cases} x_{k,1} = x_k = (x^1_k, x^2_k, \cdots, x^n_k)^T \\ y_{k,1} = y_k = (y^1_k, y^2_k, \cdots, y^n_k)^T \\ x_{k,i} = (x^1_{k+1}, x^2_{k+1}, \cdots, x^{i-1}_{k+1}, x^i_k, \cdots, x^n_k)^T \\ y_{k,i} = (y^1_{k+1}, y^2_{k+1}, \cdots, y^{i-1}_{k+1}, y^i_k, \cdots, y^n_k)^T \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots;\ i=2,3,\cdots,n),$$

$$(3.9)\quad \begin{cases} C^i_k = (c^{i1}_k, c^{i2}_k, \cdots, c^{in}_k) \ \text{かつ} \\ C_{k,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c^{i1}_k & c^{i2}_k & \cdots & c^{in}_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ \text{は } [x_{k,i}, y_{k,i}] \text{ における } A(x,y) \text{ の left superinverse である。} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,n).$$

このとき，

$$(3.10)\quad \begin{cases} [x_0, y_0] = [x_{0,1}, y_{0,1}] \supset [x_{0,2}, y_{0,2}] \supset \cdots \supset [x_{0,n}, y_{0,n}] \supset [x_{1,1}, y_{1,1}] \supset \cdots \longrightarrow [\bar{x}, \bar{y}] \\ \text{かつ, } [x_0, y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は } [\bar{x}, \bar{y}] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

更に，イ) もし $[\bar{x}, \bar{y}]$ における $A(x,y)$ の left superinverse C で，

(3.11)「$-CF\bar{x} \geqq \bar{y} - \bar{x}$ かつ, $CF\bar{y} \geqq \bar{y} - \bar{x}$」を完全には満足しない，

ものがあれば，$[x_0, y_0]$ を $[\bar{x}, \bar{y}]$ とおきかえて，更に反復 (3.7) が続けられる。

ロ) もし，$\{C_{k,i}\}_{k=0}^{\infty}$ の部分列 $\{C_{k^i_m, i}\}_{m=0}^{\infty}$ の中で，

$$(3.12)\quad \lim_{m\to\infty} C_{k^i_m, i} = C_{\Delta,i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \ \text{かつ} \ C = \sum_{i=1}^{n} C_{\Delta,i} \ \text{に対し,} \ \rho(I - CA(\bar{x},\bar{y})) < 1,$$

となるものがあり，F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続ならば，

$\bar{x}=\bar{y}$ で，$\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の唯一つの解である。

証明．(3.7) は次の様に書くことができる。

$$(3.13)\quad \begin{cases} x_{k,i+1} = (y_{k,i} - C_{k,i} F y_{k,i}) \vee x_{k,i} \\ y_{k,i+1} = (x_{k,i} - C_{k,i} F x_{k,i}) \wedge y_{k,i} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,n).$$

これは (3.2) と同じ形であるので，定理3.1 の証明と全く同様にして，この系が成立することがわかる。　　Q.E.D.

次に，反復式 (3.2) が次の反復式と同値になる場合を考える。

$$(3.14)\quad \begin{cases} x_{k+1} = y_k - C_k F y_k \\ y_{k+1} = x_k - C_k F x_k \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

定理3.2．(1.6) を満足する $F: D \subset R^n \to R^n$ に対し，

$$(3.15)\quad [x_0, y_0] \subset D,\ 0 \leqq -C_0 F x_0 \leqq y_0 - x_0,\ \text{かつ}\ 0 \leqq C_0 F y_0 \leqq y_0 - x_0$$

となるベクトル x_0 と y_0 と $[x_0, y_0]$ における $A(x,y)$ の left ~~super~~inverse C_0 が存在するとする。

$\{x_k\}$，$\{y_k\}$ は (3.14) で定義されるものとする。ただし，

$$(3.16)\quad \begin{cases} \text{各 } C_k \text{ は } [x_k, y_k] \text{ における } A(x,y) \text{ の left superinverse で，しかも，} \\ C_{k+1} = N_k C_k \text{ かつ } N_k \text{ は行列で，} 0 \leqq N_k \leqq I, \quad (k=0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

このとき，

$$(3.17)\quad 0 \leqq -C_{k-1} F x_k \leqq y_k - x_k,\ \text{かつ}\ 0 \leqq C_k F y_k \leqq y_k - x_k \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

したがって，

$$(3.18)\quad 0 \leqq -C_k F x_k \leqq y_k - x_k,\ \text{かつ}\ 0 \leqq C_k F y_k \leqq y_k - x_k \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

となり，(3.14) は (3.2) と同値となり，かつ，(3.3) が成立する。

2C4

更に，もし，

(3.19) $\quad \lim_{k\to\infty} C_k = C$ かつ Cと $I+[I-CA(\bar{x},\bar{y})]$ が正則，

となるものが存在し，F が $\bar{x}$ で左連続かつ $\bar{y}$ で右連続ならば，

$\bar{x}=\bar{y}$ で，$\bar{x}$ は $[x_0, y_0]$ における $Fx=0$ の唯一つの解である。

証明．(1.6) と (3.14) より，$\forall x\in[x_0, y_0]$ に対し，

$$\begin{aligned} -C_0Fx &= y_1 - x + (x-x_0) - C_0(Fx - Fx_0) \\ &= y_1 - x + [I - C_0A(x_0, x)](x-x_0) \\ &\leqq y_1 - x. \end{aligned}$$

一方，(3.15) より，$\quad x_0 \leqq x_1 \leqq y_0$ かつ $x_0 \leqq y_1 \leqq y_0$.

したがって，特に $x=x_1$ 及び $x=y_1$ とおくことにより，

$$-C_0Fx_1 \leqq y_1 - x_1 \quad 及び \quad -C_0Fy_1 \leqq 0 \quad を得る。$$

同様にして，$C_0Fy_1 \leqq y_1 - x_1$ と $C_0Fx_1 \leqq 0$ を得る。

よって，$\quad 0 \leqq -C_0Fx_1 \leqq y_1 - x_1$ かつ $0 \leqq C_0Fy_1 \leqq y_1 - x_1$ を得る。

また，$C_1 = N_0C_0$ で，$0\leqq N_0 \leqq I$ であるから，

$$0 \leqq -C_1Fx_1 \leqq -C_0Fx_1 \leqq y_1 - x_1 \quad かつ \quad 0 \leqq C_1Fy_1 \leqq C_0Fy_1 \leqq y_1 - x_1.$$

$[x_0, y_0]$ を $[x_1, y_1]$ とおき代えると，

$$0 \leqq -C_1Fx_2 \leqq y_2 - x_2 \quad かつ \quad 0 \leqq C_1Fy_2 \leqq y_2 - x_2.$$

これと (3.16) より $0 \leqq N_1 \leqq I$，$C_2 = N_1C_1$ であるから，

$$0 \leqq -C_2Fx_2 \leqq -C_1Fx_2 \leqq y_2 - x_2 \quad かつ \quad 0 \leqq C_2Fy_2 \leqq C_1Fy_2 \leqq y_2 - x_2.$$

このような操作を無限に続けると (3.17) と (3.18) を得る。

これより，(3.14) は (3.2) と同値で，しかも (3.3) も成立する。

次に，(3.19)を仮定し，Fが$\bar{x}$で左連続，$\bar{y}$で右連続とすると，(3.14)のkを~~…~~ $k\to\infty$とすると，

$$\bar{x}=\bar{y}-CF\bar{y} \quad かつ \quad \bar{y}=\bar{x}-CF\bar{x} \quad を得る。$$

これから，$\quad [I+(I-CA(\bar{x},\bar{y}))](\bar{y}-\bar{x})=0$ を得るが，(3.19)により，

$$\bar{y}-\bar{x}=0 \quad となる。\quad すなわち，\bar{y}=\bar{x}.$$

一方 $\quad \therefore CF\bar{x}=0.$

Cが正則であるので $\quad F\bar{x}=0.$

故に$\bar{x}$は$Fx=0$の解で，しかも(3.3)により$[x_0,y_0]$には他に解はない。**Q.E.D.**

<u>注意3.1.</u> 定理3.2の反復法(3.14)において，もし$[x_0,y_0]$に解が存在することがわかっているときは，(3.16)のN_kの条件は単に，$\quad N_k\leqq I \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots)$ でよい。(その理由は，解を$\hat{x}$とすると，$x_k\leqq\hat{x}\leqq y_k$のとき，$-C_kFx_k\leqq 0\leqq C_kFy_k$が，$C_k$が単に，$[x_k,y_k]$における$A(x,y)$の*left superinverse*という条件だけで成立するからである。)

上の定理3.2においては$[x_0,y_0]$に$Fx=0$の解が存在することを始めに仮定していないので，$[x_0,y_0]$に$Fx=0$の解が存在するための一つの十分条件に関して次の系を得る。

<u>系3.2.</u> (1.6)を満足する$F:D\subset R^n\to R^n$に対し，(3.15)を満足するベクトルx_0,y_0と$[x_0,y_0]$における$A(x,y)$の*left superinverse* C_0が存在するとき，Fが$[x_0,y_0]$で順序-連続で，かつC_0が

(3.20) $\quad \rho(I-C_0A(x,y))<1 \quad$ *for* $\forall[x,y]\subset[x_0,y_0]$

を満足すれば $Fx=0$の解が$[x_0,y_0]$に唯一つ存在する。

証明. 定理3.2で 各$C_k = C_0$ $(k=0,1,2,\cdots)$ にとると直ちに証明される。 Q.E.D.

上の系は定理3.1の条件(3.1)を満足する$[x_0, y_0]$を構成するのに役立つこともある。そこで、(3.15)を満足するベクトルx_0, y_0の作り方として、次の補題を得る。

<u>補題3.2.</u> (1.6)を満足する$F: D \subset R^n \to R^n$に対し、次の条件を満足する、任意の$[x,y] \subset D$における$A(x,y)$の left superinverse C_0とベクトル$\tilde{x} \in D$, E_1とE_2が存在するとする。

$$(3.21) \begin{cases} -(C_0 F\tilde{x}) \wedge 0 + E_1 \geqq 0 , \quad (C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_2 \geqq 0 , \\ -(C_0 F\tilde{x}) \wedge 0 + E_1 \geqq [I - C_0 A(\tilde{x}, y_0)][(C_0 F\tilde{x}) \wedge 0 + E_2] \\ (C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_2 \geqq [I - C_0 A(x_0, \tilde{x})][(C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_1] \end{cases}$$

ここに、

$$(3.22) \begin{cases} x_0 = \tilde{x} - [(C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_1] \\ y_0 = \tilde{x} - [(C_0 F\tilde{x}) \wedge 0 - E_2] \end{cases} \text{かつ } [x_0, y_0] \subset D .$$

このとき、ベクトルx_0, y_0, とC_0は定理3.2の条件(3.15)を満足する。

証明. (3.21)と(3.22)より、 $x_0 \leqq \tilde{x} \leqq y_0$ かつ $\tilde{x} - C_0 F\tilde{x} - x_0 = y_0 - x_0 - [(C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_2]$
$= -(C_0 F\tilde{x}) \wedge 0 + E_1 \geqq 0.$

従って、
$$\begin{aligned} -C_0 F x_0 &= -C_0 F\tilde{x} + C_0 A(x_0, \tilde{x})(\tilde{x} - x_0) \\ &= (\tilde{x} - C_0 F\tilde{x} - x_0) - [I - C_0 A(x_0, \tilde{x})](\tilde{x} - x_0) \\ &= y_0 - x_0 - [(C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_2] - [I - C_0 A(x_0, \tilde{x})][(C_0 F\tilde{x}) \vee 0 + E_1] \end{aligned}$$

より、

$$0 \leqq -C_0 F x_0 \leqq y_0 - x_0 .$$

同様にして、 $0 \leqq C_0 F y_0 \leqq y_0 - x_0$ を得る。

故に、ベクトルx_0, y_0, とC_0は条件(3.15)を満足する。 Q.E.D.

定理3.1の条件(3.1)を満足するベクトルx_0とy_0の他の構成法については[5] [illegible] で行う予定。

次に, 行列の right superinverse を利用した単調反復法として次の定理を得る。

<u>定理3.3.</u> $y \geqq x$ のとき $[y,x] = [x,y]$ とし各 $[x,y] \subset D$ に対し, (1.6) を満足する $F: D \subset R^n \to R^n$ に対し, 各 $[x,y]$ における $A(x,y)$ の非負な right superinverse C_0 が存在し,

$$(3.23) \qquad C_0[I+(I-A(x,y)C_0)] \geqq 0 \quad \text{for } {}^\forall[x,y] \subset D$$

をみたすとき, $Fy_0 \geqq 0$ となる $y_0 \in D$ に対し,

$$(3.24) \qquad y_{k+1} = y_k - C_k F y_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

とおく。ここに, C_kは次の条件をみたすものとする。

$$(3.25) \quad \begin{cases} C_k \text{ は } [y_{k-1}, y_k] \text{ における } A(x,y) \text{ の非負な right superinverse で,} \\ C_k[I+(I-A(x,y)C_k)] \geqq 0 \quad \text{for } {}^\forall[x,y] \subset [y_{k-1}, y_k] \\ 0 \leqq C_{k+1} \leqq C_k \quad , \quad (k=0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

このとき,

$$(3.26) \quad \begin{cases} y_0 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_{2k-2} \geqq y_{2k} \geqq \cdots \longrightarrow \bar{y} \\ y_1 \leqq y_3 \leqq \cdots \leqq y_{2k-1} \leqq y_{2k+1} \leqq \cdots \longrightarrow \bar{x} \\ \bar{x} \leqq \bar{y} \\ F y_{2k+1} \leqq 0 \leqq F y_{2k} \qquad (k=0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

更に, Fが $x=\bar{x}$ で左連続, $x=\bar{y}$ で右連続で, $\bar{C} = \lim_{k\to\infty} C_k$ とおいたとき, $\bar{C}[I+(I-A(\bar{x},\bar{y}))]$ の各列ベクトルが0にならないな

らば，$\bar{x}=\bar{y}$ で $\bar{x}$ は $[y_1, y_0]$ における $Fx=0$ の唯一つの解である。

証明．$y_1 = y_0 - C_0 F y_0 \leqq y_0$ より，$Fy_1 = Fy_0 + A(y_1, y_0)(y_1 - y_0) = [I - A(y_1, y_0)C_0] Fy_0 \leqq 0$.

したがって，$y_2 = y_1 - C_1 F y_1 \geqq y_1$ で，

$$
\begin{aligned}
y_0 - y_2 &= y_0 - y_1 + C_1 F y_1 \\
&= C_0 F y_0 + (C_1 - C_0) F y_1 + C_0 [F y_0 - A(y_1, y_0)(y_0 - y_1)] \\
&= (C_1 - C_0) F y_1 + C_0 [I + (I - A(y_1, y_0) C_0)] F y_0 \\
&\geqq 0 .
\end{aligned}
$$

これより，$y_0 \geqq y_2 \geqq y_1$ で，

$$Fy_2 = Fy_1 + A(y_1, y_2)(y_2 - y_1) = [I - A(y_1, y_2) C_1] F y_1 \geqq 0 .$$

以下同様にして，(3, 26) が成立することが証明できる。

次に，F が $\bar{x}$ で左連続，$\bar{y}$ で右連続で，$C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}))]$ の各列ベクトルが 0 にならないとすると，

$$y_{2k} - y_{2k-2} = (C_{2k+1} - C_{2k}) F y_{2k+1} + C_{2k} [I + (I - A(y_{2k-1}, y_{2k}) C_{2k}] F y_{2k}$$

において，$k \to \infty$ とすると，$y_{2k}, y_{2k-2} \to \bar{y}$，$y_{2k-1} \to \bar{x}$ であるから

$$0 = C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}) C)] F\bar{y} .$$

ここで，非負行列 $C[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}) C)]$ の各列ベクトルが 0 にならないから $F\bar{y} = 0$ となる。そこで，(3, 24) で k を $2k$ とおいて $k \to \infty$ とすると，$\bar{x} = \bar{y} - CF\bar{y} = \bar{y}$ を得る。解 $\bar{x}=\bar{y}$ が $[y_1, y_0]$ で唯一つであることは明らかである。 Q. E. D.

(3, 23) を満足する C_0 が存在するための十分条件は，補題 2.2 を少し修正することにより，F が $[\bar{x}, \bar{y}] \subset D$ で単調であればよいことがわかる。しかも，このとき $C_0[I + (I - A(\bar{x}, \bar{y}))]$ の各列ベクトルも 0 にしない。

次に反復法(3.2)の加速に関して次の系を得る。

<u>系 3.3.</u> 定理 3.1 の条件(1.6), (3.1)と(3.2)に加えて,

(3.27) $[x_0', y_0'] \subset [x_0, y_0]$ かつ $[x_0', y_0']$ に $Fx=0$ の解があり,

$$(3.28)\quad \begin{cases} x_{k+1}' = (y_k' - C_k' F y_k') \vee x_k' \\ y_{k+1}' = (x_k' - C_k' F x_k') \wedge y_k' \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots),$$

ここに, 各 C_k' は $[x_k', y_k']$ における $A(x,y)$ の *left superinverse* で, $C_k' = Q_k C_k$, Q_k は $Q_k \leqq I$ となる行列

を仮定すると, 列 $\{x_k'\}$, $\{y_k'\}$ と $\{C_k'\}$ に対しても (3.3) が成立し, しかも,

(3.29) $[x_k, y_k] \supset [x_k', y_k']$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$.

証明. $[x_k, y_k] \supset [x_k', y_k']$ と仮定すると C_kは$[x_k', y_k']$における$A(x,y)$の *left superinverse* でもあるので $C_k F y_k' \geqq 0$ が導けるので,

$$x_{k+1}' - x_{k+1} = [I - C_k A(y_k', y_k)](y_k' - y_k) + (Q_k - I) C_k F y_k' \geqq 0 .$$

同様にして, $y_{k+1}' - y_{k+1} \leqq 0$ が証明できるので (3.29) を得る。 Q.E.D.

丸めの誤差を考慮した実際の単調反復法として次の定理を得る。

<u>定理 3.4.</u> (1.6)と(3.1)を仮定し, (3.2)を次のように修正する。

$$(3.30)\quad \begin{cases} x_0^* = x_0 & x_{k+1}^* = f_k^*(y_k^*; x_k^*) \vee x_k^* \\ y_0^* = y_0 & y_{k+1}^* = g_k^*(x_k^*; y_k^*) \wedge y_k^* \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots),$$

ここに, $[x_k^*, y_k^*]$ における $A(x,y)$ の *left superinverse* C_k^* に対し,

$$(3.31)\quad \begin{cases} f_k(y_k^*; x_k^*) = y_k^* - C_k^* F y_k^* \\ g_k(x_k^*; y_k^*) = x_k^* - C_k^* F x_k^* \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

とし, $f_k^*(y_k^*; x_k^*)$, $g_k^*(x_k^*; y_k^*)$ はそれぞれ $f_k(y_k^*; x_k^*)$, $g_k(x_k^*; y_k^*)$ を計算したもので,

$$(3.32)\quad \begin{cases} f_k^*(y_k^*;x_k^*) \leqq f_k(y_k^*;x_k^*) \\ g_k^*(x_k^*;y_k^*) \geqq g_k(x_k^*;y_k^*) \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

とする。このとき，

$$(3.33)\quad \begin{cases} [x_0,y_0]\supset[x_1^*,y_1^*]\supset[x_2^*,y_2^*]\supset\cdots\longrightarrow[x^*,y^*] \\ \text{かつ } [x_0,y_0] \text{ における } Fx=0 \text{ の解は } [x^*,y^*] \text{ に含まれる。} \end{cases}$$

しかも，

$$(3.34)\quad \begin{cases} x_{k_0}^* = x_{k_0+1}^* = x_{k_0+2}^* = \cdots = x^* \\ y_{k_0}^* = y_{k_0+1}^* = y_{k_0+2}^* = \cdots = y^* \end{cases}$$

となる有限の正整数 k_0 が存在する。更に，

$$(3.35)\quad \rho(I - C_{k_0}^* A(x^*,y^*)) < 1$$

ならば，

$$(3.36)\quad y^*-x^* \leqq [I+(I-C_{k_0}^*A(x^*,y^*))]^{-1}\{(f_{k_0}(y^*;x^*)-f_{k_0}^*(y^*;x^*))+(g_{k_0}^*(x^*;y^*)-g_{k_0}(x^*;y^*))\}.$$

証明．定理 3.1 及び定義より (3.33) が得られる。また，(3.34) は各 x_k, y_k が有限桁の数であることより明らかである。最後に，(3.35) が成立すれば，$[I+(I-C_{k_0}^*A(x^*,y^*))]^{-1}\geqq 0$ が成立するので

$x^* \geqq f_{k_0}^*(y^*;x^*)$ と $y^* \leqq g_{k_0}^*(x^*;y^*)$ より導かれる。　　Q. E. D.

注意 3.2. もし，前もって，

$$(3.37)\quad \begin{cases} C_{k_0}^*A(x^*,y^*) - I \leqq K_0 \quad , \quad \rho(K_0) < 1 \\ f_{k_0}(y^*;x^*) - f_{k_0}^*(y^*;x^*) \leqq E_1 \quad , \quad g_{k_0}^*(x^*;y^*) - g_{k_0}(x^*;y^*) \leqq E_2 \end{cases}$$

となる行列 K_0 とベクトル E_1, E_2 がわかれば，(3.36) より，

$$(3.38)\quad y^*-x^* \leqq (I-K_0)^{-1}(E_1+E_2)$$

と前もって，y^*-x^* の評価ができる。特に，$K_0^2(E_1+E_2)\approx 0$（$K_0^2(E_1+E_2)$ が無視できる）のときは近似的に，$y^*-x^*\leqq(I+K_0)(E_1+E_2)$ が成立する。更に，もし，

(3.39) $\quad (x^*_{k_1+1}-x^*_{k_1})+(y^*_{k_1}-y^*_{k_1+1})\leqq E_3$

のとき計算を止めたとき，x^*, y^*, k_0 をそれぞれ $x^*_{k_1}$, $y^*_{k_1}$, k_1 とおき代えた (3.37) が成立すれば，

(3.40) $\quad y^*_{k_1+1}-x^*_{k_1+1}\leqq(I-K_0)^{-1}(E_1+E_2+K_0E_3)$

を得る。このとき，$K_0E_3\ll E_1+E_2$（K_0E_3 が E_1+E_2 に比べると無視できる）ならば，(3.40) の右辺は近似的に (3.38) の右辺に等しくなる。

最後に，解の一組の上界と下界が得られているとき，解の上界，下界の改良を行うところに単調~~収束~~法の特長があるので近似解の誤差評価の計算にも我々の方法を適用できる。（数値例は[5]で示す予定）．

参考文献

[1] L. Collatz, "Funktionalanalysis und Numerische Mathematik", Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[2] J. Ortega and W. Rheinboldt, Monotone iterations for nonlinear equations with application to Gauss-Seidel methods, SIAM J. Numer. Anal., 4(1967), 171-190.

[3] Y. Muroya, Practical monotonous iterations for nonlinear equations, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A. vol 22 No.1, (1968), 56-73.

[4] ———, Left subinverses of matrices and monotonous iterations for nonlinear equations, Mem. Sch. Sci. & Eng. Waseda Univ. No.34(1970), 157-171.

[5] ———, Practical monotonous iterations for nonlinear equations II, (to appear)(予定)