数理解析研究所講究録
第153巻 1972年 212-225

4次方程式(Ferrari 法)

東芝　　平野 菅保

§1. 序

4次方程式を解く公式 Ferrari 法(1522〜1565)は、2次方程式、3次方程式(Cardano法 1501〜1576)を解く公式と同様に、(最高次数-1)次の係数を零にする座標変換によつて、得たい解に大きく誤差を導入する場合がある。この欠点は、その後に導きだされた4次方程式の解法、*1 Des-cartes 法(1596〜1650)、Euler 法(1707〜1783)でも何等ふれられていない。

そこで、今回、Ferrari 法を用いる場合の欠点、①「計算途中で桁落ち誤差が入る場合がある。(上記座標変換による誤差導入もこれによる。)」、②「計算途中で計算される3元2次方程式を1元3次方程式に変形して解くと、3元2次方程式の解としては精度が悪い場合がある。」について述べ、その改良法について述べる。

§2. Ferrari 法の計算手順

与えられる4次方程式を次の（2-1）式とする。

(2-1) $a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0=0$

$a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ は複素係数

(2-1′) $X^4+(a_3/a_4)X^3+(a_2/a_4)X^2+(a_1/a_4)X+(a_0/a_4)=0$

$X=Y+\bar{X}$ とおく。

(2-2) $Y^4+\{4\bar{X}+(a_3/a_4)\}Y^3$

$+\{6\bar{X}^2+3(a_3/a_4)\bar{X}+(a_2/a_4)\}Y^2$

$+\{4\bar{X}^3+3(a_3/a_4)\bar{X}^2+2(a_2/a_4)\bar{X}+(a_1/a_4)\}Y$

$+\{\bar{X}^4+(a_3/a_4)\bar{X}^3+(a_2/a_4)\bar{X}^2+(a_1/a_4)\bar{X}+(a_0/a_4)\}$

$=0$

(2-2) 式の Y^3 の係数を零とする。

$4\bar{X}+(a_3/a_4)=0$

(2-3) $\bar{X}=-(a_3/4a_4)$

(2-2′) $Y^4+kY^2+lY+m=0$

(2-4) $k=6\bar{X}^2+3(a_3/a_4)\bar{X}+(a_2/a_4)$

$=(6/4^2-3/4)(a_3/a_4)^2+(a_2/a_4)$

$=-(3/8)(a_3/a_4)^2+(a_2/a_4)$

(2-5) $l=4\bar{X}^3+3(a_3/a_4)\bar{X}^2+2(a_2/a_4)\bar{X}+(a_1/a_4)$

$=(-4/4^3+3/4^2)(a_3/a_4)^3-(2/4)(a_3a_2/a_4^2)$

$+(a_1/a_4)$

$$=(1/8)(a_3/a_4)^3-(1/2)(a_3a_2/a_4^2)+(a_1/a_4)$$

(2-6) $$m=\bar{X}^4+(a_3/a_4)\bar{X}^3+(a_2/a_4)\bar{X}^2+(a_1/a_4)\bar{X}+(a_0/a_4)$$

$$=(1/4^4-1/4^3)(a_3/a_4)^4+(1/4^2)(a_3^2a_2/a_4^3)$$

$$-(1/4)(a_3a_1/a_4^2)+(a_0/a_4)$$

$$=-(3/4^4)(a_3/a_4)^4+(1/4^2)(a_3^2a_2/a_4^3)$$

$$-(1/4)(a_3a_1/a_4^2)+(a_0/a_4)$$

ここで、次の（2-7）式を展開してみる。

(2-7) $$(Y^2+u)^2=(vY+w)^2$$

(2-8) $$Y^4+(2u-v^2)Y^2-2vwY+u^2-w^2=0$$

(2-2′),(2-8)式で次数の等しい係数を等しいとする。

(2-9) $$\begin{cases} k=2u-v^2 \\ l=-2vw \\ m=u^2-w^2 \end{cases}$$ (2-9′) $$\begin{cases} v^2=2u-k \\ v^2w^2=l^2/4 \\ w^2=u^2-m \end{cases}$$

(2-9′)式より v^2, w^2 を消去する。

(2-10) $$(2u-k)(u^2-m)=l^2/4$$

(2-10′) $$u^3-(k/2)u^2-mu+(mk/2)-l^2/8=0$$

(2-10′)式より得られる3つの解 u_1, u_2, u_3 のうち、いずれか1つの解を用いて v, w を求める。

(2-11) $$\begin{cases} v=\sqrt{2u-k} \\ w=\sqrt{u^2-m} \end{cases}$$ 又は $$w=-\sqrt{u^2-m}$$

(2-11)式の第2式の符号は（2-9）式の第2式を満足するよ

うに決める。(2-10′)式より求めたuおよび、そのuを(2-11)式に代入して得られるv, wを用いて、(2-2′)式を(2-12)式のように、2つの2次方程式に分解する。

$$(2\text{-}12)\qquad (Y^2+vY+u+w)(Y^2-vY+u-w)=0$$

(2-12)式の2つの2次方程式を解いて、4つの解Y_1, Y_2, Y_3, Y_4を求め、(2-1), (2-1′)式の解X_i($i=1, 2, 3, 4$)を次の(2-13)式で求める。

$$(2\text{-}13)\qquad X_i=Y_i+\overline{X}\qquad i=1, 2, 3, 4$$

注　(2-9′)式を変形して(2-9″)式をつくる。

$$(2\text{-}9'')\qquad u=(v^2+k)/2$$

$$w^2=(v^2+k)^2/2^2-m$$

$$v^2w^2=v^2\{(v^2+k)^2/2^2-m\}=l^2/4$$

$$(2\text{-}14)\qquad v^2\{(v^2+k)^2-4m\}=l^2$$

$$(2\text{-}14')\qquad v^6+2kv^4+(k^2-4m)v^2+l^2=0$$

この(2-14′)式はDescartes法およびEuler法で3次方程式を解くときと同じ係数になっている。(2-14′)式でv^2が求まれば、u, wは次の(2-15)式で求められる。

$$(2\text{-}15)\qquad \begin{cases} u=(v^2+k)/2 \\ w=\sqrt{u^2-m} \qquad \text{又は} \qquad w=-\sqrt{u^2-m} \end{cases}$$

(2-15)式の第2式の符号は(2-9)式の第2式を満足するように決める。

(2-9′) 式を変形して (2-9‴) 式をつくる。

$$(2\text{-}9''')\quad v^2w^2 = 2uw^2 - kw^2 = l^2/4$$

$$u^2w^4 = (kw^2 + l^2/4)^2/4$$

$$w^6 = u^2w^4 - mw^4$$

$$(2\text{-}16)\quad w^6 = (kw^2 + l^2/4)^2/4 - mw^4$$

$$(2\text{-}16')\quad w^6 + (m - k^2/4)w^4 - (kl^2/8)w^2 - l^4/4^3 = 0$$

(2-16′) 式で w^2 を求め、u, v は次の (2-17) 式で求める

$$(2\text{-}17)\quad \begin{cases} v = -l/(2w) \\ u = (v^2 + k)/2 \end{cases}$$

(2-13)式により X_i を求める場合、次の (2-18) 式がなりたつと、(2-19) 式がなりたつ。

$$(2\text{-}18)\quad |X_i| \ll |\overline{X}| = |(a_3/4a_4)|$$

$$(2\text{-}19)\quad |Y_i| \fallingdotseq |\overline{X}| = |(a_3/4a_4)|$$

したがって、(2-13)式より得られる解 X_i は、(2-18) 式の関係がなりたつと、Y_i と $\overline{X}$ の加算により桁落ち現象が起こり、有効桁数の減少、桁落ち誤差が大きく入る。この (2-13)式での桁落ち誤差は (2-3) 式の $\overline{X}$ を (2-4), (2-5), (2-6) 式に代入して得られる (2-2′)式の係数 k, l, m を用いて計算する限り、(2-7) 式以下 (2-12) 式までの計算式をどのように変形しても防ぐことができない。

4 次方程式 (2-1′) 式の解 X_1, X_2, X_3, X_4 と (2-3) 式の $\overline{X}$ と

の関係は、解と係数との関係より(2-20)式で得られる。

(2-20)　$\overline{X}=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$

この(2-20)式より、解X_1, X_2, X_3, X_4の絶対値が共に$\overline{X}$の絶対値より小さいことはありえない。したがって、

(2-21)　$|X_1|\geqq|\overline{X}|$, $|X_2|\ll|\overline{X}|$, $|X_3|\ll|\overline{X}|$, $|X_4|\ll|\overline{X}|$

とすると、(2-1′)式の解と係数との関係は

(2-22)　$(a_3/a_4)=-(X_1+X_2+X_3+X_4)\fallingdotseq -X_1$

$(a_2/a_4)=X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+X_2X_3+X_2X_4+X_3X_4$

$\fallingdotseq X_1(X_2+X_3+X_4)$

$(a_1/a_4)=-(X_1X_2X_3+X_2X_3X_4+X_3X_4X_1+X_4X_1X_2)$

$\fallingdotseq -X_1(X_2X_3+X_3X_4+X_4X_2)$

$(a_0/a_4)=X_1X_2X_3X_4$

で表わされ、(2-3), (2-4), (2-5), (2-6)式の$\overline{X}$, k, l, mは次のようになる。

(2-23)　$\overline{X}\fallingdotseq X_1/4$

$k\fallingdotseq -(3/8)X_1^2+X_1(X_2+X_3+X_4)\fallingdotseq -(3/8)X_1^2$

$l\fallingdotseq -(1/8)X_1^3+(1/2)X_1^2(X_2+X_3+X_4)$

$-X_1(X_2X_3+X_3X_4+X_4X_2)\fallingdotseq -(1/8)X_1^3$

$m\fallingdotseq -(3/4^4)X_1^4+(1/4^2)X_1^3(X_2+X_3+X_4)$

$-(1/4)X_1^2(X_2X_3+X_3X_4+X_4X_2)+X_1X_2X_3X_4$

$\fallingdotseq -(3/4^4)X_1^4$

(2-2′)式は、(2-23)式により、次の(2-24)式になる。

(2-24) $Y^4-(3/8)X_1^2Y^2-(1/8)X_1^3Y-(3/4^4)X_1^4=0$

(2-24)式を因数分解すると、(2-25)式ができる。

(2-25) $(Y+X_1/4)^3(Y-3X_1/4)=0$

(2-26) $Y_1=3X_1/4$, $Y_2=Y_3=Y_4=-X_1/4$

(2-13)式と(2-23)式の $\overline{X}$ を用いて、解 X_i ($i=1,2,3,4$) を求めると、(2-27)式のように、解 X_2, X_3, X_4 は誤差のみになる。

(2-27) $X_1=Y_1+\overline{X}=3X_1/4+X_1/4=X_1$

$X_i=Y_i+\overline{X}=-X_1/4+X_1/4\fallingdotseq\varepsilon$ ε：誤差

($i=2,3,4$)

§3. Ferrari 法の修正計算手順

1つの解 X_4 の絶対値のみが(2-13)式の $\overline{X}$ の絶対値より小さいときは、次の(3-1)式で求められる。

(3-1) $X_4=a_0/(a_4X_1X_2X_3)$

したがって、3つの解に(2-13)式の計算で桁落ち誤差が入らぬようにしなければならない。

(2-2)式の Y の係数を零にしてみる。

(3-2) $4\overline{X}^3+3(a_3/a_4)\overline{X}^2+2(a_2/a_4)\overline{X}+(a_1/a_4)=0$

座標変換に用いる $\overline{X}$ の絶対値はなるべく小さい値であることが望ましい。そこで、解 X_1, X_2, X_3, X_4 の間に(3-3)式の関係がある場合を考える。

(3-3) $|X_1| \gg |X_2| \gg |X_3| \gg |X_4|$

(3-4) $a_3/a_4 = -(X_1+X_2+X_3+X_4) \doteqdot -X_1$

$a_2/a_4 = X_1X_2+X_2X_3+X_3X_4+X_4X_1+X_1X_3+X_2X_4 \doteqdot X_1X_2$

$a_1/a_4 = -(X_1X_2X_3+X_2X_3X_4+X_3X_4X_1+X_4X_1X_2)$

$= -X_1X_2X_3$

$a_0/a_4 = X_1X_2X_3X_4$

(3-4)式より、(3-2)式は次の(3-2')式になる。

(3-2') $4\overline{X}^3 - 3X_1\overline{X}^2 + 2X_1X_2\overline{X} - X_1X_2X_3 = 0$

(3-5) $\overline{X}_1 = 3X_1/4$, $\overline{X}_2 = 2X_2/3$, $\overline{X}_3 = X_3/2$

$\overline{X}$の値を$X_3/2$として、(2-2)式のY^3, Y^2, Y^0の係数を求める

Y^3の係数 $4\overline{X} + (a_3/a_4) = 2X_3 - X_1 \doteqdot -X_1$

Y^2の係数 $6\overline{X}^2 + 3(a_3/a_4)\overline{X} + (a_2/a_4)$

$= 6(X_3/2)^2 - 3X_1(X_3/2) + X_1X_2 \doteqdot X_1X_2$

Y^0の係数 $\overline{X}^4 + (a_3/a_4)\overline{X}^3 + (a_2/a_4)\overline{X}^2 + (a_1/a_4)\overline{X} + (a_0/a_4)$

$= (X_3/2)^4 - X_1(X_3/2)^3 + X_1X_2(X_3/2)^2 - X_1X_2X_3(X_3/2)$

$+ X_1X_2X_3X_4 \doteqdot -X_1X_2(X_3/2)^2$

したがって、(2-2)式は(3-6)式になる。

(3-6) $Y^4 - X_1Y^3 + X_1X_2Y^2 - X_1X_2(X_3/2)^2$

$\doteqdot \{Y^2 - X_1Y + X_1(X_3/2)\}\{Y^2 - X_2Y - X_2(X_3/2)\}$

$\doteqdot (Y - X_1)(Y - X_3/2)(Y - X_2)(Y + X_3/2)$

(3-7) $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = X_3/2$, $Y_4 = -X_3/2$

(3-7)式のY_i($i=1,2,3,4$)を(2-13)式に代入する。

$$(3\text{-}8)\quad \begin{aligned} X_1 &= Y_1+\bar{X} = X_1+X_3/2 \fallingdotseq X_1 \\ X_2 &= Y_2+\bar{X} = X_2+X_3/2 \fallingdotseq X_2 \\ X_3 &= Y_3+\bar{X} = X_3/2+X_3/2 = X_3 \\ X_4 &= Y_4+\bar{X} = -X_3/2+X_3/2 \fallingdotseq \varepsilon \qquad \varepsilon\text{：誤差のみ} \end{aligned}$$

絶対値の大きい解より順次X_1, X_2, X_3までは得られるが、絶対値の一番小さい解X_4は求められない。(解X_4は(3-1)式に桁落ち誤差の入らぬ解X_1, X_2, X_3を代入して求める。)

前記のことより、(3-2)式の3つの解$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$のうちで絶対値の一番小さい解を$\bar{X}$として採用する。

$$(3\text{-}9)\quad |X_{i\,min}| = \min_{i=1,2,3}(|X_i|)$$

$$(3\text{-}9')\quad \bar{X} = \bar{X}_{i\,min}$$

このように、(2-2)式のYの係数が零になる座標変換を行なって(3-10)式を得てから、次の(3-11)式の変数変換を行ない(2-2′)式の形、(3-12)式に変形する。

$$(3\text{-}10)\quad Y^4+k'Y^3+l'Y^2+m'=0$$

$$(3\text{-}11)\quad Y=1/Z$$

$$(3\text{-}12)\quad Z^4+kZ^2+lZ+m=0$$

$$k=l'/m'$$

$$l=k'/m'$$

$$m=1/m'$$

注 (3−3)式の条件では、Z_i(i 1,2,3,4) は次のようになる。 $Z_1=1/X_1$ $Z_2=1/X_2$

$$Z_3=2/X_3 \qquad Z_4=-2/X_3$$

次に、(2−16)式を解く。得られる3つの解 u_1, u_2, u_3 をそれぞれ(2−10)式に代入すると、次の(3−13)式のように、左辺と右辺とが明らかに等しくならない場合がある。

(3−13) $(2u_i-k)(u_i^2-m) \neq \ell^2/4 \qquad i=1,2,3$

そこで、(3−13)式に用いた u_i を(2−16)式に代入する。

(3−14) $u_i^3-(k/2)u_i^2-m\,u_i+(k\cdot m/2)-\ell^2/8=\varepsilon_i$

$$i=1,2,3$$

u_i は(2−16)式の解であるから、ε_i は(3−15)式で表わされる。

(3−15) $\varepsilon_i=max(|u_i^3|, |(k/2)u_i^2|, |m u_i| \ |(km/2)-\ell^2/8|)\cdot 10^{-n}$

n：計算桁数

(3−14)式を(3−13)式のように変形して(3−16)式を得る。

(3−16) $\{u_i-(k/2)\}\{u_i^2-m\}=\ell^2/8+\varepsilon_i$

すなわち、(3−16)式の右辺に ε_i 程度の誤差が入り、(3−17)式がなりたつと、(3−13)式のようになる。

(3−17) $|\ell^2/8| \ll |\varepsilon_i|$

(3−17)式がなりたつと、(3−16)式で次の3通りが考えられる

(3−18) ① $u_i \fallingdotseq k/2 \quad (u_i^2 \neq m) \qquad u_i-k/2=\varepsilon_{i1}$

② $u_i^2 \fallingdotseq m \quad (u_i \neq k/2) \qquad u_i^2-m=\varepsilon_{i2}$

③ $u_i \fallingdotseq k/2$, $u_i^2 \fallingdotseq m$ $\qquad u_i - k/2 = \varepsilon_{i1}$

$u_i^2 - m = \varepsilon_{i2}$

ε_{i1}, ε_{i2}： 誤差のみ

①の場合、(2-11)式の第1式よりvを求めると、次に示すように誤差のみになるので、vについては(2-9)式の第2式を用いて、(3-19)式より求める。

$$v = \sqrt{2u_i - k} = \sqrt{2\varepsilon_{i1}}$$

(3-19) $\quad v = -l/(2w) = -l/(2\sqrt{u_i^2 - m})$

②の場合、(2-11)式の第2式よりwを求めると、誤差のみになるので、wについては(2-9)式の第2式を用いて、(3-20)式より求める。

$$w = \sqrt{u_i^2 - m} = \sqrt{\varepsilon_{i2}}$$

(3-20) $\quad w = -l/(2v) = -l/(2\sqrt{2u_i - k})$

③の場合は次の(3-21)式の条件を満足する

(3-21) $\quad |u_i| \fallingdotseq |k/2| \qquad |u_i^2| \fallingdotseq |m| \fallingdotseq |k^2/4|$

したがって、(3-14)式では、第1項より第4項まで(3-22)式がなりたち、(3-15)式のε_iは(3-23)式で表わされる。

(3-22) $\quad |u_i^3| \fallingdotseq |(k/2)u_i^2| \fallingdotseq |mu_i| \fallingdotseq |km/2|$

(3-23) $\quad \varepsilon_i = |km/2| \cdot 10^{-n}$

ところが、(3-16)式の左辺の誤差$\bar{\varepsilon}_i$の絶対値は(3-25)式で表わせる。

(3-24)　$u_i-(k/2)=\varepsilon_{i1}$　　$|\varepsilon_{i1}|=|k/2|\cdot 10^{-n}$

$u_i^2-m=\varepsilon_{i2}$　　$|\varepsilon_{i2}|=|m|\cdot 10^{-n}$

$\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$：誤差のみ

(3-25)　$\overline{\varepsilon}_i=|\{u_i-(k/2)\}(u_i^2-m)|=|\varepsilon_{i1}\cdot\varepsilon_{i2}|$

$=|km/2|\cdot 10^{-2n}$

すなわち，(2-10)式で求めた解u_iは，(2-10)式に代入すると(3-24)，(3-25)式のようにはならず，(3-26)式になる。

(3-26)　$|\{u_i-(k/2)\}(u_i^2-m)|=\varepsilon_i=|km/2|\cdot 10^{-n}$

それでは，(3-24)，(3-25)式のようになるu_iはどのようにして求めるか。u_iを次の(3-27)式のようにおき，(2-10)式に代入する。

(3-27)　$u_i=\tilde{u}_i+k/2$

$2u_i-k=2\tilde{u}_i$

$u_i^2-m=\tilde{u}_i^2+k\tilde{u}_i+(k/2)^2-m$

$(2u_i-k)(u_i^2-m)=2\tilde{u}_i\{\tilde{u}_i^2+k\tilde{u}_i+(k/2)^2-m\}$

(3-28)　$\tilde{u}_i^3+k\tilde{u}_i^2+\{(k/2)^2-m\}\tilde{u}_i=\ell^2/8$

(3-28′)　$(2\tilde{u}_i)^3+2k(2\tilde{u}_i)^2+(k^2-4m)(2\tilde{u}_i)-\ell^2=0$

(3-28)式を変形した(3-28′)式は(2-14)式と同形になっている。(3-28)式を用いて得られる3つの解の中で，絶対値の一番小さい解を$\tilde{u}_i$として，(3-27)式よりu_iを求める。

u_iを(2-11)式に代入してv，wを求めるが，桁落ちはv，

w共に起るので、有効桁数の多いv（又はw）を用いて、次のようにw（又はv）を求める。

(3-29)　$w = -l/(2v)$　又は　$v = -l/(2w)$

u, v, wが求められたならば、(2-12)式の2つの2次方程式の定数項を次の(3-30)式で計算する。

(3-30)
$$u + w = u + \sqrt{u^2 - m}$$
$$u - w = u - \sqrt{u^2 - m}$$

(3-30)式で次の(3-31)式がなりたつと、(3-30)式の代りに、(3-30')式を採用する。

(3-31)　$|u^2| \gg |m|$

(3-30')　$|u + w| > |u - w|$ ならば
$$u + w = u + \sqrt{u^2 - m}$$
$$u - w = m/(u + \sqrt{u^2 - m}) = m/(u + w)$$
$|u + w| < |u - w|$ ならば
$$u - w = u - \sqrt{u^2 - m}$$
$$u + w = m/(u - \sqrt{u^2 - m}) = m/(u - w)$$

2次方程式は次のようにして解く。

(3-32)　$Z^2 + aZ + b = 0$

(3-33)　$\left|-(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}\right| > \left|-(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b}\right|$ ならば
$$Z_1 = -(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}, \quad Z_2 = b/Z_1$$
$\left|-(a/2) + \sqrt{(a/2)^2 - b}\right| < \left|-(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b}\right|$ ならば

$$Z_1 = -(a/2) - \sqrt{(a/2)^2 - b} \quad , \quad Z_2 = b/Z_1$$

ただし $|(a/2)^2| \gg |b|$

最後に4つ得られた解Z_1, Z_2, Z_3, Z_4を(3-11), (2-13)式に代入して、(2-1)式の解X_1, X_2, X_3, X_4を求める。次に、解X_1, X_2, X_3, X_4の中で絶対値の一番小さい解は精度が悪いので、それ以外の3つの解を用いて求める。

*1　村勢一郎著　方程式論　東海書房