数理解析研究所講究録
第153巻 1972年 226-247



# Cardano法の改良と高次代数方程式の解法に関する一つの試みについて

青学大 理工　馬渡鎮夫

## §0. まえがき

高次代数方程式を反復法によって解く場合に，我々は2大難問に遭遇する。1つは初期値設定の問題であり，他の1つは多重根もしくは近接根が存在するとき，解の精度が減退する問題である。これらの問題解決のための試みは，古くから行われて来たし現在もなお続けられているけれども，未だに十分ではないように思われる。この論文も同様な試みの一つに過ぎないけれども，我々の考察の特徴は次の3点に要約することができる。

(i) 中心となる数値解法はGrau法の変形で，3次元実ユークリッド空間内で考察することができる。

(ii) 標準形変換という前処理により，初期値設定に有効な手掛かりを得ることができる。

(iii) 誤差解析を行って，多重根の数値解が持つ精度の限界について考察する。

## §1. Cardano 法の改良と問題提起

実係数の3次方程式；

(1,1) $$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

を代数的に解く Cardano 法は，'はなはだ不自然で技術的である'[1]し，数値計算においても問題点は多い。[1]の§33，§34に述べてある他の方法も，(1,1)の3根をすべて数値的に求めるにはやはり問題がある．そこで，(1,1)の3根をすべて求める方法で理論においても自然であり，数値計算においてもより便利な解法を考案する。

(1.1)を，通常の方法により次のように変形する。

(1.2) $$y^3+3p_1y+q_1=0.$$

$p_1=0$ のときは trivial だから，$p_1\neq 0$ とする。

$$\alpha=\sqrt{|p_1|}\ ,\quad p=\mathrm{sgn}(p_1)\ ,\quad q=q_1/\alpha^3\ ,\quad y=\alpha z$$

とおけば

(1.3) $$f(z)\equiv z^3+3pz+q=0 \qquad (p=\pm 1).$$

$$r\equiv 3a_1a_3-a_2^2$$

(1.4) $$q=-\mathrm{sgn}(r)\{2a_2-3a_3(9a_0a_3-a_1a_2)/r\}/\sqrt{|r|}.$$

結局，(1,3)の3根を求めることに帰着する．

$$f'(z)=3(z^2+p)$$

(1°) $p=-1$，$q=-2$ のとき，$f(z)=(z+1)^2(z-2)$.

$$z=-1\ (\text{重根}),\quad z=2.$$

(2°) $p=-1,\ q=2$ のとき, $f(z)=(z-1)^2(z+2)$.

$$z=1\ (\text{重根}),\quad z=-2 .$$

さて, (1.3) の1実根を $v$ とし,

(1.5) $v=w-p/w$ ($w$は一般には複素数)

とおいて, (1.3) に代入すれば,

$$w^3-p/w^3-3p(w-p/w)+3p(w-p/w)+q=0 .$$

(1.6) $w^6+q\,w^3-p=0$.

(1.7) $D\equiv q^2+4p$.

$$w^3=(-q\pm\sqrt{D})/2 .$$

(3°) $p=-1,\ |q|<2\ (D<0)$ のとき,

$$|w^3|=\{q^2+(4-q^2)\}/4=1 .$$

従って, $w=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくことができ,

$$w^3=\cos3\theta+i\sin3\theta=-q/2\pm i\sqrt{-D}/2.$$

$$v=2\cos\theta .$$

故に,

$$\theta_k=\cos^{-1}(-q/2)/3+(k-1)2\pi/3\quad(k=1,2,3)$$

とおけば, (1.3) は3実根 $z_k=2\cos\theta_k$ を持つ。

(4°) その他のときは $D>0$ であるから,

$$w_1=\sqrt[3]{-sgn(q)(|q|+\sqrt{D})/2}$$

とおくと, $w_1$は容易に求めることができて, (1.3) の3根は次のとおりである。

$$z_1 = w_1 - p/w_1,\quad z_2 = -z_1/2 + \sqrt{3}(w_1 + p/w_1)/2\cdot i\ .$$
$$z_3 = -z_1/2 - \sqrt{3}(w_1 + p/w_1)/2\cdot i$$

(1.3)の3根$z_1, z_2, z_3$が求まると，(1.1)の3根は

(1.8) $\qquad x_k = \alpha z_k - a_2/(3a_3) \qquad (k=1,2,3)$ .

以上の解法において，(1.3)という変形と，(1.5)という置換のため，(1,6)が自然に成り立ち，判別式(1,7)が従来のCardano法のそれより簡単になり，解法全体が著しく改良された．数値計算上は，(1,8)の計算において桁落が発生することがあり，平野菅保氏等[2]の指摘するような対策が必要となることがある。

ところで，(1,3)においては，‘三次曲線の形’は一定しており，$c$の変動に応じて曲線が上下に変動する．いわば，(1.1)が‘標準化’されており，曲線の追跡および根の探索に有益な情報を提供する。このことは一般の一元高次代数方程式にも適用できないであろうか。すなわち，与えられた代数方程式をある種の標準形に変形すれば，曲線の追跡および根の探索について有益な情報が得られ，根を求めるのが容易になるのではなかろうか。このような期待のもとに，§2において先ず標準形について定義し，§3において新しい数値解法を述べ，§4，§5において初期値設定の問題，多重根の誤差解析について述べ，§6において感度解析に言及する。

## §2．高次代数方程式の標準形

実係数の$n$次代数方程式；

(2.1)　$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_0$

は，一般性を失うことなく$a_n=1$と仮定でき，

$$y = x + \frac{a_{n-1}}{n},\ \beta = -\frac{a_{n-1}}{n},\quad b_k = \frac{f^{(k)}(\beta)}{k!}\ (k=n-2,\cdots,0)$$

とおけば

(2.2)　$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots\cdots + b_0 = 0$．

これはさらに次のように変形される．

(2.3)　$\begin{cases} z^n = 0 & \text{または } b_{n-j}\neq 0\ (2\leqq j\leqq n) \text{ であり，} \\ z^n \pm \binom{n}{j} z^{n-j} + c_{n-j-1}z^{n-j-1} + \cdots\cdots + c_0 = 0 & \end{cases}$

$$\alpha = \sqrt[j]{\frac{|b_{n-j}|}{\binom{n}{j}}},\quad y = \alpha z,\ c_{n-k} = \frac{b_{n-k}}{\alpha^k}\ (k=j+1,\cdots,n)$$

(2.3)の根と(2.1)の根との間には，次の関係がある。

(2.4)　$x_k = \alpha z_k + \beta\quad (k=1,2,\cdots,n)$

たゞし，すべての$b_k$が0のときは，$\alpha=0$とする．(2.3)を(2.1)の標準形という。標準形(2.3)において，$z^n=0$の場合はtrivialだから，そうでない場合を考える。

(2.5)　$g(z) = z^n + c_{n-j}z^{n-j} + c_{n-j-1}z^{n-j-1} + \cdots + c_0\quad (c_{n-j} = \pm\binom{n}{j})$.

$g(z)=0$の根を，$z_1$，$z_2$，$\cdots\cdots$，$z_n$とすれば

$$z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n = 0$$

$$z_1z_2+z_1z_3+\cdots\cdots+z_{n-1}z_n=\mathrm{sgn}(c_{n-2})\cdot\binom{n}{2}.$$
$$z_1^2+z_2^2+\cdots\cdots+z_n^2=-\mathrm{sgn}(c_{n-2})\cdot 2\binom{n}{2}.$$

従って，$j=2$ のとき，$|z_kz_\ell|\geqq 1$，$|z_m|\geqq\sqrt{n-1}$ となる根 $z_k,z_\ell,z_m$ が存在する。さらに，$z_j$ がすべて実数ならば，$c_{n-2}=-\binom{n}{2}$ であり，対偶をとれば，$c_{n-2}=0$ または $\binom{n}{2}$ であるとき，$z_i$ の中に複素根が存在する。

一方，(2.5) を $n-j$ 回微分すると

$$g^{(n-j)}(z)=\frac{n!}{j!}\left(z^j+\mathrm{sgn}(c_{n-j})\right)$$

これより $Z=g(z)$ という曲線の追跡がやゝ容易となり，$g(z)=0$ の根が複素平面上に適度に分散していることが推察される．標準形による他の重要な merit は，§4 において述べられるであろう．

## §3.　Grau 法の変形

実係数の $n$ 次代数方程式 (2.1) を数値的に解く最も自然な方法は，Grau 法である。しかしながら，この解法でさえ，初期値設定の問題，関数行列式が 0 となるときの問題，多重根・近接根が存在するときの対策等問題点は多い。我々はこれらの問題点にある程度の解決を与える新しい数値解法を考察する。

自然数の集合に0を加えたものをN，整数の集合をZとし

$$\bar{b}_{0,i} = \begin{cases} a_i & \text{if } i = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & \text{other } i \in Z \end{cases}$$

(3.1)

$$\underline{b}_{0,i} = \bar{b}_{0,i} \quad \text{for all } i \in Z$$

$k$ : $0 \leqq k \leqq n$ ，固定された整数

として，数列 $\bar{b}_{l,i}$ , $\underline{b}_{l,i}$ , $B_i^{(l)}$ , $r_{k+1}^{(l)}$ , $r_k^{(l)}$ ($l \in N$ , $i \in Z$) および関数列 $f_l(x)$ ($l \in N$) を次のように定義する。ただし，$p$ ，$q$ は実定数で $q \neq 0$ とする。

(3.2)

$$\bar{b}_{l,i} = \bar{b}_{l-1,i+2} - p\,\bar{b}_{l,i+1} - q\,\bar{b}_{l,i+2} \quad (\bar{b}_{l,i} = 0 \text{ if } i > n-2l)$$

$$\underline{b}_{l,i} = (\underline{b}_{l-1,i} - p\,\underline{b}_{l,i-1} - \underline{b}_{l,i-2})/q \quad (\underline{b}_{l,i} = 0 \text{ if } i < 0)$$

$$B_i^{(l)} = \bar{b}_{l,i} - \underline{b}_{l,i}$$

$$r_{k+1}^{(l)} = B_{k-1}^{(l+1)} , \quad r_k^{(l)} = B_k^{(l)} - q\,B_k^{(l+1)}$$

$$f_l(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \bar{b}_{l,n-i}\,x^{n-i} + \sum_{i=n-(k-1)}^{n} \underline{b}_{l,n-i}\,x^{n-i} \quad (f_0(x) = f(x))$$

このとき，次の関係式が成り立つ。

(3.3)

$$f_l(x) = (x^2 + px + q)\,f_{l+1}(x) + r_{k+1}^{(l)} x^{k+1} + r_k^{(l)} x^k$$

$$f(x) = (x^2 + px + q)^{m+1} f_{m+1}(x) + \sum_{l=0}^{m} (x^2 + px + q)^l \left(r_{k+1}^{(l)} x^{k+1} + r_k^{(l)} x^k\right).$$

Grau 法は，$r_{k+1}^{(0)}$ , $r_k^{(0)}$ に通常の Newton－Raphson 法を適用して，$r_{k+1}^{(0)} = r_k^{(0)} = 0$ となる $p$ , $q$ を求めるものである。

我々はこの解法を変形するが，それを述べる前に3つの補助定理を準備する。

補助定理1

$$f(x)=(x^2+px+q)^l h(x) \quad (h(x)\text{ は整多項式})$$

であるための必要かつ十分条件は

$$B_i^{(m)}=0 \quad \text{for } 0\leqq m\leqq l,\ i\in Z.$$

補助定理2

$$B_{i-2}^{(l+1)}+pB_{i-1}^{(l+1)}+qB_i^{(l+1)}=B_i^{(l)} \quad \text{for } l\in N,\ i\in Z.$$

補助定理3

任意の $l\in N$ , $i\in Z$ に対し，

$$\frac{\partial B_i^{(l)}}{\partial p}=-lB_{i-1}^{(l+1)}, \quad \frac{\partial B_i^{(l)}}{\partial q}=-lB_i^{(l+1)}.$$

これらの定理の証明は容易である。

以下の理論において，便宜上 $B_i=B_i^{(1)}$ , $C_i=B_i^{(2)}$ for $i\in Z$ とおく。$B_i^{(0)}=0$ と補助定理1,2より，(2.1)の2根を求めることは，$B_{k-1}=B_k=0$ となる $p,q$ を求めることに帰着する。そのためには，$F(p,q)\equiv B_{k-1}^2+B_k^2$ とおいて，$F(p^*,q^*)=0$ となる $p^*$, $q^*$ を求めればよい。

関数 $z=F(p,q)$ は，直線 $q=0$ を除いた集合 $S\subset R^2$ 上で定義されたなめらかな非負値関数である。この関数の点 $(p_0,q_0)$ における接平面は，

$$(3.4)\quad z = F(p_0,q_0) + \frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial p}(p-p_0) + \frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial q}(q-q_0)$$

である。もし，

$$(3.5)\quad \frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial p} = \frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial q} = 0$$

ならば，この接平面は平面$z=0$に平行である。

定理1

$F(p_0,q_0)>0$ かつ(3.5)が成り立つならば，点$(p_0,q_0)$ において，次の等式が成り立つ.

$$(3.6)\quad C_{k-2}C_k - C_{k-1}^2 = 0.$$

証明

補助定理3より，

$$\frac{\partial F(p,q)}{\partial p} = -2(B_{k-1}C_{k-2}+B_kC_{k-1}),\quad \frac{\partial F(p,q)}{\partial q} = -2(B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k)$$

従って，(3.5)が成り立つならば，点$(p_0,q_0)$において$B_{k-1}$, $B_k$に関する次の連立方程程が成り立つ。

$$(3.7)\quad \begin{cases} C_{k-2}B_{k-1} + C_{k-1}B_k = 0 \\ C_{k-1}B_{k-1} + C_kB_k = 0. \end{cases}$$

仮定より，これは自明でない解を持つから，(3.6)が成り立つ.　　Q.E.D.

(3.6)の左辺は，Grau 法における関数行列式の値である

ことに注意を要する。

(3.5)ではないとき，接平面(3.4)は，平面$z=0$と交線；

$$(3.8)\qquad F(p_0,q_0)+\frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial p}\cdot(p-p_0)+\frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial q}\cdot(q-q_0)=0$$

を持つ。点$(p_0,q_0)$から直線(3.8)におろした垂線の足を$(\bar{p},\bar{q})$とすると，2点$(p_0,q_0)$，$(\bar{p},\bar{q})$を結ぶ直線の方程式は，

$$(3.9)\qquad \frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial q}\cdot(p-p_0)-\frac{\partial F(p_0,q_0)}{\partial p}(q-q_0)=0.$$

従って，点$(\bar{p},\bar{q})$は，(3.8)と(3.9)の共有点であり，

$$(3.10)\qquad \begin{aligned}\bar{p}&=p_0-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\cdot F(p_0,q_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2}\\ \bar{q}&=q_0-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\cdot F(p_0,q_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2}.\end{aligned}$$

$$(3.11)\qquad \begin{aligned}\bar{p}&=p_0+\frac{(B_{k-1}C_{k-2}+B_kC_{k-1})(B_{k-1}^2+B_k^2)}{2\{(B_{k-1}C_{k-2}+B_kC_{k-1})^2+(B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k)^2\}}\\ \bar{q}&=q_0+\frac{(B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k)(B_{k-1}^2+B_k^2)}{2\{(B_{k-1}C_{k-2}+B_kC_{k-1})^2+(B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k)^2\}}.\end{aligned}$$

(3.11)は，点$(p_l,q_l)=(p_0,q_0)$から点$(p_{l+1},q_{l+1})=(\bar{p},\bar{q})$を求める計算式である。そして，点列$(p_1,q_1)$，$(p_2,q_2)$，……，$(p_l,q_l)$……は，適当な初期値$(p_1,q_1)$のもとに，2次の収束速度をもって収束する。

## §4. 初期値設定の問題

初期値の求め方についての著名な試みが，[3]，[7]にまとめられている。しかしこれらのどの試みも，一般の$n$次代数方程式を解く場合には不十分であるように思う。一方，試みの初期値から出発して通常のBairstowの計算を続けていったところ，関数行列式の値の絶対値が小さくなって収束しなかったり，逆に修正したはずの$p, q$の値が大きくなって桁あふれをおこしたとの報告がある（[4]）。

我々の Algorithm においては，初期値において Overflow をおこさなければ，以後そのようなことはない。関数行列式が0になった場合に，もし$F(p, q)=0$ならば$(p, q)$は求める真の点である。しかし$F(p, q)\neq 0$のときは問題であるので，先ずこの点を考察する。

定理2

点$(p, q)$ $(q\neq 0)$において，$F(p, q)>0$かつ(3.5)が成り立つための必要かつ十分条件は，次の(4.1)，(4.2)，(4.3)のいずれかが成り立つことである。

(4.1)　$C_{k-2}=C_{k-1}=C_k=B_k=0,\ B_{k-1}\neq 0.$

(4.2)　$C_{k-1}=C_k=B_{k-1}=0,\ C_{k-2}=B_k\neq 0.$

(4.3)　$B_{k-1}=-\alpha B_k\neq 0,\ C_{k-1}=\alpha C_{k-2},\ C_k=\alpha^2 C_{k-2}\neq 0$

（$\alpha$は適当な実数）.

証明

十分条件は明らかだから，必要条件のみを示す。

$C_{k-2}=0$ のとき，(3.6) より $C_{k-1}=0$．補助定理2より，$B_k=qC_k$．(3.7) と $q\neq 0$ より $C_k=B_k=0$．$F(p,q)>0$ より，$B_{k-1}\neq 0$．これより，(4.1) が従う．

$C_{k-1}=0$ のとき，$C_{k-2}=0$ または $C_k=0$．後者の場合でしかも $C_{k-2}\neq 0$ のときのみを考えればよい．補助定理2より $B_k=C_{k-2}$．(3.7) および $F(p,q)>0$ より，$B_{k-1}=0$，$B_k\neq 0$ これより，(4.2) が従う。

$C_k=0$ のときは，(4.1) か (4.2) である。

$C_{k-2}, C_{k-1}, C_k$ のうちどれか2つ0でないとき，残りの一つも0ではなく，(3.7) と $F(p,q)>0$ より，$B_{k-1}\neq 0, B_k\neq 0$．そして，$B_{k-1}/B_k=-C_{k-1}/C_{k-2}=-C_k/C_{k-1}$．この比の値を $-\alpha$ とおいて，(4.3) が従う。　　Q.E.D.

系I．

(4.1), (4.2), (4.3) のとき，それぞれ次の (4.1)′, (4.2)′, (4.3)′ が従う。

(4.1)′ $$f(x)=(x^2+px+q)^2h(x)+B_{k-1}x^{k+1}$$

(4.2)′ $$f(x)=(x^2+px+q)^2h(x)+B_kx^{k+2}+pB_kx^{k+1}$$

(4.3)′ $$f(x)=(x^2+px+q)^2h(x)+(x^2+px+q)\times(\alpha x^{k+1}+(1+p\alpha)x^k)-B_k(\alpha x^{k+1}+qx^k).$$

系2.

任意の初期値$(p,q)$に対し，$F(p,q)>0$ かつ(3.5)が成り立つ多項式$f(x)$が存在する。

次に，初期値設定に有効な手掛りを与える定理を述べる。

定理3

標準形多項式(2.5)において，$n\geqq 3$ かつ $c_0\neq 0$ とし，

$E=\{(p,q)\mid x^2+px+q$ は(2.5)の2次因子$\}$

$M=\max\{|c_i|: c_i$ は(2.5)の$i$次の係数$\}$

$S=\{(p,q)\in R^2: |p|<2(1+M), \bar{M}^2<q<(1+M)^2\}$ $(\bar{M}=|c_0|/(M+|c_0|))$

とすれば，$E\cap S\neq\emptyset$.

証明

(2.5)の根の限界は $1+M$ だから，$\bar{M}=|c_0|/(M+|c_0|)$ とおくと，任意の$(p,q)\in E$に対し，

$$|p|<2(1+M)\ ,\ \bar{M}^2<|q|<(1+M)^2.$$

(2.5)が複素根を持てば，$x^2+px+q$, $q>0$ なる2次因子が存在する。(2.5)の根：$z_1, z_2, \cdots, z_n$ がすべて実数であるとき，$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ と仮定より，少くとも2つの同符号の$z_i, z_j$が存在する。そして，$(-(z_i+z_j), z_iz_j)\in S\cap E$.

Q.E.D.

初期値設定を完全にすることは，$E\cap\bar{S}\neq\emptyset$となる適当に直径の小さい$\bar{S}\subset R^2$を見つけることに帰着する。場合分けを

厭わなければ，本定理のSはさらに小さい領域にすることができる．また，標準形に対する本定理のSは，標準形でない方程式のそれより一般には小さい．

定理2の系2を考慮に入れると，一つの試みの初期値より出発して途中で関数行列式が0でありしかも求める点でないときは，結局試みの2次因子を与えなおすのが早いことがわかる。試みの初期値としては，

$$L:\ 2^{l-1} \geqq (1+M)^2 \text{ となる最小の } l$$

$$P_j = (-1)^j\, 2^{\left[\frac{j-2}{2}\right]} \qquad (\,[\ ]\text{ は整数部分の意})\ (P_1 = 0)$$

$$Q_j = 2^{j-1}$$

とおくとき，$(P_j, Q_k)$ $(j, k = 1, 2, \cdots, L)$ をとれば先ず大丈夫であろう。これでも収束しないときは，打切り規則を再考した上で，十分に距離の小さいSの中の格子点上を走査すればその中の一つで必らず収束するはずである．

## §5. 誤差解析

多重根計算に関する試みは，[4]，[5] に見られる。しかし [5] における数値実験からも推察されるように，仮数部が一定範囲内の桁数の電子計算機で計算するかぎり，どんな方法を試みても，多重根の精度には，一般には限界があるように思う。つまり，多重根はその多重度に応じた精度の近似値で

満足するか，または，必要に応じた高精度計算でその多重根を求めるべきであると思う。このことを明らかにするため，単根および多重根の誤差解析を行う。

$R^2$は2次元Euclid空間とし，

$$x,\ x_0 \in R^2,\ \Delta x = x - x_0,\ F(x) = B_{k-1}^2(x) + B_k^2(x)$$

とおき，Banach spaceにおける多重線写像という観点から$F(x)$のTaylor展開を考える。

$$(5.1)\quad F(x) = F(x_0) + F^{(1)}(x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}F^{(2)}(x_0)\cdot\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(x_0)\cdot\Delta x^m + o(\Delta x^m).$$

ここで，$x=(x_1, x_2)$，$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$とおけば，

$$F^{(k)}(x_0)\cdot\Delta x^k = \left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k F(x_0)$$

$$o(\Delta x^m) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{m+1} F(x_0+\theta\Delta x)$$

$$(0 \leqq \theta \leqq 1)$$

定理4

$l \geqq 1$，$h(x)$は$x^2+p_0x+q_0$と既約な整多項式，$P=(p, q)$，$P_0=(p_0, q_0)$，$\Delta P = P - P_0$ とする。このとき，

$$(5.3)\qquad f(x) = (x^2+p_0x+q_0)^l\, h(x)$$

ならば，任意の$m \leqq l-1$に対して$F^{(m)}(P_0)\cdot\Delta P^m = 0$であり，しかも実数$\lambda \geqq 1$により，

(5.4) $\quad \|\Delta P\| = K\cdot\{|F(P)|\}^{\frac{1}{\ell}},\ K=\left\{\dfrac{\lambda\,\ell!}{\sup_{0\leqq\bar\theta\leqq 1}\|F^{(\ell)}(P_0+\bar\theta\Delta P)\|}\right\}^{\frac{1}{\ell}}.$

証明

(5.3)ならば，任意の$m\leqq\ell$, $i\in Z$ に対し，$B_i^{(m)}=0$ ．従って，任意の$m\leqq\ell-1$に対し，補助定理3より，

$$\left(\Delta p\frac{\partial}{\partial p}+\Delta q\frac{\partial}{\partial q}\right)^m F(P_0)=0.$$

$$\therefore\quad F^{(m)}(P_0)\cdot\Delta P^m=0 \text{ for } m\leqq\ell-1.$$

$$|F(P)|=\left|\frac{1}{\ell!}F^{(\ell)}(P_0+\theta\Delta P)\cdot\Delta P^\ell\right|$$

$$\leqq\frac{1}{\ell!}\sup_{0\leqq\bar\theta\leqq 1}\|F^{(\ell)}(P_0+\bar\theta\Delta P)\|\cdot\|\Delta P\|^\ell.$$

Q.E.D.

10進で仮数部が$\mu$桁の計算機では，絶対値最大の浮動小数点表示係数の指数部が$m$であるとき，$F(P)$の値は$10^{2(m-\mu)}$位までしか意味がない。また，(5.4)の$K$は，大雑把に見積って，$(\mu-m)/\ell$という指数部を持つであろうから，(5.4)の$\|\Delta P\|$は，

(5.5) $\quad \|\Delta P\|\approx 10^{\frac{m-\mu}{\ell}}$

と見積ることができる。つまり，定理4の仮定を満す多項式$f(x)$の$x^2+p_0x+q_0=0$の2根は，せいぜい$10^{\frac{m-\mu}{\ell}}$位までの精度しか持ち得ない。

## §6. 感度解析

代数方程式の数値解法においては，感度解析すなわち係数の誤差が根におよぼす影響に関する考察も重要である。これに関する興味ある解析は，[6]に見られる。

係数誤差のため，解こうとしている多項式$f(x)$が$f(x)+\varepsilon g(x)$（$g(x)$は$n$次多項式）になったとし，前者の根を$z_1, z_2, \cdots, z_n$後者の根を$z_1(\varepsilon), z_2(\varepsilon), \cdots\cdots, z_n(\varepsilon)$とする。[6]によれば$m$重根$z_r$（$m \geq 1$）は，十分小さい正数$\varepsilon$に対し

$$(6.1) \qquad \left| z_r(\varepsilon) - \left( z_r + \left[ -\frac{m!\,g(z_r)}{f^{(m)}(z_r)} \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} \right) \right| < K \varepsilon^{\frac{2}{m}}$$

と誤差評価される。(6.1)から，多重根もしくは近接根は，係数の少しの誤差が根に大きな影響を及ぼすことがわかる。

我々のAlgorithmにおいて，(2.1)を(2.5)に変形する際に生ずる誤差は，感度解析の立場からは無視することはできない。しかし，一旦標準形へ正しく変形されてしまえば，結果の多項式の根をもとの方程式の根より高精度に解くことは容易である。特に，すべての根が多重根もしくは近接根であるときそうである。従って，我々のAlgorithmにおいては，標準形への変換を，データの型，演算順序等に十分注意して高精度に行うことは不可欠である。

## §7. 数値実験

以上のような考察のもとに，2つの数値実験を行った。使用機種はIBM7040で，倍精度の仮数部は54 bit である。

実験1（[2]，Table 1）

3次方程式(1.1)を§1の方法で解いた。[ ]の中が真の根である。[2]にある通常のCardano法と比較すると，我々の方がより高精度であると思われる。（桁数の違いを考慮に入れる必要がある。）

実験2

§2～§5の方法で，次の方程式①～⑥を解いたときその最初の2根は，Table 2のとおりである。

① $(x-1.20)(x-1.21)(x-1.22)(x-1.23)$

$=x^4-4.86x^3+8.8571x^2-7.173846x+2.1788712$

② $(x-1)^4(x+4)$

$=x^5-10x^3+20x^2-15x+4$

③ $(x^2-x+6.5)^2(x+2)$

$=x^5+10x^3+15x^2+16.25x+84.5$

④ $(x-\frac{2\sqrt{6}}{3})^3(x+\sqrt{6})^2$

$=x^5-10x^3+5.44331054x^2+26.6666666667x-26.127890592$

⑤ $(x-2)^2(x+2)(x^2+2x-2)$

$=x^5-10x^3+4x^2+24x-16$

⑥
$$(x^2-1)(x-2)(x^2+2x+15)$$
$$=x^5+10x^3-30x^2-11x+30$$

④においては，故意に9桁または11桁で入力した。

③において，(5.5)の右辺は $10^{\frac{2-16}{2}}=10^{-7}$．従って，$10^{-7}$ 位を四捨五入すると，計算解は

$$0.500000 \pm 2.499999\,i$$

となり，かなり良い解であり，我々のAlgorithm の精度と誤差見積り(5.5)の妥当性とが伺われる．他も同様で，これらの実験結果から，我々のAlgorithmは十分実用に耐えると思われる。

## §8. あとがき

本論文において，代数方程式の標準形という概念を導入したが，まだまだ解析が不十分である。特に，[3] にある「根の巣論」との関連には全く触れることができなかった。今後これらの方面についても研究する必要があると思われる。

この論文は，山内二郎教授による提案・討論・講義ノートに大きな影響を受けている．同教授に心から感謝する．また筆者の数値実験に協力を惜しまなかった青山学院大学大学院生富岡恒雄君にも深謝する。

# Table I

例 1

A2=-0.9424 7779 6076 9379D01　　A1= 0.2960 8813 2032 6807D02　　A0=-0.3100 6276 6802 9982D02

X1= 0.3141 6073 2494 1105D01 [π]

X2=(0.3141 5853 1792 9137D01 , -0.1270 5736 9637 3907D-04) [π]

X3=(0.3141 5853 1792 9137D01 , 0.1270 5736 9637 3907D-04) [π]

例 2

A2=-0.6283 1853 3859 5513D01　　A1= 0.9869 6045 9848 1446D01　　A0=-0.3100 6276 6802 9982D-06

X1= 0.3141 5926 7489 3445D-07 [$\pi \times 10^{-8}$]

X2= 0.3141 5926 5358 9793D 01 [π]

X3= 0.3141 5926 5358 9793D 01 [π]

例 3

A2=-0.3141 5926 5987 2978D10　　A1= 0.1973 9208 8120 4832D11　　A0=-0.3100 6276 6802 9982D 11

X1= 0.3141 5926 8140 7928D 01 [π]

X2= 0.3141 5926 8140 7928D 01 [π]

X3= 0.3141 5926 5358 9792D 10 [$\pi \times 10^{9}$]

例 4

A2=-0.3141 5957 9518 5588D01　　A1= 0.9869 6142 7070 3628D-05　　A0=-0.3100 6276 6802 9982D-16

X1= 0.3141 5926 5358 9792D01 [π]

X2= 0.3141 5986 7087 4935D-05 [$\pi \times 10^{-6}$]

X3=-0.2874 7004 7766 1918D-11 [$\pi \times 10^{-12}$]

(いずれの場合も, A3=1.　　π = 3.1415 92653 58979 32385 )

Table 2

| 例 \ 解 | 数値解 実部 | 数値解 虚部 | 真の解 | 多重度 |
|---|---|---|---|---|
| ① | 0.1229 9999 9991 5647D01 | 0. | 1.23 | 1 |
| | 0.1200 0000 0007 1209D01 | 0. | 1.20 | 1 |
| ② | 0.9999 9982 5163 8943D00 | 0.4855 4818 7904 0393 D−03 | 1 | 2 |
| | 0.9999 9982 5163 8943D00 | −0.4855 4818 7904 0393 D−03 | 1 | 2 |
| ③ | 0.4999 9964 5964 5130D00 | 0.2499 9994 7451 3770 D 01 | $0.5+2.5i$ | 2 |
| | 0.4999 9964 5964 5130D00 | −0.2499 9994 7451 3770 D 01 | $0.5-2.5i$ | 2 |
| ④ | −0.2449 4897 4279 9361D01 | 0.1872 0982 9980 6048 D−05 | $-\sqrt{6}$ | 1 |
| | −0.2449 4897 4279 9361D01 | −0.1872 0982 9980 6048 D−05 | $-\sqrt{6}$ | 1 |
| ⑤ | 0.2000 0000 0000 0001D01 | 0.6664 0018 7462 5055 D−07 | 2 | 1 |
| | 0.2000 0000 0000 0001D01 | −0.6664 0018 7462 5055 D−07 | 2 | 1 |
| ⑥ | −0.1000 0000 0000 0051D01 | 0.3741 6573 8677 3572 D 01 | $-1+\sqrt{14}i$ | 1 |
| | −0.1000 0000 0000 0051D01 | −0.3741 6573 8677 3572 D 01 | $-1-\sqrt{14}i$ | 1 |

# 参考文献


[1] 高木貞治：代数学講義 改訂新版 (1965).

[2] 平野菅保，加山実生：三次方程式（Cardano法）
情報処理学会第12回大会講演予稿集（1971）

[3] 一松信：数値解析 (1971)

[4] 石黒美佐子：高次代数方程式の多重根を求めるための解法 情報処理 Vol.13 No.1 (1972)

[5] 池辺八州彦：代数方程式の数値解法に関するJenkins-Traubの方法について 京都大学数理解析研究所講究録，72 (1969)

[6] Wilkinson: Rounding Errors in Algebraic Processes Prentice-Hall, Inc. (1963).

[7] P. Rabinowitz: Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations Gordon and Breach (1970).