数理解析研究所講究録
第154巻 1972年 1-17

複素射影空間に微分同相なリーマン多様体

塩浜勝博

I. Introduction. M を compact なリーマン多様体とする。Mがいかなる微分幾何的条件の下に、rank 1, compact type の対称空間に(以下簡単の為、モデルと呼ぶ事にする)等長となるかをまず考える。等長の条件を relax する事に因りMがモデルに微分同相となる条件が見出だされる事を期待するからである。

まずモデルが持つ特徴を pick out する事から始める。M^* をモデルの一つとすると、まず、M^* は次の特徴をもつ:

(1). M^* 上の任意の測地線は simply closed, 且つ長さ一定。各測地線上の任意の点に対してその対点がその測地線に沿う共役点であり、共役点の重複度は一定 λ, ここに λ は

$$\lambda = 0,\ 1,\ 3,\ 7,\ \dim M^* - 1.$$

(2). 任意の測地線に沿う cut point は第一共役点と一致する。

(3). 任意の点 $p^* \in M^*$ と、任意の $x^* \in C(p^*)$ ($C(p^*)$ は p^* の cut locus)について $\mathrm{distance}(p^*, x^*) =$ 一定。

(4). $N(p^*, x^*)$ を $p^*, x^* \in C(p^*)$ を結ぶ最短測地線分上の点の全体よりなる集合とする。$N(p^*, x^*)$ は $(\lambda+1)$-次元 compact, 定曲率リーマン部分多様体で球に等長である。ここに

$\lambda =$	$M^* =$
0	real projective space
1	complex 〃 〃
3	quaternionic 〃 〃
7	Cayley 〃 〃
$\dim M^* - 1$	球

(5). 任意の点 $p^* \in M^*$ に対して cut locus $C(p^*)$ は totally geodesic submanifold (無限遠超平面) である。

(6). M^* の断面曲率 K^* は metric を normalize する事により $1/4 \leqq K^* \leqq 1$ を満たす。

さて, (i) $(1 \leqq i \leqq 6)$ を条件として持つ M はどの程度モデルに近いかを考える。

定理 1 (中川-塩浜 ; [5]). M 上に一点 p が存在し, $C(p)$ 上の任意の点 x に対して, もしも $d(p, x) =$ 一定ならば, 点 p に関して以下が成立する。

(1)″ M 上の測地線で p より出発するものは全て geodesic loop で長さ一定且つ p の第一共役点の重複度も一定 λ である。

(2)″ p から出る任意の測地線に沿う第一共役点は p の cut point に一致する。

(4)″ 任意の $x \in C(p)$ に対して $N(p, x)$ は $(\lambda+1)$-次元 submanifold で p に於て singular point をもつ。

(5)″ $C(p)$ は compact submanifold で, 次元は $\dim M - (\lambda+1)$.

更に中川の定理により ([4]) M の Homology type は M^* のそれと同型である事が (1)″ より導びかれる。

もう少しMに対する条件を追加すると：

<u>定理2</u>（中川ー塩濱；[5]）．　M with (3) は以下の特徴をもつ。

(4)′　任意の $p \in M$，任意の $x \in C(p)$ に対して $N(p, x)$ は $(\lambda+1)$-次元 compact submanifold で，球に同相である。

(5)′　任意の点 p に対して $C(p)$ は $\dim M-(\lambda+1)$-次元 compact submanifold.

さて，M^* の一点 p^* に関する無限遠超平面 $C(p^*)$ は M^* と同一の微分幾何的構造をもつ。その理由として考えられる事は，$C(p^*)$ が totally geodesic subm. であることに因り，M^* のの持つ特徴が $C(p^*)$ に遺伝する事である。実さいに

<u>定理3</u>（中川ー塩濱；[5]）．　M with (3) and (5) につき以下が成立する。

(*)：もしも $N(p, x)$ が任意の $p \in M$，任意の $x \in C(p)$ に対して定曲率ならば M は M^* に等長である。

(**)：$\lambda=1$ ならば M は $P(C)$ に等長である。

さて，定理3の条件を relax する事を考える。

<u>条件(A)</u>：　(4)″ に於る singular point の出現をきらい，又，計算の都合により条件(3)は保留する。i.e. (A) := (3).

<u>条件(B)′</u>：　条件(*)を δ-pinched におきかえる。

<u>条件(C)′</u>：　条件(5)は任意の点 p を fix したとき任意の $x \in C(p)$ に於る任意の normal vector $v\ (\in M_x)$ に関する第二基本形式の定める endomorphism $S_v : T_x N(p, x) \to T_x N(p, x)$ の固有値が「十分0に近い」と云う条件におき換わるであろう，ここに $T_x N(p, x)$ は点 x に於

る $N(p,x)$ の接空間を表わす。実さい $X \in T_x N(p,x)$ を $S_v(X) = aX$ なる vector とすると、$d(p,x) =: l$, $\gamma : [0,l] \to M$ を $\gamma(0) := p$, $\gamma(l) := x$ $\gamma'(l) := v$ なる測地線, Y を γ に沿う Jacobi 場で, $Y(0) := 0$, $Y(l) := X$ なるものとするとき: 第二変分公式より

$$0 = \int_0^l (\langle Y', Y'\rangle - \langle R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y\rangle)\,dt + \langle S_v(X), X\rangle.$$

従って $a = -\langle Y, Y'\rangle(l)$。故に γ に沿う vector 場 $Y/\|Y\|$ が十分に平行な近ければ a は 0 に近づく。曲率の言葉に翻訳すれば $K(Y,\dot\gamma)$ が pinch されていれば a は 0 に近づく。

実さいに, 以下の如く曲率の条件 (B)', (C)' を formulate する事が可能である。

<u>定義 1.</u>

$$G_1 := \{(X,Y)\ ;\ X, Y \in TN(p,x) \text{ for all } p \in M \text{ and all } x \in C(p)\}$$

$$G_2 := \left\{(X,Z)\ ;\ \begin{array}{l} X \in TN(p,x),\ Z \text{ is normal to } TN(p,x) \ni X \\ \text{for all } p \in M \text{ and all } x \in C(p) \end{array}\right\}$$

<u>定義 2.</u>

$$\delta := \frac{\mathrm{Min}\{K(X,Y)\ ;\ (X,Y) \in G_1\}}{\mathrm{Max}\{K(X,Y)\ ;\ (X,Y) \in G_1\}}$$

$$\kappa := \frac{\mathrm{Min}\{K(X,Z)\ ;\ (X,Z) \in G_2\}}{\mathrm{Max}\{K(X,Z)\ ;\ (X,Z) \in G_2\}}$$

<u>Remark 1.</u> 上述の G_1, G_2 を $M^* = P(C)$ の場合にあてはめてみると G_1, G_2 は夫々 holomorphic, anti-holomorphic sections の集合であり δ, κ は M^* 上ではともに 1 である。

さて我々が証明したい事は以下である。

主定理;[7]. Mは compact リーマン多様体で条件(A)を満たし，且つ $\lambda=1$ とする。このとき単調増加数列 $\{\delta_n\}$ と $\{K_n\}$ とが存在し，

(B): $\delta > \delta_m$

(c): $K > K_m$

を満たすMは $P(C)^m$ (複素次元)に微分同相である。

II. Outline of Proof. 以下 cut locus までの距離を ℓ とし，$M^*=P(C)$ の曲率は $\frac{\pi^2}{4\ell^2} \leqq K^* \leqq \frac{\pi^2}{\ell^2}$ を満たすものとする。$p\in M$, $p^*\in M^*$ を任意に fix する。$C(p)$ が p^* に関する無限遠超平面 $C(p^*)$ に微分同相であれば，証明は終り。実際，$h: C(p^*) \longrightarrow C(p)$ が diffeom. であるとき，$x^*\in C(p^*)$，$x:=h(x^*)\in C(p)$ に於る 2-次元 normal subspace in $M^*_{x^*}$, M_x を夫々 $V(x^*)$, $V(x)$ とおくとき，$\tilde{h}: M^* \longrightarrow M$ を $\tilde{h} := (\exp_p|V(x))\circ h\circ(\exp_{x^*}|V(x^*))^{-1}$ で定義すると $\tilde{h}$ は diffeom. になる。従って $C(p)$ の微分構造に我々は注目する。

$C(p)$ を点 p からながめると，$x\in C(p)$ に対して M_p 内の 2-次元 linear subspace $T_pN(p,x)$ が自然に対応する。$\{T_pN(p,x);\ x\in C(p)\}$ を M_p 内の原点中心の単位超球面で cut すると $C(p)$ に対して $S_p(1)$ 上の大円族が対応する。かくして $(2m-1)$-次元 standard 球面上の S^1 free action が得られる。実際に $J: S_p(1) \longrightarrow S_p(1)$ を上述の大円上の $90°$ 回転を与える変換とすると（即ち $J^2=-id.|S_p(1)$），$S^1\equiv[0,2\pi]$ の任意の元 θ に対して $\tilde{\varphi}_\theta: S_p(1) \longrightarrow S_p(1)$; $\tilde{\varphi}_\theta(u) := u\cos\theta + Ju\sin\theta$, $u\in S_p(1)$

により S^1 free action $(S_p(1), \tilde{\varphi}, S^1)$ が得られる。更に $\exp_p$ を介して $C(p)$ は $S_p(1)/\tilde{\varphi}$ と同一視される。$C(p^*)$ についても同様の考察から standard action $(S_{p^*}(1), \varphi, S^1)$ を得る。$S_{p^*}(1) \longrightarrow S_{p^*}(1)/\varphi$ は Hopf fibration である。J を almost complex structure とし，$\theta \in S^1$ に対して $\varphi_\theta : S_{p^*} \to S_{p^*}(1)$ は $\varphi_\theta(u) := u\cos\theta + Ju\sin\theta$ で与えられる。

我々の bundle は明らかに principal bundle であるから bundle space 上の fibre preserving diffeom. を条件 (B), (C) の下に構成する事が前述の $h : C(p^*) \longrightarrow C(p)$ を induce する。即ち $S_p(1)$ と $S_{p^*}(1)$ とを linear isometry により同一視したとき，我々は次の map に注目する：

<u>定義 3.</u>　$f := \tilde{J} \circ J^{-1}$.

さて，$\tilde{J}$ と J との「差」は f により測れる。その「差」が十分小さい時に fibre preserving diffeom. が構成されるであろう。その「差」は条件 (B), (C) により control される。以下に fibre preserving diffeom. を構成する方法を述べる。

<u>定理 4.</u>　任意の $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{4}]$ に対し，$\delta(m, \varepsilon)$, $K(m, \varepsilon)$, $\iota : M^*_{p^*} \longrightarrow M_p$ ($S_{p^*}(1)$ と $S_p(1)$ との identification) が存在し，$\delta \geq \delta(m, \varepsilon)$, $K \geq K(m, \varepsilon)$ は次の不等式を imply する。

$$\mathrm{Max}\{\measuredangle(u, f(u))\,;\, u \in S^{2m-1}\} = \beta < \varepsilon$$

$$\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau_1 A, df A)\,;\, A \in TS^{2m-1}\} = \varepsilon,$$

ここに $2m = \dim M$, τ_1 は u, $f(u)$ を結ぶ大円に沿う平行移動である。

さて, 定理4の条件を満たす f は以下の意味に於て $id.|S^{2m-1}$ に diffeotopic である: 任意の点 u に対し $\gamma_u : [0,1] \longrightarrow S^{2m-1}$ を u, $f(u)$ を結ぶ最短測地線とする, 但しパラメーターは弧長に比例して $\gamma_u(0) := u$, $\gamma_u(1) := f(u)$ となる様にとられているものとする。$F : [0,1] \times S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m-1}$ を $F(t,u) := \gamma_u(t)$ で定義し, $F_t : S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m-1}$ を $F_t(u) := F(t,u)$ とおけば, F_t は全ての $t \in [0,1]$ に対して diffeom. であり, 特に $F_0 = id.$, $F_1 = f$。

<u>定義4.</u> $$J_t := F_t \circ J \qquad t \in [0,1]。$$

このとき $\measuredangle(u, J_t(u)) = \frac{\pi}{2}$ が全ての $u \in S^{2m-1}$, $t \in [0,1]$ に対して成立するから J_t は S^{2m-1} 上の単位 vector 場とみなせる。この $\{J_t\}(0 \leqq t \leqq 1)$ を用いて fibres の φ から ψ への local deformation を構成したい。その準備として以下のものを定義する。

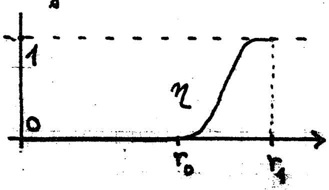
<u>定義5.</u>

$r_1 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \beta)$ なる正の数を固定する。$r_0 := \frac{\pi}{4}$。

$B_{r_1}(u) := \{ v \in S^{2m-1} ; \langle Ju, v \rangle = 0,\ \measuredangle(u,v) < r_1 \}$。

$r : B_{r_1}(u) \longrightarrow \mathbb{R}$; $r(v) := \measuredangle(u,v)$。

$\eta : [0, r_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 右図の如き C^∞ 関数



$\phi : B_{r_1}(u) \times S^1 \longrightarrow S^{2m-1}$ s.t.

$$\phi(v,\theta) := \exp_v \theta \cdot J_{\eta(r(v))}(v), \quad v \in B_1(u),\ \theta \in S^1。$$

$$\phi^{-1}(x) := (px, \theta_x)。$$

$\phi_v : [0, 2\pi] \longrightarrow S^{2m-1}$, $\phi_v(\theta) := \phi(v,\theta)$。

以上の準備の下に；

<u>定理5.</u> 正数 ε_0 が存在し，$\mathrm{Max}\,\angle(\tau_1 A, dfA) < \varepsilon_0$ ならば $\phi : B_{r_1}(u)\times S^1 \longrightarrow S^{2m-1}$ は u のとり方に無関係に diffeom. となる。従って ϕ は coordinate function とみなせる。

定理5より我々は新しい S^1 free action $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}_1, S^1)$ を得る。実際 $\tilde{\varphi}_1$ は；

$$\tilde{\varphi}_1(v,\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(v,\theta) & v \in \phi(B_{r_0}(u), S^1) \\ \phi_{pv}(pv, \theta_v+\theta) & v \in \phi(B_{r_1}(u) - B_{r_0}(u), S^1) \\ \tilde{\varphi}(v,\theta) & v \in S^{2m-1} - \phi(B_{r_1}(u), S^1) \end{array} \right\}$$

で与えられる。$\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\varphi}_1$ の間には equivarrant diffeom. が存在するから $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}$ と $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}_1$ とは diffeom. である。更に $B_{r_0}(u)$ 内では $\tilde{\varphi}_1$ と φ とは一致する。この $\tilde{\varphi}_1$ に対し再び $\tilde{J}_1$ を $\tilde{J}_1^2 = -id.$ で定義し，定義3で与えた diffeomorphism $f_1 := \tilde{J}_1 \circ J^{-1}$ を考える。

$$\mathrm{Max}\{\angle(u, f_1(u))\,;\, u \in S^{2m-1}\} =: \beta_1$$

$$\mathrm{Max}\{\angle(\tau A, df_1 A)\,;\, A \in TS^{2m-1}\} =: \varepsilon_1,$$

とおくと，β_1, ε_1 に関する情報は local cross section $B_{r_1}(u)$ 上での ϕ の作り方から知れる。実さいに $\beta_1 \leqq \beta$ であり，ε_1 は $\beta, \varepsilon,$ (η, η' 等) の関数として表わされる。つまり $\tilde{\varphi}_1$ から φ への fibres の local deformation を実行する為の <u>routine work</u> を定める事が出来る。かくして次の定理を得る。

<u>定理6.</u> 単調減少数列 $\{\varepsilon_i\}$ が存在して、定義3で与えた f が $\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau_1 A, dfA);\ A \in TS^{2m-1}\} < \varepsilon_k$ を満たすとき、$(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ は k 回の local deformations (定義5で与えた方法での)を許容する。

<u>主定理の証明.</u> Standard fibre のまわりの半径 $\sin r_0$ の tubular nbd.s で bundle space S^{2m-1} の open finite covering になっている様なものの最小の個数を $N(m)$ とする。$N(m) > \frac{1}{(\sin r_0)^{2m-2}}$ でなければならぬ事が tubular nbd. の体積と S^{2m-1} の体積の比から解る。従って $N(m)$ は次元にきびしく depend する。定理4より $\delta_m := \delta(m, \varepsilon_{N(m)})$, $K_m := K(m, \varepsilon_{N(m)})$ が存在し、$\delta > \delta_m$, $K > K_m$ なるとき $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ は $N(m)$ 回の local deformation を許容する。かくして S^1 free actions

$$\tilde{\varphi},\ \tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2,\ \cdots,\ \tilde{\varphi}_{N(m)} = \varphi$$

を得るが互いにとなり合うものどうしは equivalent だから結局 $\tilde{\varphi}$ は φ に equivalent になる。

<u>Remark 2.</u> $(S^{2m-1}, \tilde{\varphi}, S^1)$ の orbit $S^{2m-1}/\tilde{\varphi}$ は PC と同型な Homotopy type を持つ事が一般論から云へる[ ]。更に Hsiang 兄弟の定理([2])によると、(S^{11}, ψ, S^1) の orbit 上に無限個の互いに異なる微分構造が存在する。我々の場合に orbit space $S^{2m-1}/\tilde{\varphi} = C(P)$ 上にどのくらい互いに異なる微分構造があるのか？ 全ての fibre が大円である様な "exotic action" の counter example はあるか？ この2点につ

transformation group の人々に問い合わせ中です。
Ib Madsen (Aarhus), Burghelea (Bukarest) 等によると「少なくとも有限個の微分構造は存在するであろう」。
T. Petrie (Rutgers) の説は「infinitely many 存在する」との事で正確な事は残念ながら不明です。

以下に少し詳しい議論をしたい。[6] に述べられている Jacobi field の Twist の評価，その他の評価式 (Rauch, Toponogov, Berger-Warner の比較定理) は自明なものとして話をすすめる。

<u>III. Diffeomorphism $f := \tilde{J}\circ J^{-1}$.</u> Rauch の定理より

<u>Lemma 3.1.</u> $\dfrac{1}{L} \leqq \dfrac{\| df\,A \|}{\| A \|} \leqq L := \dfrac{1}{\sqrt{K}} \cdot \dfrac{1}{\sin \frac{\pi\sqrt{K}}{2}}$ が全ての接 vector $A \in TS^{2m-1}$ について成立。

次に球面三角法を用いて以下を得る:

<u>Proposition 3.2</u> $M_p\ (\supset S_p(1))$ の orthonormal basis $(e_1, Je_1, \cdots, e_m, Je_m)$ が存在し，更に数列 $\{L_i\}, \{\beta_i\}, \{\bar{\beta}_i\}$ が存在し以下をみたす。$\beta_i, \bar{\beta}_i$ は共に L の関数であり

$$\beta_1(L) := 0, \qquad \bar{\beta}_1(L) := \cos^{-1}\left[\cos\left\{\frac{\pi L}{4} + \frac{\pi}{2}(L-1)\right\} \Big/ \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$\cos\beta_i(L) := \sin\frac{\pi L}{2}\cos\frac{\pi}{2}(L-1) - \frac{\pi}{2}(L-1) - (\beta_{i-1}^2 + \bar{\beta}_{i-1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\bar{\beta}_i(L) := \cos\left\{\frac{\pi L}{4} + \frac{\pi}{2}(L-1) + \beta_i(L)\right\} \Big/ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L_i := \mathrm{Max}\left\{L \,;\, \bar{\beta}_{i-1}(L) + \frac{\pi L}{2} \leqq \pi,\ \beta_{i-1}(L) + \frac{\pi L}{2} \leqq \pi\right\}$$

によって各数列の element が定義されるとき;

不等式 $L \leqq L_i$ は $i = 1, 2, \cdots, m$ に対し

$$\measuredangle(u, f(u)) \leqq \beta_i(L) \quad \text{for any } u \in U_i$$

$$\measuredangle(v, f(v)) \leqq \bar{\beta}_i(L) \quad \text{for any } v \in U_{i+1}, \ \langle v, U_i \rangle = 0$$

を imply する。但し U_i は $S_p(1)$ と $2i$-linear subspace spanned by $\{e_1, Je_1, \cdots, e_i, Je_i\}$ との交わり。

次に M 上の Jacobi の Twist の評価式を用いて;

<u>Proposition 3.3.</u> 任意の正数 ε に対して $\delta(\varepsilon)$, $k(m, \varepsilon)$ が存在し，二つの不等式

$$\delta \geqq \delta(\varepsilon), \quad k \geqq k(m, \varepsilon)$$

は

$$\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau_1 A, df A)\ ;\ A \in TS_p(1)\} = \varepsilon$$

を imply する。

<u>証明。</u> $B := J^{-1}A$ とおくと ($A \in T_u S_p(1)$)

$$\measuredangle(A, dfA) \leqq \cancel{\measuredangle(A, f(A))} + \measuredangle(\tilde{J}B, d\tilde{J}B)。$$

$\langle B, f(u) \rangle = 0$ の場合のみ essential である。sphere pinching で用いた手法を使って

$$\lim_{\substack{\delta \to 1 \\ k \to 1}} \measuredangle(\tilde{J}B, d\tilde{J}B) = 0$$

が云へる。

<u>Remark. 3.</u> 上記の limit argument に於ての み δ が介入してしまう。しかし δ をピンチするのが本質的か否かは不明である。モデルを $P(Q)$ に変えた時には本質的に必要であろう。

さて，deformation を実行する為の準備として，diffeotopy $\{F_t\}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の各元 F_t が満たす角度評価式を求めておく。

<u>定理 3.4.</u> f は定義 3 で与えたものとし，更に以下の仮定を満たすものとする：

$$L^{-1} \leqq \|df\| \leqq L$$
$$\mathrm{Max}\{\measuredangle(u, f(u)) \,;\, u \in S^{2m-1}\} =: \beta < \varepsilon \leqq \frac{\pi}{4}$$
$$\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau_1 A, dfA) \,;\, A \in TS^{2m-1}\} = \varepsilon .$$

このとき F_t は各 $t \in [0, 1]$ に対して以下を満たす.

$$\hat{L} \leqq \|dF_t\| \leqq \hat{H}$$
$$\measuredangle(\tau_t A, dF_t A) \leqq \hat{\varepsilon} \qquad \text{for any } A \in TS^{2m-1},$$

ここに

$$\hat{L}^2 := L^{-2}\cos^2\varepsilon - L\cdot\sqrt{L^2 + 1 - L^{-2}\cos^2\varepsilon}\cdot\sin 2\alpha$$
$$\hat{H}^2 := L^2 + 1 - L^{-2}\cos^2\varepsilon + L\sqrt{L^2 + 1 - L^{-2}\cos^2\varepsilon}\cdot\sin 2\alpha$$
$$\cos\hat{\varepsilon} := (\cos\alpha - \sin\alpha)\, L^{-1}\cdot\cos\varepsilon \Big/ \sqrt{L^2 + 1 - L^{-2}\cos^2\varepsilon},$$
$$\cos\alpha := \frac{L^{-1}\cdot\cos\varepsilon}{\sqrt{1 + L^2 - L^{-2}\cos^2\varepsilon}} .$$

<u>IV. Deformation of fibres.</u> 定義 5 で与えた $\phi : B_{r_1}(u) \times S^1 \longrightarrow S^{2m-1}$ が 1-1 且つ regular な map であるように，正数 ε_0 が（$\mathrm{Max}\measuredangle(\tau_1 A, dfA) < \varepsilon_0$ となる ε_0）とれれば定理 5 は証明された事になる。

任意の点 v と任意の $A \in T_v B_{r_1}(u)$，$v \in B_{r_1}(u)$ に

対して，σ_Aを大円弧で$\sigma_A(0):=v$, $\sigma_A'(0):=A$なるものとする。$\phi|(\sigma_A, S^1)$は1-parameter geodesic variationを定めるから，$\theta\in S^1$を任意にfixしたとき$d\phi_\theta(A)$はϕ_vに沿うJacobi field $(:=Z_A)$のparameter θに於ける値である。さて$d\phi$がmaximal rankをもつ為の十分条件は，任意の点$v\in B_{r_1}(u)$，任意の$A\in T_vB_{r_1}(u)$，任意の$\theta\in S^1$に対して$d\phi_\theta(A)\neq 0$となる事である。この事はZ_Aのnormal component Z_A^Nがnon-zero twistを持てば十分である。さてZ_Aは週期2πをもつので

$$Z_A(\theta)=(U(0)\cos\theta+V(0)\sin\theta)\sqrt{1-a^2}+a\cdot\phi_v'(\theta),$$

$-1\leq a\leq 1$，と表わされる。ここにU, Vはϕ_v'に垂直な平行ベクトル場。$\theta=\frac{\pi}{2}$の場合に注目する。

<u>定義6.</u>
$$\begin{cases} r(v):=r, & \partial B_r(u)=:\eta^{-1}(\{r\}) \ \left(\begin{smallmatrix}B_{r_1}(u)\text{内の超}\\ \text{曲面}\end{smallmatrix}\right) \\ A\in T_v\eta^{-1}(\{r\}) & \\ B\in T_vB_{r_1}(u), & \langle B, T_v\eta^{-1}(\{r\})\rangle=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_\perp: \phi_v\text{に沿うJacobi fieldで } Z_\perp(0):=B \text{ なるもの} \\ Z_T: \quad ” \qquad ” \qquad ” \qquad Z_T(0):=A \quad ” \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Max}\{\|Z_\perp^N(\frac{\pi}{2})\|/\|Z_\perp^N(0)\|;\ v\in B_{r_1}(u)\}=:H_\perp \\ \mathrm{Min}\{\quad ”\quad /\quad ”\quad ;\ ”\quad\}=:L_\perp \\ \mathrm{Max}\{\|Z_T^N(\frac{\pi}{2})\|/\|Z_T^N(0)\|;\ A\in T_v\eta^{-1}(\{r\}),\ r\in[\frac{\pi}{4}, r_1]\}=:H_T \\ \mathrm{Min}\{\quad ”\quad /\quad ”\quad ;\quad ”\qquad ”\quad\}=:L_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Min}\{\measuredangle(Z_\perp^N(0), Z_\perp^N(\frac{\pi}{2}))\}=:\omega_\perp \\ \mathrm{Min}\{\measuredangle(Z_T^N(0), Z_T^N(\frac{\pi}{2}))\}=:\omega_T \\ \mathrm{Max}\{\measuredangle(JZ_\perp^N(0), Z_\perp^N(\frac{\pi}{2}))\}=:\mu_\perp \\ \mathrm{Max}\{\measuredangle(JZ_T^N(0), Z_T^N(\frac{\pi}{2}))\}=:\mu_T \end{cases}$$

以上の記号を定義した。

ここに $\mu_\perp, \omega_\perp, L_\perp, H_\perp$ は $\beta, \varepsilon, \eta', L$ の関数であり、$\mu_T, \omega_T, L_T, H_T$ は $\hat{\varepsilon}, \hat{H}, \hat{L}, \beta, r_1$ で表わされる。

このとき $\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau X, dfX); X \in TS^{2m-1}\} \to 0$ に従って

$$\lim H_\perp = \lim H_T = \lim L_\perp = \lim L_T = 1$$

$$\lim \omega_\perp = \lim \omega_T = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim \mu_\perp = \lim \mu_T = 0$$

が成立する。

<u>Proposition 4.1.</u> $\mathrm{Max}\{\measuredangle(\tau_1 X, dfX); X \in TS\} \leqq \frac{\pi}{4}$ とする。ϕ が local regular である為の十分条件は

$$\mathrm{Max}\{H_T \cos\omega_T, H_\perp \cos\omega_\perp\} + \mathrm{Max}\{H_T, H_\perp\}(|\cos\mu_T - \cos\mu_\perp| + \sin\mu_\perp \sin\mu_T)$$
$$< \left[\mathrm{Min}\{L_T^2, L_\perp^2\} - \mathrm{Max}\{H_T^2, H_\perp^2\}\cdot(\sin(\mu_T+\mu_\perp) + \sin\mu_T \sin\mu_\perp)\right]^{\frac{1}{2}}$$

が満たされる事である。

更に ϕ が local regular のとき、次が云へる。

<u>Proposition 4.2.</u> Prop. 4.1 の不等式が成立する ϕ に対して、

$$\frac{1}{L_1} \leqq \frac{\| Z_A(\theta + \frac{\pi}{2}) \|}{\| Z_A(\theta) \|} \leqq L_1$$

が任意の点 $v \in B_{r_1}(u)$ に於ける任意の $A \in T_v B_{r_1}(u)$ に対して成立する；ここに L_1 は

$$L_1^2 := \frac{\mathrm{Max}\{H_T^2 + H_T\cos\omega_T, H_\perp^2 + H_\perp\cos\omega_\perp\} + C}{\mathrm{Min}\{L_T^2 - H_T\cos\omega_T, L_\perp^2 - H_\perp\cos\omega_\perp\} - C},$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}\cdot C := \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}\{H_\perp, H_T\}\cdot(|\cos\mu_\perp - \cos\mu_T| + \sin\mu_\perp + \sin\mu_T) \\ H_T\cdot H_\perp\{\sin(\mu_\perp+\mu_T) + \sin\mu_\perp\cdot\sin\mu_T\} \end{array}\right\}.$$

Proposition 4.3. Prop. 4.1 の仮定の下に更に

$$\cos^{-1}\left(\frac{C}{L_1^2}\right) \geq \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\,H_\perp}\left\{\frac{\sin\beta}{\sin L_1\beta} - H_\perp \sin\mu_\perp \frac{\sin L_1\beta}{\sin\beta}\right\} + \beta$$

が成立したとする。このとき ϕ は 1-1 である。

証明。ϕ が 1-1 でないと仮定する。essential trouble は以下の場合に起こる；

$$\hat{r} := \sup\{r ;\ \phi|B_r(u)\times S^1 \text{ is diffeomorphic}\}$$

$$\bar{\theta} := \sup\{\theta ;\ \phi|\partial B_{\hat r}(u)\times[0,\theta) \text{ is diffeomorphic}\}$$

とおいたとき、互いに異なる2点 $x_1, x_2 \in \partial B_{\hat r}(u)$ が存在し、$\phi(x_1,\bar\theta)=\phi(x_2,\bar\theta)$ となる。ϕ の local regularity より restricted map

$$\psi_{\bar\theta} : \partial B_{\hat r}(u) \longrightarrow S^{2m-1}, \quad \psi_{\bar\theta}(x) := \phi(x,\bar\theta)$$

は (2m-2)-sphere の S^{2m-1} への immersion で、double cover になっている。もしも $\psi_{\bar\theta}(\partial B_{\hat r}(u))$ が実射影空間であれば Topology の定理[ ]により矛盾となる。しかし我々の situation では $\psi_{\bar\theta}$ に対する強い制約がないので image が実射影空間となるかは疑わしい。

$\sigma_i : [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow S^{2m-1}$ を $B_{r_2}(u)$ 上の大円弧で

$$\sigma_i(0) := u, \quad \sigma_i(\hat r) := x_i \qquad \phi(x_1,\bar\theta) = \phi(x_2,\bar\theta)$$

$$B_i := \sigma_i'(\hat r)$$

とする。$Z_\perp^i$ は ϕ_{x_i} に沿う Jacobi field で

$$Z_\perp^i(0) := B_i$$

とする。このとき $Z_\perp^1(\bar\theta)$ と $Z_\perp^2(\bar\theta)$ とは S^{2m-1} 内の超曲面 $\phi(\partial B_{\hat r}(u)\times S^1)$ の点 $\phi(x_i,\bar\theta)$ に於ける接平面に関して反対側の位置にある。従って $\angle(Z_\perp^1(\bar\theta), Z_\perp^2(\bar\theta))$

は計算により

$$\measuredangle(\Sigma_\perp^1(\bar\theta), \Sigma_\perp^2(\bar\theta)) \geq 2\cdot\cos^{-1}\left(\frac{c}{L_1^2}\right)$$

を満たさねばならぬ。一方この角度の upper bd. は

$$\measuredangle(\Sigma_\perp^1(\bar\theta), \Sigma_\perp^2(\bar\theta)) \leq \begin{cases} \measuredangle(\Sigma_\perp^1(\bar\theta), B_1) + \measuredangle(B_1, B_2) + \measuredangle(B_2, \Sigma_\perp^2(\bar\theta)), & (\bar\theta < \frac{\pi}{2}) \\ \measuredangle(\Sigma_\perp^1(\bar\theta), -B_1) + \measuredangle(-B_1, -B_2) + \measuredangle(-B_2, \Sigma_\perp^2(\bar\theta)), & (\frac{\pi}{2} < \bar\theta < \pi) \end{cases}$$

$$\leq 2\left\{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}H_\perp}\left(\frac{\sin\beta}{\sin L_1\beta} - H_\perp\sin\mu_\perp\frac{\sin L_1\beta}{\sin\beta}\right) + \beta\right\}.$$

ここで $\hat{r} > \frac{\pi}{4}$ (定義5の $r_0 := \frac{\pi}{4}$ より従がう) は $\measuredangle(B_1, B_2) < 2\beta$ を導びく為に essential に使われた。実際問題として r_0 が小さくなれば $\measuredangle(B_1, B_2)$ は大きくなる。

かくして定理5で主張した $\varepsilon_0 > 0$ は Propositions 4.1, 4.3 の不等式を満たす ε の sup として与えられる。これで routine work が定まった事になる。

定理5で述べた $(S^{2m-1}, \varphi_1, S^1)$ から $\tilde{f}_1$, $f_1 := \tilde{f}_1 \circ J^{-1}$ を定義し，再び角度計算を実行すると次を得る。

Prop. 4.4.

$$\beta_1 \leq \beta,$$
$$\frac{1}{L_1} \leq \| df_1 \| \leq L_1,$$
$$\measuredangle(\tau_1 A, df_1 A) \leq \varepsilon_1$$

ここに

$$\cos\varepsilon_1 := \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{\varepsilon}_1 + 3\beta}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\tilde{\varepsilon}_1 + \beta}{4}\right)\right\} - (L_1 - 1)}{H_1},$$

$$\cos\tilde{\varepsilon}_1 := \frac{\mathrm{Min}\{L_T\cos\mu_T, L_\perp\cos\mu_\perp\} - (H_T\sin\mu_T + H_\perp\sin\mu_\perp)}{H_1}.$$

定理6の証明は Prop. 4.4 より自明である。

References.

[1] Cheeger, Pinching Theorems for a Certain Class of Riemannian Manifolds, Amer. J Math., 91(1969), 807-834

[2] Wu-chung and Wu-yi Hsiang, Some free differentiable actions on 11-spheres, Quart. J. Math., 151(1964), 371-374

[3] Husemoller, Fibre bundles, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[4] Nakagawa, A note on Theorems of Bott and Samelson, J. Math. Kyoto, 7(1967), 205-220.

[5] Nakagawa-Shiohama, Geodesics and Curvature Structures Charachterizing Projective Spaces, Diff. Geom., in honor of K. Yano., Kinokuniya, Tokyo 1972.

[6] Sugimoto-Shiohama-Karcher, On the Differentiable Pinching Problem, Math. Ann., 195(1971), 1-16

[7] Shiohama, Riemannian Manifolds diffeomorphic to Complex Projective Space, to appear.