数理解析研究所講究録
第154巻 1972年 18-29

球面上の極小部分多様体と
Veronese 多様体について

東北大 教養　　釼持 勝衛

§1. 記号　　$S^n_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1};\ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = \frac{1}{k}\}$,
M^nをn次元リーマン多様体とし, $x: M^n \longrightarrow S_1^{n+p}$, $p \geq 1$, なる isometric minimal immersion だけを考える。

$1 \leq A, B, C \leq n+p$,　　$1 \leq i, j, k \leq n$,　　$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n+p$.

e_Aをe_iがM^nの各点で, M^nに接しているようなS_1^{n+p}の local orthonormal frame fields, ω_Bをe_Aの dual, ω_{AB}を connection forms として,

(1.1)　　$De_A = \sum_B \omega_{AB} e_B$,

(1.2)　　$\omega_{i\alpha} = \sum h_{\alpha ij} \omega_j$,　$\mathrm{II}_\alpha = \sum h_{\alpha ij} \omega_i \omega_j$ は 2nd fundamental forms とよばれる。

§2. Veronese surface.

S_1^4内の Veronese surface V_2^2とは,

(2.1)　　$(x_1, x_2, x_3) \in S^2_{\frac{1}{3}} \longrightarrow (\frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 - x_2^2), \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 x_2,$

$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3) \in S_1^4$ なる isometric immersion の像をいう。
この V_2^2 が S_1^4 内の極小曲面であることを最初に指適したのは，Borůvka [1], 1928年，であるように思われる。この論文の中で彼は frame を適当にとることにより，V_2^2 は

$$(2.2)\quad \begin{cases} \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0, \\ \omega_{13} = R\omega_1, \quad \omega_{14} = R\omega_2, \\ \omega_{23} = -R\omega_2, \quad \omega_{24} = R\omega_1, \qquad R^2 = \frac{1}{3}. \\ \quad \omega_{34} = 2\,\omega_{12} \end{cases}$$

を満足し，逆に (2.2) を満す S_1^4 内の compact な曲面は (2.1) しかないことをいっている。その後，Borůvka は (2.1) が S_1^2 上の spherical harmonics により定義されていることに注目して，$V_m^2 : S^2_{\frac{2}{m(m+1)}} \longrightarrow S_1^{2m}$ への isometric minimal immersion を定義して，その immersion のみたすべき構造方程式を決めて，色々の性質をしらべた [3]，1933年のことである。その後，この種の曲面の研究は，一，二の例外を除いて忘れられていたように思われるが，近年になり V_2^2 は 2nd fund. form の長さにより特徴づけられ [8]，又 S_1^{2m} 内の V_m^2 については，独立に別の見地から，大槻により再発見され，新しい極小部分多様体を作る時にもちいられた，[16]，[17]。
V_m^2 を minimal immersion の higher order の metric invariants を用いて特徴づけようとしたのは，最初に

Borůvka [3] があり，最近では伊藤 [13] によりしらべられている。

球面 S^N_1 内の一般の極小曲面を考える時，上の Borůvka－大槻の generalized Veronese surface V^2_m は一つの重要な model とみることができるが，そう思う時，S^N_1 内で S^2 に homeo. な極小曲面の理論をつくった Calabi [4], Chern [7]，の仕事は重要である。以下にその概略を Chern に従ってのべる：

M^2 をリーマン計量を許容している compact Riemann surface.

$\varphi = \omega_1 + i\omega_2$, $E_1 = e_1 + ie_2$ とおくと，

(2.3) … $DE_1 = -i\omega_{12}E_1 + \bar{\varphi}\sum_\alpha H^{(2)}_\alpha e_\alpha$, $H^{(2)}_\alpha = h_{\alpha 11} + ih_{\alpha 12}$

その時 $\sum_\alpha (\overline{H^{(2)}_\alpha})^2\varphi^4$ は M^2 上大域的に定義され，且 M^2 上 degree 4 の abelian form であることがわかる。よってもし M^2 の genus $= 0$ ならば，Riemann－Roch の定理により (c.f. [12]) $\sum_\alpha (H^{(2)}_\alpha)^2 = 0$. i.e.,

(2.4) … $\sum h^2_{\alpha 11} = \sum h^2_{\alpha 12}$, $\sum h_{\alpha 11}h_{\alpha 12} = 0$.

これは二つのベクトル，$\sum h_{\alpha 11}e_\alpha$ と $\sum h_{\alpha 12}e_\alpha$ とが 2nd order の osculating space において互に直交していて，その長さが等しいということ。$H^{(2)}_\alpha = 0$ なる点を order 1 の singular point と呼ぶことにすると，Chern ([7], P. 32) により $H^{(2)}_\alpha \neq 0$ ならば singular points は isolated で，そしてそのような singular point においても，極限をとることに

より"2nd order の osculating space"が定義できることがわかっている。　$k_1 \equiv (\sum h_{\alpha 11}^2)^{\frac{1}{2}} \geqq 0$ として $k_1 \neq 0$ の時は，上の議論から，e_3 と e_4 をえらびなおして，$E_2 = e_3 + i e_4$ とすると

$DE_1 = -i\omega_{12}E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2$　とかける。次に

$DE_2 = -k_1 \varphi E_1 - i\omega_{34} E_2 + \Phi$　とおくとき，

$\Phi = \sum_{\mu \geqq 5} (\omega_{3\mu} + i\omega_{4\mu}) e_\mu$ であって，regular point においては，

$$(2.5) \quad \cdots\cdots \quad = \frac{\bar{\varphi}}{k_1}\left(\sum H_\mu^{(3)} e_\mu\right), \quad H_\mu^{(3)} = h_{\mu 111} + i h_{\mu 112}, \text{とかける。}$$

$\sum_\mu (\overline{H_\mu^{(3)}})^2 \varphi^6$ は frame field のとり方に独立であり，又 singular point では 0 と定義すると，M^2 上大域的に定義され，且 degree 6 の abelian form であることがわかる。従って $g=0$ ならば Riemann-Roch の定理により，$\sum (H_\mu^{(3)})^2 = 0$．よって $k_2 \equiv (\sum h_{\mu 111}^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ の時は，　$DE_2 = -k_1 \varphi E_1 - i\omega_{34} E_2 + k_2 \bar{\varphi} E_3$　とかけるような E_3 を $E_3 = e_5 + i e_6$ にとることができる。このようにつづけてゆくと，M^2 の genus $=0$ の時は，M^2 の regular point で次のように local frame field e_A を選ぶことができる：

$$(2.6) \quad \begin{cases} E_s = e_{2s-1} + i e_{2s}, & 1 \leqq s \leqq m \\ DE_s = -k_{s-1} \varphi E_{s-1} - i\,\omega_{2s-1, 2s} E_s + k_s \bar{\varphi} E_{s+1}, & \end{cases}$$
$$1 \leqq s \leqq m, \quad k_0 = k_m = 0.$$

整数 m は，DE_m が E_{m-1} と E_m で張られる最小の数。(2.6)の積分可能条件をしらべて，

$$(2.7)\quad \begin{cases} \omega_{2s-1,2s} = s\omega_{12} + \theta_{s-1}, & 2 \leq s \leq m \\ k_1^2 = \frac{1}{2}(1-K) \geq 0, & \theta_s = d^c \log(k_1 \cdots k_s) \\ \frac{1}{2}\Delta \log(k_1 \cdots k_s) + k_s^2 - k_{s+1}^2 - \frac{1}{2}(s+1)K = 0 \\ \qquad s = 1, \cdots, m-1 \end{cases}$$

これらをまとめて，

定理 1 (Calabi, Chern) $x : S^2 \longrightarrow S_1^N \subset R^{N+1}$: isometric minimal immersion（実際，S_1^N は任意の定曲率空間でよい (Chern)）かつ $x(S^2)$ は R^{N+1} の超平面に含まれない。その時 $N = 2m$, singular points は isolated. regular point において，local invariants の complete system が (2.7) を満足する $k_s > 0$, $1 \leq s \leq m-1$，によって与えられる。

S^2 が特に定曲率の時は，次の uniqueness が成立する。

定理 2 (Calabi, do Carmo-Wallach, Chern, Barūnka) S^2 が定曲率の時は，K をガウス曲率として，$K \leq 1$ であって $K = 1$ は totally geodesic の時に限り，$K < 1$ ならば $K = \frac{2}{m(m+1)}$ かつ全ての k_s は定数になって，m で記述できる．よって，そのような曲面は，S_1^N の等長変換を除いて唯一つ (i.e., generalized Veronese surface).

又 (2.7) を用いて，$x(S^2)$ の面積を計算することができて，

定理3 (Calabi) image surface の面積 $A=A(x)$ は $2\pi\times$(整数) であり $A(x) \geqq 2\pi m(m+1)$。

S^2 に homeo で定曲率でないような S_1^{2m} 内の minimal surface の作り方については、Borůvka [3], Calabi [5], Chern [7] を参照。

§3. 問題1. genus $\geqq 1$ の時上のような理論はできるか？

その為に、先ず $g=1$ の時、V_m^2 に相当するような "model" となるべき曲面は何であろうか。S_1^3 内の Clifford minimal torus や S_1^5 内のある種類の曲面 (Borůvka [2]) が昔から知られている。ここでは Borůvka の方法を直接的に一般化して、任意の奇数次元単位球内の flat minimal surface の例を書く。 $x: M^2[0] \longrightarrow S_1^{2m+1} \subset R^{2m+2}$, $M^2[0]$ は flat surface. $z=u+iv$ を local coordinates. $x=(x_1,\cdots,x_{m+1},y_1,\cdots,y_{m+1}) \in R^{2m+2}$ を $(\cdots, x_i+\sqrt{-1}y_i,\cdots,\cdots,x_i-\sqrt{-1}y_i,\cdots)$ によって $\mathbb{C}^{2m+2}$ の元とみる。ε を $\varepsilon^{2m+2}-1=0$ を満す一つの虚根とする。その時

$X_i = x_i+\sqrt{-1}y_i$, $\quad X_{i+m+1} = x_i-\sqrt{-1}y_i$ とおいて,
$i=1,2,\cdots,m+1$

$$(3.1)\cdots \quad X_A = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \exp \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varepsilon^A z - \overline{\varepsilon^A z}\right\}, \quad A=1,2,\cdots,2m+2$$

は S_1^{2m+1} 内の flat minimal surface を与える。

特に $m=1$ の時は S_1^3 内の Clifford minimal torus を与え, $m=2$ の時は S_1^5 内の Borůvka [2] の研究した曲面を与える。

(3.1) の曲面の Frenet-Borůvka formulas は,

$$
(3.2)\quad
\begin{cases}
dx = \frac{1}{2}\bar{\varphi}E_1 + \frac{1}{2}\varphi\bar{E}_1, & \varphi = \omega_1 + i\omega_2,\quad E_0 = 0 \\
DE_1 = -i\omega_{12}E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varphi}E_2, & E_1 = e_1 + i e_2 \\
\cdots\cdots & \\
DE_{m-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi E_{m-2} - i(m-1)\omega_{12}E_{m-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varphi}E_m, & \\
 & E_m = e_{2m-1} + i e_{2m}, \\
DE_m = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi E_{m-1} - i m\,\omega_{12}E_m + \bar{\varphi}E_{m+1}, & \\
DE_{m+1} = -\varphi E_m - \bar{\varphi}\bar{E}_m. & E_{m+1} = e_{2m+1}
\end{cases}
$$

であって, (3.2) 式は 大槻 [17] が T-type の minimal surface と呼んでいるものの特別な場合で [17] の p.118, (II) において, $\mathfrak{T}=1$, $\mathbb{P}=0$ とおいて得られる式に等しい。

注意1. Borůvka [2] と全く同様にして, 曲面 (3.1) の射影微分幾何学的な characterization を与えることができる。

注意2. S_1^N 内の compact minimal surface で $K \geq 0$ なるものとする。higher order の metric invariant にある仮定をおくと, その考えている曲面は (3.1) だけである。

注意3. S_1^3 内のそのほかの $g \geq 1$ の minimal surface については, Lawson [14], [15] の詳しい研究がある。

§4 <u>問題2. §2の定理を $n \geq 3$ の場合へ拡張せよ.</u>

特に, 定理2のような rigidity は成立するであろうか?

まず V_2^2 の一般次元への拡張について:

$$\psi_{n,2} : S^n_{k(2)} \longrightarrow S_1^{m(2)}, \qquad k(2) = \frac{n}{2(n+1)}, \quad m(2) = n + \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

への写像 $\psi_{n,2} = (f_1, \cdots, f_{m(2)+1})$ を以下のように定義する.

$$(4.1)\quad \begin{cases} f_1 = \sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}} \cdot \dfrac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2), \\ f_2 = \sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \\ \cdots\cdots \\ f_n = \sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n x_{n+1}^2\right) \\ f_{ij} = \sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}}\, x_i x_j \quad (i<j, \quad i,j = 1, \cdots, n+1). \end{cases}$$

その時 $\psi_{n,2}$ は isometric minimal imbedding である.

特に $\psi_{2,2}$ は Veronese surface in S_1^4 であり,

$$\psi_{3,2} : S^3_{\frac{3}{8}} \longrightarrow S_1^8,$$

$$\psi_{4,2} : S^4_{\frac{2}{5}} \longrightarrow S_1^{13},$$

$\cdots\cdots$

$\psi_{n,2}$ についての <u>注意1</u>. この写像が isometric imbedding であ

るということは，E. Cartan の教科書［6］の最後の目次にある。

注意2．［8］の P.73, Example 2 と上にのべた $\Psi_{n,2}$ は"同じ"図形を与える。

より一般に $\Psi_{n,s}: S^n_{k(s)} \longrightarrow S_1^{m(s)} \subset R^{m(s)+1}$,

$k(s) = \dfrac{n}{s(s+n-1)}$, $m(s) = \dfrac{(s+n-2)!}{s!\,(n-1)!} - 1$, なる "standard" minimal immersion が球面上の spherical harmonics of order s を用いて定義できること［11］が知られており，この $\Psi_{n,s}$ は上にのべたことから球面上の Veronese manifold と呼んでもいいかもしれない。さてこの $\Psi_{n,s}$ については，次の Do Carmo-Wallach［11］の仕事が基本的である。彼等の結果をのべる為に次の言葉を用意する。

○ minimal immersion $\varphi: S^n_k \longrightarrow S^l_1 \subset R^{l+1}$ において，$\varphi(S^n_k)$ が R^{l+1} の超平面に含まれない時，φ は full であるという。

○ 二つの immersions $\varphi_1, \varphi_2: S^n_k \longrightarrow S^l_1 \subset R^{l+1}$ に対して S^l_1 のある等長変換 ρ があって，$\varphi_2 = \rho\circ\varphi_1$ となるとき，φ_1 と φ_2 は equivalent であるといって，$\varphi_1 \sim \varphi_2$ と記す。

その時，高橋の定理を用いて，次は容易に示される。

命題4． $\varphi: S^n_k \longrightarrow S^l_1$: isometric minimal immersion

$\Rightarrow$ $\exists s$: $k = k(s)$．更に φ が full ならば $l \leqq m(s)$.

$n \geqq 3$ の時でも次の時には，一意性は成立する，i.e.,

定理5（Do Carmo-Wallach） φ を上と同じとする。

更に φ が full で $s \leqq 3 \Rightarrow \varphi \sim \varphi_{n,s}$, 特に $l = m(s)$.

$n \geqq 3$, $s \geqq 4$ になると その状況は非常にことなり,

定理 6 (do Carmo − Wallach), φ : 上と同じ, φ : full, $n \geqq 3$, $s \geqq 4 \Rightarrow$ そのような immersions の同値類の集合は, 最低でも 18 次元 のあるベクトル空間のある compact convex body L により smoothly parametrize される: L の内点は $l = m(s)$ であるような φ に対応しており, L の boundary points は $l < m(s)$ であるような φ に対応している。

参考文献

1. O. Borůvka, Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, Bull. intern. de l'Acad. Tech. des Sci., Prague, 29 (1928), 256−277.

2. ——, Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante, Pub. de la Faculté des sci. de L'université Masaryk, (1929), 3−~~28~~.

3. ——, Sur les surfaces representées par les fonctions spheriques

de première espèce, J. Math Pures Appl., 12 (1933), 337–383.

4. E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spaces, J. D. G., 1 (1967), 111–1125.

5. ——, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, in Topics in Complex Manifolds, Univ. of Montreal, Montreal, 1967.

6. E. Cartan, Leçons sur la géometrie projective complexe, Cahiers Sci. vol 10. Gauthier-Villars, Paris, 1950.

7. S.S. Chern, On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature, Problems in Analysis, honor of Prof. S. Bochner, Princeton, p.p. 27–40.

8. ——, M. Do Carmo, S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields, 59–75.

9. Do Carmo – N.R. Wallach, Minimal immersions of a sphere into spheres, Proc. N.A.S., 63 (1969), 640–642.

10. ——, Representations of compact groups and minimal immersions into spheres, J.D.G., 4 (1970), 91–104

11. ——, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math., 93 (1971), 43–62.

12. R.C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, Princeton, Mathematical Notes, 1966.

13. T. Itoh, Minimal surfaces in a Riemannian manifold of constant curvature, preprint.

14. H.B. Lawson, JR, Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math., 92 (1970), 335 – 374.

15. ——, Compact minimal surfaces in S^3, Proceed. Symp. in Pure Math., vol IV, Global Analysis, 275–282.

16. T. Otsuki, Minimal submanifolds with M-index 2 in Riemannian manifolds of constant curvature, Tôhoku M.J., 23 (1971), 371–402

17. ——, Minimal submanifolds with m-index 2 and generalized Veronese surfaces, J.M.S.J., 24 (1972), 89–122.

18. T. Takahashi, Minimal immersions of riemannian manifolds, J. M.S.J., 18 (1966), 380 –385.

T.