数理解析研究所講究録
第154巻 1972年 37-45



# ある種の基本楕円曲面の大域的モノドロミー

都立大 理　佐々井 崇雄

## §1. 序

非特異、コンパクトな2次元複素多様体 $S$ に関し、コンパクト・リーマン面 $\Delta$ と $S$ から $\Delta$ の上への正則写像 $\Phi$ が存在し、一般のファイバー $C_u = \Phi^{-1}(u)$, $u \in \Delta$ が非特異楕円曲線（複素トーラス）であるとき、$S$ を $\Delta$ 上の楕円曲面という。特に、$\Delta$ 上の global section が存在するとき、$S$ は $\Delta$ 上の基本楕円曲面と呼ばれる。今後 $\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とし、その上の基本楕円曲面について考える。

非特異楕円曲線でないファイバーが有限個存在するが、それを特異ファイバーと呼ぶ。特異ファイバーが立っている $\Delta$ の点を全てよせ集め、$\Sigma = \{a_1, \cdots, a_r\}$ と書く。$\Delta' = \Delta - \Sigma$ とすると、基本楕円曲面 $B$ の $\Delta'$ への制限 $B|\Delta'$ は、$\Delta'$ 上の可微分トーラス・バンドルである。一点 $o \in \Delta'$ を fix し、ファイバー $C_o$（複素トーラス）の一次元ホモロジー群 $H_1(C_o, \mathbb{Z})$ の基底を定めると、よく知られているように基本群 $\pi_1(\Delta', o)$ からモジ

ュラー群 SL(2,Z) への表現が決まる。これをモノドロミー表現と呼ぶ。この表現（homological invariant とも言う）と，Δ上のある有理函数（functional invariant）とを与えると，それから自然に定まる基本楕円曲面の構成法が知られている（小平[2]）。しかし，その曲面は全体的に見通しやすいものではない。一方，Kas によって基本楕円曲面はΔ上の$\mathbb{P}^2$-バンドルの中で，ある多項式で定義される曲面の非特異モデルとして得られることが示された。ここでは，その Kas による標準形を用いて，与えられた基本楕円曲面のモノドロミーを大域的に決定する。

§2．基本楕円曲面の標準形（Kas [1]）

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を複素射影平面，$(x, y, z)$ をその斉次座標とする。直積 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ の2つのコピーを $W_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_0$，$W_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_1$ とし，その和集合 $W^k = W_0 \cup W_1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ に於いて，点 $(x, y, z, u) \in W_0$ と $(x_1, y_1, z_1, u_1) \in W_1$ を次の関係で同一視する。

$$u^{2k} x_1 = x,\ u^{3k} y_1 = y,\ z_1 = z,\ u u_1 = 1.$$

同様に，$\Delta = \mathbb{C}_0 \cup \mathbb{C}_1$ に於いて，$u \in \mathbb{C}_0$ と $u_1 \in \mathbb{C}_1$ を $u u_1 = 1$ で同一視する。$W^k$ はΔ上のファイバーが $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ である複素解析的ファイバー・バンドルである。

今，点 $(\tau, \sigma) = (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{4k}, \sigma_1, \cdots, \sigma_{6k}) \in \mathbb{C}^{10k+1}$ に対し，二つ

の多項式を

$$g_{4k}(u) = \tau_0 u^{4k} + \tau_1 u^{4k-1} + \cdots + \tau_{4k},$$

$$h_{6k}(u) = u^{6k} + \sigma_1 u^{6k-1} + \cdots + \sigma_{6k}$$

とする。基本楕円曲面（$B_k(\tau,\sigma)$ と書く）は $W^k$ に於いて次の様に表わされる。

$$y^2 z - 4x^3 + g_{4k}(u)\, x z^2 + h_{6k}(u)\, z^3 = 0 \qquad \text{in } W_0$$

$$y_1^2 z_1 - 4x_1^3 + u_1^{4k} g_{4k}\left(\frac{1}{u_1}\right) x_1 z_1^2 + u_1^{6k} h_{6k}\left(\frac{1}{u_1}\right) z_1^3 = 0 \qquad \text{in } W_1 .$$

$B_k(\tau,\sigma)$ から $\Delta$ への射影 $\Phi$ は

$$\Phi ; (x, y, z, u) \longrightarrow u$$

$$(x_1, y_1, z_1, u_1) \longrightarrow u_1$$

で定義される。なお、$u_1 = 0$ を $u = \infty$ と表わすこともある。

次に、$D_k(u) = g_{4k}^3(u) - 27 h_{6k}^2$，$\tilde{D}_k(u_1) = u_1^{12k} D_k\left(\frac{1}{u_1}\right)$ と定義する。明らかに、$C_u = \Phi^{-1}(u)$ $(C_\infty = \Phi^{-1}(\infty))$ が非特異楕円曲線であることと、$D_k(u) \neq 0$ $(\tilde{D}_k(0) \neq 0)$ とは同値である。

## §3. $\mathbb{C}^2$ 上のファイバー空間

今後、本稿でファイバー空間と言う場合、covering homotopy property は一切仮定しない。

$\mathbb{C}^2$ 上の解析的ファイバー空間 F を次のように定義する。(X, Y, Z) を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の斉次座標，(G, H) を $\mathbb{C}^2$ の複素ユークリッド座標とする。$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$ に於いて、F を

$$Y^2Z-4X^3+G\cdot XZ^2+HZ^3=0$$

で定める。又、F から $\mathbb{C}^2$ の上への射影Φは

$$\Phi;(X,Y,Z,G,H)\longrightarrow(G,H)$$

で定義する。$E=\mathbb{C}^2-\{(G,H)\mid G^3-27H^2=0\}$ としよう。$F|E$ は E 上の、トーラスをファイバーとする可微分ファイバー・バンドルである。

今、$\mathbb{C}_0=\Delta-\{u=\infty\}$, $\Delta''=\mathbb{C}_0-\{a_p\}$ として、$\mathbb{C}_0$ から $\mathbb{C}^2$ への正則写像 $\varphi$、$B_k(\tau,\sigma)|\mathbb{C}_0$ から F への正則写像 $\bar{\varphi}$ を、それぞれ次のように定義する。

$$\varphi;u\longrightarrow(g_{\chi k}(u),\ h_{\zeta k}(u))$$

$$\bar{\varphi};(x,y,z,u)\longrightarrow(x,y,z,g_{\chi k}(u),h_{\zeta k}(u))$$

明らかに、

［補題 3.1］

1) $B_k(\tau,\sigma)|\mathbb{C}_0$ は $\varphi$ によって F から誘導されたファイバー空間であり、$\varphi$ によって誘導されたファイバー写像が $\bar{\varphi}$ である。

特に、

2) $B_k(\tau,\sigma)|\Delta''$ は $\varphi|\Delta''$ によって $F|E$ より誘導されたファイバー・バンドルである。

$F|E$ は E 上のトーラス・バンドルであるから、$B_k(\tau,\sigma)$ の場合と全く同様に F のモノドロミーが定義できる。それは $\pi_1(E)$

の $SL(2,\mathbb{Z})$ への表現である。

今、$\theta \in \Delta''$ を固定し、$H_1(C_\theta, \mathbb{Z})$ の基底 $\gamma_1, \gamma_2$ を選んでおく。対応する $B_k(\tau, \sigma)$ のモノドロミーを $\rho$ としよう。$\bar{\varphi}$ によって定まる $H_1(C_\theta, \mathbb{Z})$ から $H_1(\mathcal{C}_{\varphi(\theta)}, \mathbb{Z})$ （$\mathcal{C}_{\varphi(\theta)} = \Phi^{-1}(\varphi(\theta))$）への自然な同型写像を $\bar{\varphi}_*$ とし、$\{\bar{\varphi}_*(\gamma_1), \bar{\varphi}_*(\gamma_2)\}$ で定まる F のモノドロミーを $\tilde{\rho}$ で表わす。

［補題 3.2］

次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Delta'', \theta) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(E, \varphi(\theta)) \\ & \rho \searrow \quad \swarrow \tilde{\rho} & \\ & SL(2,\mathbb{Z}) & \end{array}$$

（ここで、$\varphi_*$ は $\varphi$ で定まる自然な準同型写像）

$\pi_1(E)$ に関して、次の結果が知られている。点 $(1,0) \in \mathbb{C}^2$ を基点とし、曲線 $G^3 - 27H^2 = 0$ の2つの *real branch* に対応する *loop* を $\lambda$, $\mu$ とする。

［補題 3.3］（例えば、*Pham* [3]）

$\pi_1(E)$ は $\lambda$, $\mu$ によって生成され、唯一の基本関係式

$$\lambda\mu\lambda = \mu\lambda\mu$$

をもつ。

（注）今後、混乱のない限り、*loop* とそのホモトピー類とを同じ記号で表わす。

## §4. Fのモノドロミー

$C_a$が特異ファイバーであるような点 $a \in \mathbb{C}_0$ をとり，その回りの十分小さい向きづけられた円板を $D_a$、$\alpha = \partial D_a$ とする．明らかに

[補題 4.1]

$C_a$が $I_1$-型の特異ファイバー（唯一つの通常二重点をもつ有理曲線）であることと，$\varphi(\alpha)$ が $\lambda$ 又は $\mu$ にホモトープ（勿論基点も動かす）であることとは同値。

補題 3.2，4.1 及び小平の定理 [2, P.604] より，Fのモノドロミー $\tilde{\rho}$ を $\tilde{\rho}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とできる。補題 3.3 より

$$\tilde{\rho}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 又は \quad \begin{pmatrix} 2-d & (d-1)^2 \\ -1 & d \end{pmatrix} \quad (d は整数)$$

となる。今，$S = \begin{pmatrix} 1 & 1-d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$$S \cdot \tilde{\rho}(\lambda) \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{\rho}(\lambda) は不変)$$

$$S \begin{pmatrix} 2-d & (d-1)^2 \\ -1 & d \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

従って $\tilde{\rho}(\mu)$ は

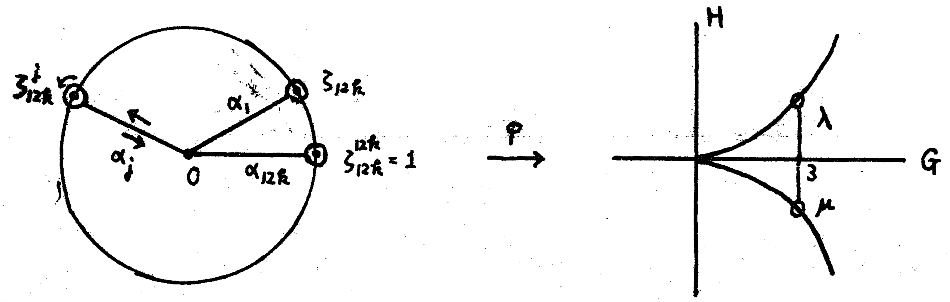
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 又は \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

一方 $\tilde{\rho}(\mu)$ は，F及び $\tilde{\rho}(\lambda)$ によって一通りに定まっている。そ

れを求める為に、$g_{4k}(u)=3$、$h_{6k}(u)=u^{6k}$ で定まる基本楕円曲面の大域的モノドロミーを実際に計算する。この曲面のモノドロミーは、後に定理を証明する際にも用いられる。

（注）この曲面に関しては、$C_\infty$ は非特異ファイバーである。従って $u=\infty$ に対応する表現行列は単位行列 1 となる。

まず $D_k(u)=27-27u^{12k}$ であるから、特異ファイバーは $u=\zeta_{12k}^j$ $(j=1,2,\cdots,12k)$ 上にある。ただし、$\zeta_{12k}=exp\left(\frac{2\pi i}{12k}\right)$。基点を $u=0$ として loop $\alpha_j$ $(j=1,2,\cdots,12k)$ を図のようにとる。




容易にわかるように

$$\varphi(\alpha_{2m})=\lambda\ ,\ \varphi(\alpha_{2m-1})=\mu\ ,\ m=1,2,\cdots,6k\ .$$

今 $\tilde{\rho}(\mu)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とすると

$$\tilde{\rho}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{12k})=\begin{pmatrix}1&12k\\0&1\end{pmatrix}.$$

一方、上の注を考慮して

$$\rho(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{12k})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

でなくてはならない。従って、$\tilde{\rho}(\mu)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$。以上の結果をまとめると

〔補題 4.2〕

$\tilde{\rho}(\lambda)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とすると、$\tilde{\rho}(\mu)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ 。

〔補題 4.3〕

$g_{4k}(u)=3$, $h_{6k}(u)=u^{6k}$ のとき、$B_k(\tau,\sigma)$ の大域的モノドロミーは

$$\rho(\alpha_{2m})=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad \rho(\alpha_{2m-1})=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

で定まる。更に、$\rho(\pi_1(\Delta',0))=\rho(\pi_1(\Delta'',0))=SL(2,\mathbb{Z})$。

同様にして、他の $B_k(\tau,\sigma)$ に対しても、その大域的モノドロミーがいくつか決定できるが、ここでは一切省略する。

§5、ある種類の $B_k(\tau,\sigma)$ の大域的モノドロミー

この節では次の定理を証明する。（証明略）

〔定理〕

$D_k(u)=0$, $\tilde{D}_k(u_1)=0$ の根が全て単根であるとき、基点及び loop を適当にとると、その表現は $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ の何れかであるようにできる。

この定理の証明に於いて用いる二、三の簡単な事柄について触れておく。まず、$\Delta$ に適当な座標変換を施すことにより、無限遠点上には特異ファイバーがないようにできる。次に、

§3.に於いて定義した写像$\varphi$は$C_0$上でなくても（例えば$C_1$上でも）考えることができ、今迄の議論と全く同じようにしてモノドロミーを求めることができる。

なお、定理の条件がみたされているような$B_R(\tau,\sigma)$は、多項式で定義された形そのままで非特異曲面になっていることは、簡単な計算でわかる。

［参考文献］

[1] A. Kas, Deformations of elliptic surfaces (Dissertations, Stanford University, 1966)

[2] K. Kodaira, On compact analytic surfaces II, Ann. of Math. 77 (1963)

[3] F. Pham, Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau, Mémorial des Sc. Math. N°164 (1967)