

多値論理素子が細分的であるための条件

東北大 工学部 丸岡 章
東北大 通研 本多 波雄

§1. まえがき

n 入力-1出力多値論理素子の n 個の入力端子および1個の出力端子上加えられる信号の集合をそれぞれ $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$, U で表わす. ここで考える素子は, 写像 $\varphi: V^{(1)} \times \dots \times V^{(n)} \rightarrow U$ で表わされるすべての論理機能(以下構造という)をとることができる可変論理素子である. $|V^{(1)}| = 2^{(1)}, \dots, |V^{(n)}| = 2^{(n)}$, $|U| = \lambda$ である素子を $(2^{(1)}, \dots, 2^{(n)})_{\lambda}$ 素子または単に $(2^{(1)}, \dots, 2^{(n)})$ 素子と表わす($|S|$ は集合 S の大きさを表わす). $V^{(1)}$ 上のすべての変換からなる集合を $T^{(1)}$ で表わし, $T = T^{(1)} \times \dots \times T^{(n)}$ とおく. 恒等変換を e と表わす. $t \in T$ に対して, $\varphi = t\varphi$ ならば $t = e$ となるとき, φ を細分的という. さらに素子が少くともひとつの細分的構造をとりうるとき, その素子を細分的という. この報告は, 素子が細分的であることと可変論理回路との関連についてのべ, $(2^{(1)}, \dots, 2^{(n)})_{\lambda}$ 素子

が細分的であるための $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}$, λ に関する必要十分条件を
求めるものである。

§2. 可変論理回路との関連

集積回路の標準化の立場から、可変論理方式が提案されて
いる。ここで、可変論理回路とは、素子間の接続パターンと入
力端子への入力変数の割当ては固定されているが、その回路
を構成する素子の論理機能は可変である回路と考える。この
ような回路で所要の論理関数を実現しようとする可変論理方
式に関連して、次のような基本的問題が生じる。すなわち、
可変論理回路で実現可能なすべての関数の集合をうるための
、各素子の必要十分な可変範囲は何かという問題である。

回路を構成するひとつの素子に注目した場合、この問題の
必要十分な可変範囲は次のようになる。⁽¹⁾ Φ を注目する素子の
すべての構造からなる集合（すなわち、すべての写像： $V^{\times} \times \dots \times V^{(m)} \rightarrow U$ からなる集合）とする。 Φ に類別 Φ/θ が定義され
この類別が半順序集合となることが示される。上述のひとつ
の素子に注目したときの必要十分な可変範囲は、半順序集合
 Φ/θ の極大類の代表元からなる集合となる。

上述の問題を回路全体に注目して考察する。可変論理回路
は μ 個の素子から構成されているとじ、それらの素子に 1 が

ら μ までの番号をつける。一般性を失うことなく、1番から ν 番の素子に関して $N_0 = \emptyset$ であり、他の素子に関して $N_0 \neq \emptyset$ とする。ここで、 \emptyset は空集合を表わし、 $N_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$ は前段で他の素子の出力端子に接続されている入力端子の番号からなる集合とする。 Φ_{ξ} を ξ 番目の素子のすべての構造からなる集合とする。一般に、 ξ 番目の素子の可変範囲は、 Φ_{ξ} の部分集合 $\mathcal{P}_{\xi} \subseteq \Phi_{\xi}$ で表わされる。回路全体の可変範囲は、 $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\mu}$ で表わされる。こゝに、 $\mathcal{P}_1 \subseteq \Phi_1, \dots, \mathcal{P}_{\mu} \subseteq \Phi_{\mu}$ である。

定義1: 可変範囲が $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\nu} \times \mathcal{P}_{\nu+1} \times \dots \times \mathcal{P}_{\mu}$, $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\nu} \times \mathcal{P}'_{\nu+1} \times \dots \times \mathcal{P}'_{\mu}$ である回路が実現する出力論理関数の集合をそれぞれ \mathcal{F} , \mathcal{F}' とする。 $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\nu} \times \mathcal{P}'_{\nu+1} \times \dots \times \mathcal{P}'_{\mu} \subseteq \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\mu}$ なる任意の可変範囲 $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\nu} \times \mathcal{P}'_{\nu+1} \times \dots \times \mathcal{P}'_{\mu}$ に対して、 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ のとき、可変論理回路の構造の可変範囲 $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\mu}$ を臨界的という。

次の定理1は、 $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{\mu}$ をいずれも何れの素子に注目したとき実現可能なすべての出力論理関数の集合をうるための必要十分な可変範囲、すなわちそれぞれの素子の半順序集合 Φ/ψ の各極大類の代表元からなる集合とすると、 $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_{\mu}$ が臨界的となる十分条件を与えるものである。 $N = \{1, \dots, n\}$ とおく。 $N_0 \subsetneq N$ のときは、 $N = N_0 \cup \{j\}$, $\mathcal{P} = T^{(1)} \times \dots \times T^{(j)} \times \dots \times T^{(n)}$, $N_0 = N$ のときは、 $\mathcal{P} = T^{(1)} \times \dots \times T^{(n)}$ とおく。

定義2: $t \in \mathcal{C}$ に対して, $\varphi = t\psi$ ならば $t = e$ となる
とき, φ を細分的という. さらに, 素子が少くともひとつの
細分的構造をとりうるとき, その素子を細分的という.

定理1⁽²⁾: 可変論理回路を構成する各素子が, それぞれの
半順序集合 \mathcal{C} の各極大類から1個ずつえらんだ代表元から
なる集合に \mathcal{C} 可変であるとする. この可変論理回路を構
成する N_0 中なる各素子が, (i) 細分的であり,かつ (ii)

(ii) $\prod_{k \in N_0} \zeta^{(k)} < \zeta^{(2)}$ なる $\lambda \in N_0$ が存在するとき, その可変
範疇は臨界的である.

定義2における \mathcal{C} は, $N = N_0 \cup \{j\}$ のときと, $N = N_0$ の
ときで異なる. 次の定理は, 一般に $N = N_0$ とし細分的条
件を求めても一般性を失わないことを示す.

定理2: $N_0 = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ のとき, $(\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)})$ 素
子が細分的であるための必要十分条件は, $N_0 = \{1, \dots, j-1, j+1,$
 $\dots, n\}$ のとき, $(\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(j-1)}, \zeta^{(j+1)}, \dots, \zeta^{(n)})$ 素子が細分的に
あることである.

定理2より, 一般性を失うことなく $N = N_0$ と仮定して細分
的条件を求めよう. しかし, \mathcal{C} , 定義2の代わりに次の定義2'で
細分的の定義をして議論をすすめる.

定義2': $t \in T^{(1)} \times \dots \times T^{(n)}$ に対して, $\varphi = t\psi$ ならば $t = e$
なるとき, φ を細分的という. また, 素子が少くともひとつ

の細分的構造をとりうるとき, その素子を細分的という.

§3 $n=2$ の場合の細分的条件を求めるアルゴリズム

補題3: 任意の置換 $(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{smallmatrix})$ に対して, $(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ 素子が細分的であれば $(\eta^{(\xi_1)}, \dots, \eta^{(\xi_n)})$ 素子も細分的である.

$V^{(n)}$ 上のすべての置換からなる集合を $\Pi^{(n)}$ で表わし, $\Pi = \Pi^{(1)} \times \dots \times \Pi^{(n)}$ とおく. 次の定義3は定義2'と同値であることが証明される.

定義3: $\pi \in \Pi$ に対して, $\pi\varphi = \varphi$ ならば $\pi = e$ であるとき, φ を細分的という.

定義4: A の類別 A/e を, $a_1 \equiv a_2 (A/e) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ と定義する.

定義5: 与えられた写像 φ に対して, $V^{(n)}$ の類別 $V^{(n)}/\varphi$ を $v_1^{(1)} \equiv v_2^{(2)} (V^{(n)}/\varphi) \Leftrightarrow \forall v_1^{(1)}, \dots, v_{(n-1)}^{(n-1)}, v_{(n+1)}^{(n+1)}, \dots, v_n^{(n)}, \varphi(v_1^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_n^{(n)}) = \varphi(v_1^{(1)}, \dots, v_2^{(2)}, \dots, v_n^{(n)})$ と定義する.

定義6: h を定義域が2つの集合の直積を表わされている写像: $A^{(1)} \times A^{(2)} \rightarrow B$ とする. このとき, h より導びかれる写像 $\hat{h}: A^{(1)} \rightarrow \{A^{(2)} \rightarrow B\}$ を $\hat{h}(a^{(1)})(a^{(2)}) = h(a^{(1)}, a^{(2)})$ と定義する. ここで, $a^{(1)} \in A^{(1)}$, $a^{(2)} \in A^{(2)}$ である.

補題4: φ が細分的であれば, 任意の $\nu \in N_0$ に対して, $V^{(n)}/\varphi = V^{(n)}/e$ である.

以下, $n=2$ とし議論をすすめる. 次の定理 5, 6 は容易に $n>2$ の場合に拡張される. また以下の議論は $V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ をとりかえても全く同様に成立する.

定理 5: φ を $V^{(2)}/\varphi = V^{(2)}/e$ なる構造とする. φ が細分的であるための必要十分条件は, 任意の $\pi^{(1)} \in \Pi^{(1)} - \{e\}$ に対して, $\varphi' = (\pi^{(1)}, e)\varphi$ とおくと, $\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} \neq \{\hat{\varphi}'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ なることである.

(証明) 必要性 φ を細分的とし, $\pi^{(1)} (\neq e)$ に対して, $\varphi' = (\pi^{(1)}, e)\varphi$ とおくと, $\{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ と仮定する. このとき, 各 $v_{\nu}^{(2)} \in V^{(2)}$ に対して $\hat{\varphi}(v_{\nu}^{(2)}) = \hat{\varphi}'(v_{\xi_{\nu}}^{(2)})$ なる $v_{\xi_{\nu}}^{(2)} \in V^{(2)}$ が存在する. $V^{(2)} = \{v_1^{(2)}, \dots, v_{2^{(2)}}^{(2)}\}$, $\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} v_{\xi_1}^{(2)} & \dots & v_{\xi_{2^{(2)}}}^{(2)} \\ v_{\xi_1}^{(2)} & \dots & v_{\xi_{2^{(2)}}}^{(2)} \end{pmatrix}$ とおく. このとき, $\varphi = (e, \pi^{(2)})\varphi'$. したがって, $\varphi = (e, \pi^{(2)})\varphi' = (e, \pi^{(2)})(\pi^{(1)}, e)\varphi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)})\varphi$. ここに $\pi^{(1)} \neq e$ であるから, φ が細分的であることに矛盾する.

十分性 定理の条件を仮定する. $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)})\varphi = \varphi$ とする. $\pi^{(1)} \neq e$ ならば仮定より, $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)})\varphi = \varphi$ なる $\pi^{(2)}$ は存在しないから, $\pi^{(1)} = e$ となる. $V^{(2)}/\varphi = V^{(2)}/e$ より, $(e, \pi^{(2)})\varphi = \varphi$ なら $\pi^{(2)} = e$ となるから, 結局 $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}) = e$ となる. したがって, 定義より φ は細分的となる. (証明終)

定義 7: 写像 $h: A \rightarrow B$ に対して, $\text{tuple}(h) = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)})$

を次のように定義する。可なり、 $B = \{b_1, \dots, b_\mu\}$ とする
とき、 $\nu = 1, \dots, \mu$ に対し $\xi^{(\nu)} = |\{a \in A \mid h(a) = b_\nu\}|$ とす
る。

すべての写像 $V^m \rightarrow U$ からなる集合を H とし、その元を h と表
わす。

$$H_{(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\mu)})} = \{h \in H \mid \text{tuple}(h) = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\mu)})\}$$

とおく。さらに

$$H_{(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\mu)})}^\varphi = \{\hat{\varphi}(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} \cap H_{(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\mu)})}$$

とおく。ここで、 $|U| = \lambda$ 、 $|V^{(1)}| = z^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\lambda} \xi^{(\nu)}$ である。

$$|\{\text{tuple}(h) \mid h \in H\}| = \binom{z^{(1)} + \lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad |H_{(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(\mu)})}| = \frac{z^{(1)}!}{\xi^{(1)}! \dots \xi^{(\mu)}!}$$

となる。 $P = \binom{z^{(1)} + \lambda - 1}{\lambda - 1}$ とおき、 $\{\text{tuple}(h) \mid h \in H\} = \{\xi_1, \dots, \xi_P\}$ と表わす。ここで、 $\xi_1 = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(\mu)})$ 、 \dots 、 $\xi_P = (\xi_P^{(1)}, \dots, \xi_P^{(\mu)})$
である。与えられた φ に対して、一般性を失うことなく

$$\xi \in \{\xi_1, \dots, \xi_s\} \text{ なる tuple に対して, } H_\xi^\varphi \neq \emptyset$$

$$\xi \in \{\xi_{s+1}, \dots, \xi_P\} \text{ なる tuple に対して, } H_\xi^\varphi = \emptyset$$

とする。各 $\varphi \in \Phi$ 、 $\xi \in \{\text{tuple}(h) \mid h \in H\}$ に対して、写像
 $S_\xi^\varphi: \{0, 1\} \rightarrow \{|H_\xi^\varphi|, |H_\xi| - |H_\xi^\varphi|\}$ を

$$S_\xi^\varphi(0) = |H_\xi^\varphi|, \quad S_\xi^\varphi(1) = |H_\xi| - |H_\xi^\varphi|$$

と定義する。 $B = \{0, 1\}$ とおく。

定理6: φ を、 $(z^{(1)}, z^{(2)})$ 素子の部分構造とする。任意の

$(b^{(1)}, \dots, b^{(s)}) \in B^S$ および $0 \leq \xi \leq \sum_{\nu=s+1}^p |h_{L_\nu}|$ なる任意の整数 ξ に対して, $\gamma^{(2)'} = \sum_{\nu=1}^s \delta_{L_\nu}^\varphi(b^{(2)}) + \xi$ とおくと, $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)'})$ 素子は細分的である.

(証明) φ が細分的であるから, 補題4より $V^{(2)}/\varphi = V^{(2)}/e$. 構造 φ_0 を, $\{\hat{\varphi}_0(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ が次の (i) および (ii) の写像: $V^{(1)} \rightarrow U$ からなるような $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)'})$ 素子の構造のひとつとする.

(i) $\nu = 1, \dots, s$ に対して

$b^{(\nu)} = 0$ ならば, $H_{L_\nu}^\varphi$ に含まれるすべての写像

$b^{(\nu)} = 1$ ならば, $H_{L_\nu} - H_{L_\nu}^\varphi$ に含まれるすべての写像

(ii) $\{h \in H \mid \text{tuple}(h) \in \{L_{s+1}, \dots, L_p\}\}$ の中から勝手にえらばれた ξ 個の写像.

上述の (i) および (ii) の写像は全部で $\gamma^{(2)'}$ 個存在するから, 明らかに $V^{(2)}/\varphi_0 = V^{(2)}/e$ である. さらにこの構造 φ_0 は細分的である. なぜならば, φ_0 が細分的でないとするとき, 定理5より, $\pi^{(1)} (\neq e)$ が存在して $\varphi_0' = (\pi^{(1)}, e)\varphi_0$ とおくと $\{\hat{\varphi}_0(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}_0'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$ となる. このとき, φ_0 の構成の仕方より明らかのように, $\varphi_0' = (\pi^{(1)}, e)\varphi_0$ とおくと, $\{\hat{\varphi}_0(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\} = \{\hat{\varphi}_0'(v^{(2)}) \mid v^{(2)} \in V^{(2)}\}$. 定理5より, これは φ が細分的であることに矛盾する. (証明終)

系: $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)'})$ 素子が細分的となるための必要十分条件は

$(\zeta^{(1)}, \lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)})$ 素子が細分的となることである。[†]

定義 8[†]: $\beta(\zeta^{(1)})$ を, $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ 素子が細分的となるような最小の $\zeta^{(2)}$ の値と定義する.

定義 8 の β は次のアルゴリズム 47 で求めらる。そしてこのことを証明するのが本論文の目標である。

アルゴリズム 47[†]:

$$(1) \quad \zeta^{(1)} = 1, \quad \beta(1) = 0$$

$$(2) \quad \zeta^{(1)} = \zeta^{(1)} + 1$$

$$(3) \quad \beta(\zeta^{(1)}) = \min \{ \nu \mid \zeta^{(1)} \leq \lambda^{\nu} - \beta(\nu) \}$$

(2) \wedge .

補題 8: $\beta(\mu)$ はアルゴリズム 47 で定義可能である。さらに $g(\mu) = \lambda^{\mu} - \beta(\mu)$ とおくと、 $g(\mu)$ は $\mu \geq 1$ で狭義の単調増加関数で、かつ

$$\beta(\mu) < g(\mu) = \lambda^{\mu} - \beta(\mu)$$

[†] $\zeta^{(1)} = 1, \zeta^{(2)} = \lambda$ のとき, $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ 素子は細分的である。このとき, $\lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)} = 0$ となり, 定理 6 の系より, $(1, 0)$ 素子も細分的となる。 $\lambda^{\zeta^{(1)}} - \zeta^{(2)} = 0$ かつ $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ 素子が細分的となるのは, $\zeta^{(1)} = 1$ のときのみであるので, 定義 8, アルゴリズム 47 との関連で, $\zeta^{(1)} = 1$ のときのみ $(\zeta^{(1)}, 0)$ 素子を形式的に考えて, この素子は細分的であると考える。

が成立する.

補題8より, 次の補題が成立する.

補題9: $\beta(\mu)$ はアルゴリズム47で定義されるとする.

$\mu \geq 1$ に対して, $\lambda^{\mu-1} \leq g(\mu) = \lambda^\mu - \beta(\mu)$ が成立する.

これらの補題より, 次の定理が証明される.

定理10: $\beta(\mu)$ はアルゴリズム47で定義されるとする. こ

のとき

$$\lceil \log_\lambda \mu \rceil \leq \beta(\mu) \leq \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1$$

が成立する. ただし, $\lceil x \rceil$ は x より小さくはない最小の整数を表わす.

(証明) $\mu = 1$ のとき, $\lceil \log_\lambda 1 \rceil = 0 \leq \beta(1) \leq \lceil \log_\lambda 1 \rceil + 1$.

$2 \leq \mu \leq \lambda$ のとき, アルゴリズム47より $\beta(\mu) = 1$ であるから

$$\lceil \log_\lambda \mu \rceil = 1 \leq \beta(\mu) \leq \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1.$$

$\lambda < \mu$ のとき, $g(1) = \lambda^1 - \beta(1) = \lambda < \mu$ であるから, アルゴリズム47および補題8より, $g(\nu-1) = \lambda^{\nu-1} - \beta(\nu-1) < \mu \leq \lambda^\nu - \beta(\nu) = g(\nu)$ を満足する ν が $\beta(\mu)$ の値である. ν_1 を, $\lambda^{\nu_1-1} < \mu \leq \lambda^{\nu_1}$ なる整数とすると, $\nu_1 \leq \beta(\mu) = \nu_1$. したがって, $\nu_1 - 1 < \log_\lambda \mu \leq \nu_1$ であるから, $\nu_1 = \lceil \log_\lambda \mu \rceil$. したがって, $\lceil \log_\lambda \mu \rceil \leq \beta(\mu)$. また補題9より, $\lambda^{\nu_1-2} \leq g(\nu_1-1)$, $\lambda^{\nu_1-1} \leq g(\nu_1)$ であるから, ν_2 を $\lambda^{\nu_2-2} < \mu \leq \lambda^{\nu_2-1}$ なる整数とすると, $\beta(\mu) = \nu_1 \leq \nu_2 = \lceil \log_\lambda \mu \rceil + 1$. (証明終)

系: $\beta(\mu)$ はアルゴリズム Γ で定義されるとすると,
 $\beta(\mu) \leq \mu$ が成立する.

次の補題は, 定理 6 の系および定義 8 より明らかである.

補題 11: $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ 素子が細分的であれば, $\eta^{(2)} \leq \lambda^{\eta^{(1)}} - \beta(\eta^{(1)})$
 が成立する. ここで, $\beta(\eta^{(1)})$ は定義 8 で定義されるとする.

次の定理 12 が証明されれば, アルゴリズム Γ は定義 8 の
 $\beta(\eta^{(1)})$ を与えるものであること (定理 13) を証明すること
 ができる. 定理 12 の証明は付録にまわす.

定義 9: φ を $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ 素子の構造とする. $\eta^{(2)} \leq \nu \leq \lambda^{\eta^{(1)}} - \eta^{(2)}$
 なる任意の ν に対して, $(b^{(1)}, \dots, b^{(s)}) \in B^S$ および $0 \leq \xi \leq \sum_{\mu=s+1}^P |h_{i\mu}|$
 なる整数 ξ が存在して $\nu = \sum_{\mu=1}^s \sum_{L_\mu}^{\varphi} (b^{(\mu)}) + \xi$ とするとき,
 φ を *expressive* という. 仮し, $i \in \{i_1, \dots, i_s\}$ に対し
 $h_{i_1}^{\varphi} = \phi$, $i \in \{i_{s+1}, \dots, i_p\}$ に対して $h_{i_2}^{\varphi} = \phi$ とする.

定理 12: $\beta(\eta^{(1)})$ はアルゴリズム Γ で定義されるものとする.
 このとき, $(\eta^{(1)}, \beta(\eta^{(1)}))$ 素子の任意の構造は *expressive*
 である.

定理 13: アルゴリズム Γ は定義 8 の $\beta(\eta^{(1)})$ を与える.

(証明) $\eta^{(1)}$ に関して帰納的に証明する.

$1 \leq \eta^{(1)} \leq \lambda$ に関して, 定理が成立するのは明らかである.

$\beta(\eta^{(1)})$, $\beta'(\eta^{(1)})$ をそれぞれ定義 8, アルゴリズム Γ で与え
 られるものとする. $\eta^{(1)} \leq \mu$ に対して, $\beta(\eta^{(1)}) = \beta'(\eta^{(1)})$ を

仮定し、 $\beta(\mu+1) = \beta'(\mu+1)$ を証明する。 $\beta'(\mu+1) = \min\{\mu+1 \leq \lambda^{\nu} - \beta'(\nu)\}$ となる。ここで、 $\beta'(\mu+1) = \varepsilon'$ とおくと $\mu+1 \leq \lambda^{\varepsilon'} - \beta'(\varepsilon')$ 。さらに定理10の系、および β はアルゴリズム4で定義可能(補題9)であることより、 $\beta'(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \mu+1$ 。したがって、帰納法の仮定、定理12、定理6 および補題3より、 $(\varepsilon', \mu+1)$ 素子および $(\mu+1, \varepsilon')$ 素子は細分的である。したがって、定義8より $\beta(\mu+1) \leq \varepsilon' = \beta'(\mu+1)$ 。しかるに $\beta(\mu+1) \neq \beta'(\mu+1)$ を仮定すると $\beta'(\mu+1)$ の最小性に矛盾する。なぜならば、 $(\beta(\mu+1), \mu+1)$ 素子が細分的であるから、補題11 および帰納法の仮定より、 $\beta(\mu+1) = \varepsilon$ とおくと、 $\mu+1 \leq \lambda^{\varepsilon} - \beta(\varepsilon) = \lambda^{\varepsilon} - \beta'(\varepsilon)$ となるからである。(証明終)

定理6, 12より、次の定理をうる。

定理14: $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ 素子が細分的となるための必要十分条件は、 $\beta(\eta^{(1)}) \leq \eta^{(2)} \leq \lambda^{\eta^{(1)}} - \beta(\eta^{(1)})$ なることである。

§4 一般の場合の細分的条件を求めるアルゴリズム4

$n \geq 3$ の場合も §3 とほぼ同様に論じられる。ここでは、その結果のみをのべる。以下記号を簡単にすするため、 $(n+1)$ 個の入力端子を有する素子について考えることにし、 $n \geq 2$ とする。

定義10: $\beta(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ を、 $(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}, \eta^{(n+1)})$ 素子が細分的

となるような最小の $\eta^{(n+1)}$ の値と定義する。

定義11: 集合 $\{\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)} \mid 2 \leq \eta^{(1)} \leq \dots \leq \eta^{(n)}\}$ に次のような2項関係を定義する. $\eta_1 = (\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_1^{(n)})$, $\eta_2 = (\eta_2^{(1)}, \dots, \eta_2^{(n)})$ とおく.

i) $n=1$ のとき, $\eta_1 \leq \eta_2 \Leftrightarrow \eta_1^{(1)} \leq \eta_2^{(1)}$

ii) $n \geq 2$ のとき,

$$\eta_1 \leq \eta_2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \eta_1^{(n)} \leq \eta_2^{(n)}, \text{ または} \\ \eta_1^{(n)} = \eta_2^{(n)} \text{ かつ } (\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_1^{(n-1)}) \leq (\eta_2^{(1)}, \dots, \eta_2^{(n-1)}) \end{array}$$

定義12: $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}$ を大きさの順にならべたものを $\eta^{(\xi_1)}$, $\eta^{(\xi_2)}, \dots, \eta^{(\xi_n)}$ とするとき (すなわち, $\eta^{(\xi_1)} \leq \dots \leq \eta^{(\xi_n)}$),

$$\langle \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)} \rangle = (\eta^{(\xi_1)}, \dots, \eta^{(\xi_n)})$$

と定義する.

次のアルゴリズム4は, $\beta(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)})$ および $(\eta^{(1)'}, \dots, \eta^{(n)'}) \leq (\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ なる任意の $(\eta^{(1)'}, \dots, \eta^{(n)'})$ に対して $\beta(\eta^{(1)'}, \dots, \eta^{(n)'})$ が求められていると仮定して, $\beta(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ を求めるものである. ただし, $2 \leq \eta^{(1)'} \leq \dots \leq \eta^{(n)'}$, $2 \leq \eta^{(1)} \leq \dots \leq \eta^{(n)}$ とする.

アルゴリズム415[†]: $2 \leq n$, $2 \leq \eta^{(1)} \leq \dots \leq \eta^{(n-1)}$ とする.

(1) $\eta^{(n-1)} \leq \eta^{(n)} \leq \lambda^{2^{(1)} \dots 2^{(n-1)}} - \beta(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)})$ なる $\eta^{(n)}$ に対

† アルゴリズム415において, $n=1$ のときは $\eta^{(n-1)} = 0$, $\beta(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)}) = 0$, $\lambda^{2^{(1)} \dots 2^{(n-1)}} = \lambda$ とおくと, このアルゴリズム4はアルゴリズム47に一致することに注意されたい.

して, $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) = 1$.

$$(2) \quad z^{(n)} = \lambda^{z^{(1)} \dots z^{(n-1)}} - \beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}).$$

$$(3) \quad z^{(n)} = z^{(n)} + 1.$$

$$(4) \quad \beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}, z^{(n)}) = \min \{ \nu \mid z^{(n)} \leq \lambda^{z^{(1)} \dots z^{(n-1)} \nu} - \beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}, \nu) \}.$$

これより, $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}, 1) = \beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)})$ とする.

(3) \wedge .

定理16: $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ をアルゴリズム415で求まるものとし,
 $2 \leq z^{(1)} \leq \dots \leq z^{(n)}$ とする. このとき

$$\left\lceil \frac{\log_{\lambda} z^{(n)}}{z^{(1)} \dots z^{(n-1)}} \right\rceil \leq \beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \leq \left\lceil \frac{\log_{\lambda} z^{(n)}}{z^{(1)} \dots z^{(n-1)}} \right\rceil + 1$$

が成立する.

定理17: アルゴリズム415は, 定義10の $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ を与える.

アルゴリズム415はすべての $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ の組合せに対して,
 $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ を与えるものではない. しかし, $2 \leq z^{(1)} \leq \dots \leq z^{(n)}$
 なる $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ に対しては, 定義10とアルゴリズム415は同じ
 値を与えるということを定理17は保証する. しかるに, 任意
 の $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ に対して, $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ のうち1なるものは除き
 残りを小さいものから順次ならべたものを $z^{(1)'}, \dots, z^{(m)'}$ とす
 ると $\beta(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) = \beta(z^{(1)'}, \dots, z^{(m)'})$ となる. ここに, $2 \leq z^{(1)'}$
 $\dots \leq z^{(m)'}$ である.

定理18: $(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}, \gamma^{(n+1)})$ 素子が細分的となるための必要十分条件は, $\beta(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}) \leq \gamma^{(n+1)} \leq \lambda^{2^{(1)} \dots 2^{(n)}} - \beta(\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)})$ なることである. ここで, β は定義10で定義されるものである.

§5 むすび

多値論理素子が細分的であることと可変論理回路との関連についてのべ, 細分的であるための必要十分条件を与えるアルゴリズムを導びいた.

謝辞 御討論いただいた東北大学木村正行教授, ならびに本邦, 木村両研究室の諸氏に深謝する.

文 献

- (1) 丸岡, 本邦; “可変論理回路の構造の類別” 信学論(C), 54-C, 7, P.549 (昭和46-7).
- (2) 丸岡, 本邦; “可変論理回路の構造の可変範囲” 信学論(C), 55-D, 1, P.1 (昭和47-01).

付 録

定理12の証明

補題19: $\beta(\gamma^{(1)})$ をアルゴリズム7で求めらるるものとするとき, $(\gamma^{(1)}, \beta(\gamma^{(1)}))$ 素子の $S = T$ なる任意の構造が expressive

であれば[†], $(\gamma^{(1)}, \beta(\gamma^{(1)}))$ 素子の $S = \mathbb{Z} - 1$ なる任意の構造が expressive となる.

$\{\text{tuple}(h) \mid h \in H\} = \{\ell_1, \dots, \ell_p\}$, $|h_{\ell_1}| \leq \dots \leq |h_{\ell_p}|$
 とし, $|h_{\ell_1}| = \ell_1, \dots, |h_{\ell_p}| = \ell_p$ とおく. すなわち, $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$ は $|h_{\ell}|$ の大きさの順に $\{\ell_1, \dots, \ell_p\}$ のサフィックスを
 つけかえたものである.

$$\{r_1, \dots, r_s\} = \{r \mid r \in \{1, \dots, p\}, h_{\ell_r}^\varphi \neq \emptyset\}$$

$$\{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, p\} - \{r_1, \dots, r_s\} = \{j \mid j \in \{1, \dots, p\}, h_{\ell_j}^\varphi = \emptyset\}$$

$$r_1 < \dots < r_s$$

とおく. ここで, $s+r=p$ である. このとき次の補題が成立する.

補題20: φ を, $h_{\ell}^\varphi \neq \emptyset$ なる任意の h_{ℓ}^φ に対して $|h_{\ell}^\varphi| = 1$
 となる $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$ 素子の構造とする (この場合, $S = \gamma^{(1)}$ となる).
 このとき

$(\ell_{j_1} + \dots + \ell_{j_r}) - \max\{\ell_{r_s} - \ell_{r_{s-1}}, \dots, \ell_{r_2} - \ell_{r_1}, \ell_{r_1}\} \geq 0$
 ならば, φ は expressive である.

補題21: ℓ_1, \dots, ℓ_p は, $1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_p$ なる整数, S は
 $1 \leq s \leq p$ なる整数とする. 大きさ s の集合 $\{r_1, \dots, r_s\} \subseteq \{1, \dots, p\}$ に整数

$$(\ell_{j_1} + \dots + \ell_{j_r}) - \max\{\ell_{r_s} - \ell_{r_{s-1}}, \dots, \ell_{r_2} - \ell_{r_1}, \ell_{r_1}\} \quad (1)$$

[†] S は, $h_{\ell}^\varphi \neq \emptyset$ となるような λ -tuple ℓ の個数である.

を対応させる。ここで、

$$s+r=p, \quad k_1 < \dots < k_s, \quad \{1, \dots, p\} - \{k_1, \dots, k_s\} = \{j_1, \dots, j_r\}$$

とする。このとき、 $\{r+1, r+2, \dots, p\}$ は (1) で与えられる対応する整数を最小にする大きさ s の $\{1, \dots, p\}$ の部分集合のひとつである。

補題 22: $\lambda = 2$ のとき $q^{(n)} \geq 8$, $\lambda \geq 3$ のとき $q^{(n)} \geq 2$ とする。 $|h_{i_1}| \leq \dots \leq |h_{i_p}|$ とし、 $|h_{i_1}| = l_1, \dots, |h_{i_p}| = l_p$, $r = p - \beta(q^{(n)})$ とおくとき

$$(l_1 + \dots + l_r) - \max\{l_p - l_{p-1}, \dots, l_{r+2} - l_{r+1}, l_{r+1}\} \geq 0$$

が成立する。さらに、 $\beta(q^{(n)})$ はアルゴリズム 47 で与えられるとする。

以上の準備のもとに定理 12 を証明する。

(定理 12 の証明) $\lambda = 2$, $1 \leq q^{(n)} \leq 7$ および $\lambda \geq 3$, $q^{(n)} = 1$ のときは、定理 12 の成立することを実際に確かめることができる。その他の場合については、補題 20, 21, 22 より、 $(q^{(n)}, \beta(q^{(n)}))$ 素子の $s = \beta(q^{(n)})$ なる任意の構造は expressive となる。さらにこのとき、補題 19 より $(q^{(n)}, \beta(q^{(n)}))$ 素子の任意の構造は expressive となる。 (証明終)