数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 51-68

集合演算による木オートマトンで受理される木の集合の特性化

東北大 通研　小島 政明
本多 波雄

§1. 序

有限オートマトンの拡張である木オートマトンは，多くの研究者によっていろいろな形で定義され，その性質が調べられている.[(1),(2),(3)] Thatcher と Wright は階層的アルファベットの上で木を定義し，その木を入力とする木オートマトンを定義している.[(3)]（一般に，木オートマトンの代数的性質は有限オートマトンのそれとよく似ているが，この種の木オートマトンの場合にその類似性が最も著しい.）特に，正規集合の概念を彼らの定義した木の集合の上に拡張していることは興味深い.

本稿では，一般的アルファベットの上で木を定義し，その木を入力とする“有限指定木オートマトン”と呼ぶ木オートマトンを定義する.（この木オートマタは著者がさきに定義した文脈規定形木オートマタの部分クラスである.[(5)]）さらに,

2重名前付木と呼ぶある種の木を定義し，その集合の上に"和"，"木連接"および"木スター"と呼ぶ演算を定義する．そして，既約有限指定木オートマタによって受理される木の集合のクラスと，2重名前付木の集合のクラスですべての有限集合を含み，和，木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスのプロジェクションとが一致することを示す．ここに，プロジェクションとは木の名前のつけかえを指定する写像である．

§2.　有限指定木オートマトン

この節では，一般の有限アルファベットの上で木を定義し，その木を入力とする有限指定木オートマトンを定義する．

(定義)[2]　Δを有限アルファベットとする．Δの上の木とは写像$t: N \to \Delta$である．ここに，Nは次の2つの条件を満たすI^*の有限部分集合であり，Iは非負整数の集合である．

1. $n \in N$ かつ $n = n_1 n_2$ ならば $n_1 \in N$，ここに $n, n_1, n_2 \in I^*$
2. $nj \in N$ かつ $i \leq j$ ならば $ni \in N$，ここに $n \in I^*$，$i, j \in I$

Δの上の木の集合をT_Δで表わし，T_Δの部分集合のクラスを$\mathcal{T}_\Delta$で表わす．

（定義）　$t: N \to \Delta$ を Δ の上の木とする．N の要素 n を節といい，$t(n)$ を節 n の名前という．$n0 \in N$ のとき，節 n を非終端節といい，$n0 \notin N$ のとき，節 n を終端節という．また，$t(\lambda)$ を木 t のトップ名前といい，n が終端節のとき，$t(n)$ を木 t のボトム名前という．さらに，終端節 $n = i_1 i_2 \cdots i_k$ について $\{i_1 \cdots i_j \mid 0 \leq j \leq k\}$ をパスといい，$\mathrm{path}(n)$ とかく．（λ は長さ零のストリングである．）

（定義）　Δ の上の木 $t: N \to \Delta$ の終端節を $n_1, n_2, \cdots, n_k$ とする．クロスカットセットとは次の条件を満たす節の集合 C である．

　すべての j（$1 \leq j \leq k$）について，$C \cap \mathrm{path}(n_j)$ は唯一個の節より成る．

（定義）　$t: N \to \Delta$ を Δ の上の木とする．節 $n = i_1 \cdots i_r$，$m = j_1 \cdots j_s$ について

1．ある k が存在して $i_1 = j_1, \cdots, i_{k-1} = j_{k-1}$，$i_k < j_k$

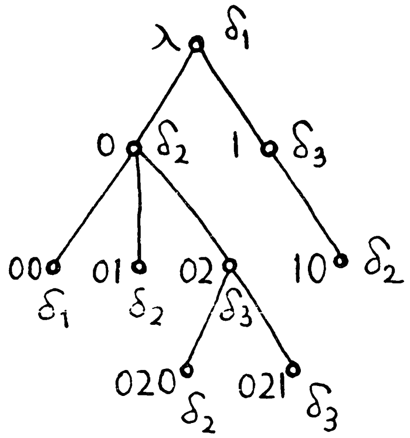
または

2．$i_1 = j_1, \cdots, i_r = j_r$ かつ $r < s$

のとき，n は m より小さいといい，$n < m$ とかく．

以下の議論において，節の集合を $\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ とかいたとき，特にことわらない限り，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ とする．

これらの定義で述べた概念の例を図1. に示す.



非終端節：λ, 0, 02, 1

終端節：00, 01, 020, 021, 10

パスの例：path(020) ＝{λ, 0, 02, 020}

クロスカットセットの例：

C＝{00, 01, 02, 1}

節の大小：λ＜0＜00＜‥＜10

$\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

$N = \{\lambda, 0, 00, 01, 02, 020, 021, 1, 10\}$

図1. 木 t：N→Δ　$(t(\lambda)=\delta_1, t(0)=\delta_2, \cdots, t(10)=\delta_2)$

次に，ここで定義した木を入力とする有限指定木オートマトンを定義する.

（定義）　有限指定木オートマトンは4項系列 $M=\langle \Delta, P, f, P_F \rangle$ である．ここに，Δは有限アルファベット，Pは状態の有限集合，P_F はPの部分集合で最終状態の集合，f はΔから $P^* \times P$ の有限部分集合のクラスへの写像で，Δの各要素δについて $f(\delta)$ をδに関する状態推移関係という.

このオートマトンはΔの上の木を入力とするオートマトンであり，Δの各要素δについて $f(\delta)$ が $P^* \times P$ の有限部分集合であるから，有限指定木オートマトンという名前を与えた.

以下本稿で木オートマトンというのは有限指定木オートマトンのことである．なお，このオートマトンは一般に非決定性である．

次に，このオートマトンの動作を定義する．

（定義）　$M=\langle \Delta, P, f, P_F \rangle$ を木オートマトン，$t: N \rightarrow \Delta$ を Δ の上の木とする．

1. $C=\{n_1, \cdots, n_k\}$ を t のクロスカットセットとし，

$$U_C=\{n \in N \mid \exists m \in I^*-\{\lambda\},\ nm \in C\}$$

$$L_C=\{n' \in N \mid \exists m' \in I^*,\ n' \in C\{m'\}\}$$

とする．（図1.の t と C については，$U_C=\{\lambda, 0\}$，$L_C=\{00, 01, 02, 020, 021, 1, 10\}$ である．）L_C の各要素に P の要素が割り当てられ，U_C の各要素に P の要素が割り当てられていない状況をコンフィギュレーションという．

2. $n \in N$ について，$\{n0, \cdots, nj\} \subset N$ かつ $n(j+1) \notin N$ のとき，$\{n0, \cdots, nj\}$ を節 n のサクセサーといい，$S(n)$ で表わす．いま，$C=\{n_1, \cdots, n_k\}$ をクロスカットセットとするコンフィギュレーションにおいて n_i，$1 \leq i \leq k$，に割り当てられている P の要素を p_i とする．このコンフィギュレーションを a とする．a において，ある節 n について $S(n) \cap C = S(n) = \{n_i, \cdots, n_{i+j}\}$ であり，$t(n)=\delta$ について $f(\delta) \ni (p_i \cdots p_{i+j},\ p)$ であるとき，M はコン

フィギュレーション a から次に示すコンフィギュレーション b に推移することができる．ここに，b はクロスカットセットとして $C'=\{n_1, \cdots, n_{i-1}, n, n_{i+j+1}, \cdots, n_k\}$ をもち，n には p が割り当てられ，n 以外の $L_{C'}$ の各要素には a において割り当てられていた P の要素が割り当てられていて，$U_{C'}$ の各要素には P の要素が割り当てられていないコンフィギュレーションである．a から b への推移を $a \vdash_M b$ とかき，$\vdash_M$ の反射推移閉包を $\vdash_M^*$ で表わす．

3．t の終端節の集合を $C_0=\{n_{01}, \cdots, n_{0k(0)}\}$ とし，各 n_{0i}, $1 \leqq i \leqq k(0)$, について $t(n_{0i})=\delta_{0i}$ とする．$f(\delta_{0i}) \ni (\lambda, p_{0i})$ であれば n_{0i} に p_{0i} を割り当てる．このようにして t のすべての終端節に状態を割り当てることを初期推移といい，初期推移によって得られるコンフィギュレーション a_0 を初期コンフィギュレーションという．このことを $t \Vdash_M a_0$ で表わす．

4．クロスカットセットとして $C_r=\{\lambda\}$ をもち，λ に P_F の要素が割り当てられているコンフィギュレーションを最終コンフィギュレーションという．

5．M に t を入力したとき，$t \Vdash_M a_0 \vdash_M^* a_r$ であるならば t は M によって受理されるという．ここに，a_0 は初期コンフィギュレーション，a_r は最終コンフィギュレーションである．

（定義）　木オートマトンMによって受理される木の集合をA(M)で表わす．木の集合Tがある木オートマトンMについてT＝A(M)となるとき，Tを木オートマトンによって受理可能であるという．木オートマトンによって受理可能なT_Δの部分集合のクラスを$\mathcal{A}_\Delta$で表わす．

以下本稿で受理可能というのは木オートマトンによって受理可能のことである．

次に，木オートマトンの既約形を定義する．

（定義）　木オートマトン$M=\langle \Delta, P, f, P_F \rangle$は，各$p \in P$についてある$t: N \to \Delta$が存在して，初期推移が可能で，初期コンフィギュレーションからλにpが割り当てられているコンフィギュレーションにいたる推移の系列が存在するとき，ボトム既約であるといわれる．

（定義）　木オートマトン$M=\langle \Delta, P, f, P_F \rangle$は，各$p \in P$についてある$t: N \to \Delta$，$x_1, x_2 \in P^*$が存在して，$t$の終端節の集合に$x_1 p x_2$が割り当てられているコンフィギュレーションから最終コンフィギュレーションにいたる推移の系列が存在するとき，トップ既約であるといわれる．

〔命題1〕　かってな木オートマトンMから$A(M)=A(M_1)$であるようなボトム既約木オートマトンM_1を効果的に構成することができる．（証明略）

〔命題2〕　かってなボトム既約木オートマトンM_1から$A(M_1)=A(M_2)$であるようなボトム既約かつトップ既約である木オートマトンM_2を効果的に構成することができる.（証明略）

（定義）　木オートマトンMがボトム既約かつトップ既約であるとき，Mを既約であるという.

命題1，2により，以下の議論において木オートマトンというときは，特にことわらない限り，既約木オートマトンをさすことにして一般性を失わない.

次に，プロジェクションと呼ぶ写像を定義する.

（定義）(2)　Δ_1，Δ_2 をアルファベットとする．写像$\tau:\Delta_1\to\Delta_2$を次に示す方法で拡張した写像$\bar{\tau}:T_{\Delta_1}\to T_{\Delta_2}$をプロジェクションという.

$t: N\to\Delta_1$のとき，$\bar{\tau}(t): N\to\Delta_2$は $\bar{\tau}(t)(n)=\tau(t(n))$で定義される$\Delta_2$の上の木である.

また，$T\subset T_{\Delta_1}$ のとき，$\bar{\tau}(T)=\{\bar{\tau}(t)\mid t\in T\}$を$\bar{\tau}$によるTのプロジェクションという.

〔命題3〕　木の集合Tが受理可能であるとき，Tのプロジェクションもまた受理可能である.（証明略）

§3.　2重名前付木とその集合の上の演算

Σを有限アルファベット，Qを可付番無限アルファベットとし，Σの要素をσ，Qの要素をqなどで表わす．

（定義）　$Q\times\Sigma$の上の2重名前付木は写像$t: N \to Q\times\Sigma$である．ここに，Nは§2.の木の定義に用いられたNと同様の集合である．

$Q\times\Sigma$の上の2重名前付木の集合を$T_{Q\times\Sigma}$で表わし，$T_{Q\times\Sigma}$の部分集合のクラスを$\mathcal{T}_{Q\times\Sigma}$で表わす．

次に，$\mathcal{T}_{Q\times\Sigma}$の上に3つの演算を定義する．

（定義）　$T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{Q\times\Sigma}$とする．

1. 和　$T_1 \cup T_2$　これは通常の意味の和集合の演算である．
2. 木連接　$T_1 \circ T_2$　これは次のように定義される．

$t: N \to Q\times\Sigma \in T_1 \circ T_2$

$\leftrightarrow$ $\exists t_1: N_1 \to Q\times\Sigma \in T_1$，$t_1$の終端節の集合を$\{n_1, \cdots, n_k\}$とし，$t_1(n_i) = (q_i, \sigma_i)$，$1 \leqq i \leqq k$，とすると，$n_1, \cdots, n_k$のうち$n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}$；$m \geqq 1$，について$\exists t_{2j_1}: N_{2j_1} \to Q\times\Sigma \in T_2$，$\cdots$，$\exists t_{2j_m}: N_{2j_m} \to Q\times\Sigma \in T_2$，$t_{2j_i}(\lambda) = (q_{j_i}, \sigma_{j_i})$，$1 \leqq i \leqq m$，でありかつ$n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}$以外の$\{n_1, \cdots, n_k\}$の各要素$n_i$については$t_{2i}(\lambda) = (q_i, \sigma_i)$であるような$t_{2i}$が$T_2$の中には存在しない．この$t_1$，$t_{2j_1}, \cdots, t_{2j_m}$について

$N = (N_1 - \{n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}\}) \cup n_{j_1} N2_{j_1} \cup \cdots \cup n_{j_m} N2_{j_m}$
であり
$n \in N_1 - \{n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}\}$ のとき $t(n) = t_1(n)$
$n \in N2_{j_i}$, $1 \leq i \leq m$, のとき $t(n_{j_i} n) = t2_{j_i}(n)$
である.

すなわち, $T_1 \circ T_2$ は, T_1 に属する木でボトム名前の中に少くとも1個は T_2 に属する木のトップ名前であるものが存在するような木について, ボトム名前が T_2 に属する木のトップ名前であるすべての終端節にそのボトム名前に等しいトップ名前をもつ T_2 に属する木をつけ加えて得られる木の集合である.

3. 木スター　$T_1^{\circledast}$　これを定義するために, まず, 選択的木連接　$T_1 \circledcirc T_2$　を次のように定義する.

$t: N \to Q \times \Sigma \in T_1 \circledcirc T_2$
$\Leftrightarrow \exists t_1 : N_1 \to Q \times \Sigma \in T_1$, t_1 の終端節の集合を $\{n_1, \cdots, n_k\}$ とし, $t_1(n_i) = (q_i, \sigma_i)$, $1 \leq i \leq k$, とすると, $n_1, \cdots, n_k$ のうち $n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}$, $m \geq 0$, について
$\exists t2_{j_1} : N2_{j_1} \to Q \times \Sigma \in T_2, \cdots, \exists t2_{j_m} : N2_{j_m} \to Q \times \Sigma \in T_2$,
$t2_{j_i}(\lambda) = (q_{j_i}, \sigma_{j_i})$, $1 \leq i \leq m$, である. この t_1, $t2_{j_1}, \cdots, t2_{j_m}$ について
$N = (N_1 - \{n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}\}) \cup n_{j_1} N2_{j_1} \cup \cdots \cup n_{j_m} N2_{j_m}$
であり

$n \in N_1 - \{n_{j_1}, \cdots, n_{j_m}\}$ のとき $t(n) = t_1(n)$

$n \in N_{2j_i}$, $1 \leqq i \leqq m$, のとき $t(n_{j_i} n) = t_{2j_i}(n)$

である.

すなわち, $T_1 \circledcirc T_2$ は, T_1 に属する木のいくつかの終端節にそのボトム名前に等しいトップ名前をもつ T_2 に属する木をつけ加えて得られる木の集合である.

この選択的木連接について,

$$T_1^{\,1} = T_1, \quad T_1^{\,i} = T_1^{\,i-1} \circledcirc T_1 \quad (i \geqq 2)$$

と定義する. この定義を用いて木スターを

$$T_1^{\circledast} = \bigcup_{i \geqq 1} T_1^{\,i}$$

と定義する.

木連接および選択的木連接の例を図2. に示す.

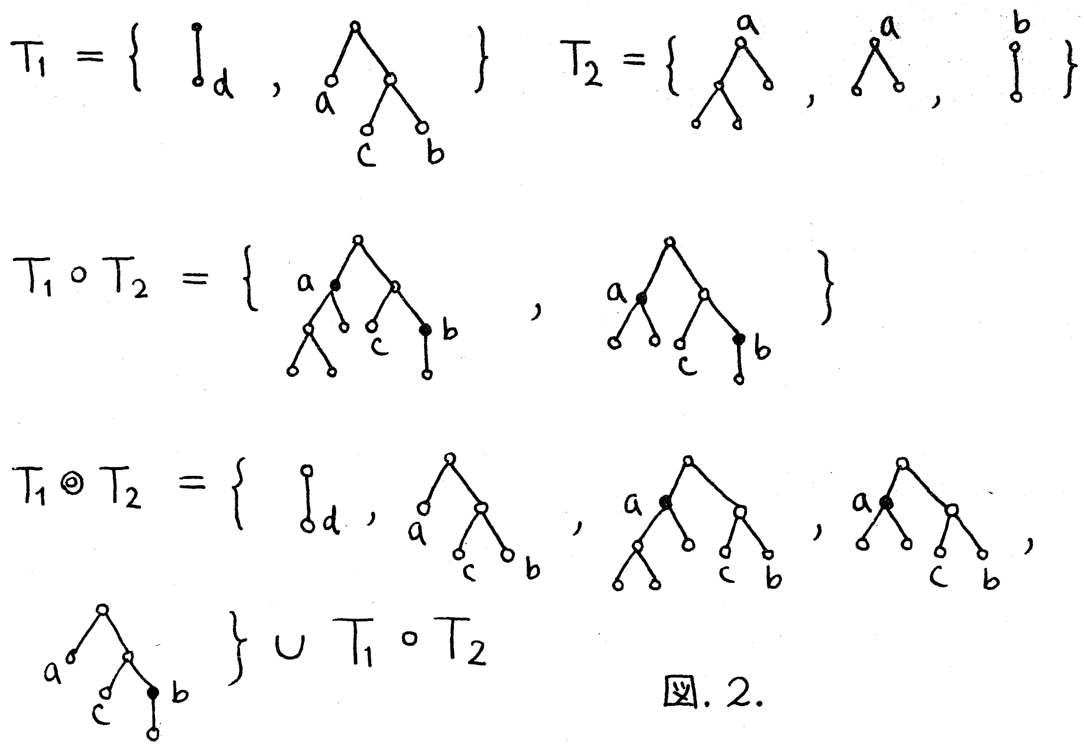


図. 2.

（定義）　$\mathcal{T}_{Q\times\Sigma}$ の部分クラスで，すべての有限集合を含み，和，木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスを $\mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ で表わす．

帰納法を用いて次の命題を示すことができる．

〔命題4〕　かってな $T_1 \in \mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ について，Q のある有限部分集合 Q_1 が存在して，$T_1 \in \mathcal{T}_{Q_1\times\Sigma}$ である．

この命題によって，$\mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ に属する集合を通常の意味の木の集合と考えてよいことがわかる．

§4.　$\mathcal{A}_\Sigma$ の特性化

この節では，§3において定義した $\mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ を用いて $\mathcal{A}_\Sigma$（木オートマトンによって受理可能な T_Σ の部分集合のクラス）の特性化を行う．

〔補題5〕　$T_1 \in \mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ が有限集合であるとき，T_1 は受理可能である．

（証明）　明らかである．

〔補題6〕　$T_1, T_2 \in \mathcal{C}_{Q\times\Sigma}$ が受理可能のとき

1. $T_1 \cup T_2$　，　2. $T_1 \circ T_2$　，　3. $T_1^{\circledast}$

はそれぞれ受理可能である．

（証明）　$T_1 = A(M_1)$，$M_1 = \langle Q_1\times\Sigma,\ P_1,\ f_1,\ P_{F_1}\rangle$
$T_2 = A(M_2)$，$M_2 = \langle Q_2\times\Sigma,\ P_2,\ f_2,\ P_{F_2}\rangle$ とする．

一般性を失うことなく $P_1 \cap P_2 = \phi$ と仮定してよい.

1. $M_3 = \langle \Delta_3, P_3, f_3, P_{F_3} \rangle$ を次のようにつくる.
   $\Delta_3 = (Q_1 \times \Sigma) \cup (Q_2 \times \Sigma)$, $P_3 = P_1 \cup P_2$, 各 $\delta \in \Delta_3$ について $f_3(\delta) = f_1(\delta) \cup f_2(\delta)$, $P_{F_3} = P_{F_1} \cup P_{F_2}$

M_3 のつくり方から $A(M_3) = T_1 \cup T_2$ である.

2. $M_4 = \langle \Delta_4, P_4, f_4, P_{F_4} \rangle$ を次のようにつくる.
   $\Delta_4 = (Q_1 \times \Sigma) \cup (Q_2 \times \Sigma)$, $P_4 = P_1 \cup P_1' \cup P_2$ (ここに, $P_1' = \{ p_1' \mid p_1 \in P_1 \}$ であり, $P_1' \cap P_1 = \phi$ とする.), $P_{F_4} = P'_{F_1}$, 各 $\delta \in Q_2 \times \Sigma$ について $f_4(\delta) \supset f_2(\delta)$ とする. 各 $\delta \in Q_1 \times \Sigma$ について, $f_1(\delta) \ni (x, p_1)$, $x \neq \lambda$ のとき, すべての可能な (x'', p_1'') (ここに, x'' は x の中のいくつかの要素を対応する P_1' の要素でおきかえて得られるストリングであり, p_1'' は x'' が x に等しいとき p_1 に等しく, x'' が x に等しくないときは p_1' に等しい) について $f_4(\delta) \ni (x'', p_1'')$ とする. さらに,
   $\Delta_1 = \{ \delta \in Q_1 \times \Sigma \mid \exists p_1 \in P_1,\ f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1) \}$
   $\Delta_2 = \{ \delta \in Q_2 \times \Sigma \mid \exists y \in P_2^*,\ \exists p_{F_2} \in P_{F_2},\ f_2(\delta) \ni (y, p_{F_2}) \}$
   と定義する. (Δ_1 は $Q_1 \times \Sigma$ のうちで T_1 の木のボトム名前になり得る要素の集合であり, Δ_2 は $Q_2 \times \Sigma$ のうちで T_2 の木のトップ名前になり得る要素の集合である.) 各 $\delta \in \Delta_1 - \Delta_2$ について, $f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$ のとき $f_4(\delta) \ni$

(λ, p_1) とする．各 $\delta \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ について，$f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$，$f_2(\delta) \ni (y, p_{F_2})$ のとき $f_4(\delta) \ni (y, p_1')$ とする．

M_1, M_2 が既約であることに注意すれば，木連接の定義と M_4 のつくり方から $A(M_4) = T_1 \circ T_2$ であることがわかる．

3．$M_5 = \langle \Delta_5, P_5, f_5, P_{F_5} \rangle$ を次のようにつくる．

$\Delta_5 = Q_1 \times \Sigma$，$P_5 = P_1$，$P_{F_5} = P_{F_1}$，各 $\delta \in Q_1 \times \Sigma$ について $f_5(\delta) \supset f_1(\delta)$ とし，さらに，$f_1(\delta) \ni (\lambda, p_1)$, (x, p_{F_1}) （ここに，$x \in P_1^*$, $p_{F_1} \in P_{F_1}$ ）のとき $f_5(\delta) \ni (x, p_1)$ とする．

M_5 のつくり方から $A(M_5) = T_1^{\circledast}$ である．　（証明終）

補題5，6を用いて帰納法で次の定理を示すことができる．

〔定理7〕　$\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ に属するかってな集合は受理可能である．

（定義）　$\pi(q, \sigma) = \sigma$ で指定される $Q \times \Sigma$ から Σ への写像を $T_{Q \times \Sigma}$ から T_Σ への写像に拡張したプロジェクションを $\bar{\pi}$ とする．さらに，$\bar{\pi}(\mathcal{C}_{Q \times \Sigma}) = \{ \bar{\pi}_1(T_1) \mid T_1 \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma} \} = \mathcal{C}_\Sigma$ と定義する．ここに，$T_1 \subset T_{Q_1 \times \Sigma}$（命題4）とし，$\bar{\pi}_1$ は $\bar{\pi}$ の定義域を $T_{Q_1 \times \Sigma}$ に制限したプロジェクションとする．

命題3および定理7より次の定理を得る．

〔定理8〕　$\mathcal{C}_\Sigma \subset \mathcal{A}_\Sigma$

次に，定理8の逆を示す．

（定義）　$M=\langle \Sigma, P, f, P_F \rangle$ を木オートマトンとする．一般性を失うことなく P は Q の有限部分集合とすることができるから，$P=\{q_1, \cdots, q_r\}=Q_1 \subset Q$ とする．各 $i \in \{1, \cdots, r\}$，$k \in \{0, 1, \cdots, r\}$，$S \subset \{1, \cdots, r\}$ について，$T_{P\times\Sigma}$ の部分集合 $T_{S,i}^{(k)}$ を次のように定義する．

$t: N \to P\times\Sigma \in T_{S,i}^{(k)}$

$\longleftrightarrow \exists t_1 : N \to \Sigma \in T_\Sigma$，$t_1$ の終端節の集合 $\{n_1, \cdots, n_\ell\}$ の各要素 n_h に q_{i_h}，$i_h \in S$，が割り当てられているコンフィギュレーションから，λ に q_i が割り当てられ $N-\{\lambda\}-\{n_1, \cdots, n_\ell\}$ の各要素には $\{q_1, \cdots, q_k\}$ の要素が割り当てられているコンフィギュレーションに $\vdash_M^*$ の意味で到達可能であり，各節に，このコンフィギュレーションにおいて割り当てられている状態と名前を対にして名前づけした２重名前付木が t である．

さらに，$t_1 \in T_\Sigma$ のすべての節に状態が割り当てられているコンフィギュレーション α をフルコンフィギュレーションといい，各節にこのフルコンフィギュレーションにおいて割り当てられている状態と名前を対にして名前づけした２重名前付木を t とする．M におけるフルコンフィギュレーションの集合から $T_{P\times\Sigma}$ への写像 τ_M を $\tau_M(\alpha)=t$ で定義する．

さらに，τ_M を用いて，$\mathcal{A}_\Sigma$ から $\mathcal{T}_{Q'\times\Sigma}$ への写像 μ を

$\mu(A(M)) = \{\tau_M(a_u) \mid \exists t \in T_\Sigma,\ t \Vdash_M a_0 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} a_u$, a_0は初期コンフィギュレーション, a_uは最終コンフィギュレーション$\}$で定義する.

次の補題は明らかに成り立つ.

〔補題9〕 $\mu(A(M)) \subset T_{Q_1 \times \Sigma}$ であり, $\pi_1[\mu(A(M))] = A(M)$ である.

〔補題10〕 $M = \langle \Sigma, P, f, P_F \rangle$ を木オートマトンとする. このとき, $\mu(A(M)) \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ である.

(証明) $P = \{q_1, \cdots, q_r\} = Q_1 \subset Q$ とする. 各 $i \in \{1, \cdots, r\}$, $k \in \{1, \cdots, r\}$, $S \subset \{1, \cdots, r\}$ について

$$T^{(k)}_{S,i} = T^{(k-1)}_{S,i} \cup T^{(k-1)}_{S\cup\{k\},i} \circ \left(T^{(k-1)}_{S\cup\{k\},k}\right)^{\circledast} \circ T^{(k-1)}_{S,k} \qquad ①$$

とかくことができる. (ここで, $S \ni i$ のときには, 各$\sigma \in \Sigma$について $T^{(k)}_{S,i} \ni t : \{\lambda\} \to Q_1 \times \Sigma$ ($t(\lambda) = (q_i, \sigma)$) であることに注意する.) さらに, 各 $i \in \{1, \cdots, r\}$, $S \subset \{1, \cdots, r\}$ について

$$T^{(0)}_{S,i} \text{ は有限集合である.} \qquad ②$$

よって, ①, ②より帰納法で, 各 $i \in \{1, \cdots, r\}$, $k \in \{0, 1, \cdots, r\}$, $S \subset \{1, \cdots, r\}$ について $T^{(k)}_{S,i} \in \mathcal{C}_{Q \times \Sigma}$ であることが示される.

さらに, $\mu(A(M)) = \bigcup_{q_i \in P_F} T^{(r)}_{S_0,i}$ (ここに, $S_0 = \{j \mid \exists \sigma \in \Sigma,\ f(\sigma) \ni (\lambda, q_j)\}$) であることに注意す

れば補題を得る．（証明終）

補題9，10より次の定理を得る．

〔定理 11〕　$\mathcal{A}_\Sigma \subset \mathcal{C}_\Sigma$

定理8および定理11から次の主要な定理を得る．

〔定理 12〕　T_Σの部分集合は，名前の第2要素にΣの要素をもつ2重名前付木の集合のクラスですべての有限集合を含み，和，木連接および木スターの演算で閉じている最小のクラスのπによるプロジェクションに属するとき，かつそのときに限り，木オートマトンによって受理可能である．ここに，πは2重名前の第2要素を改めて名前づけする写像である．

終りに，ご討論いただいた本多研究室ならびに東北大学工学部木村研究室の諸氏に深謝する．

参考文献

（1）W. S. Brainerd : "The Minimarization of Tree Automata", Inf. and Cont. 13, p. 484－491（1968）

（2）J. W. Thatcher : "Characterizing Derivation Trees of Context-Free Grammars through a Generalization of Finite Automata Theory", Journal of Com. and Sys. Science, 1, p. 317－322（1967）

(3) J. W. Thatcher and J. B. Wright : "Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision Problem of Second-Order Logic", Math. Sys. Theory, 2, p. 57-81 (1968)

(4) J. E. Hopcroft and J. D. Ullman : " Formal Languages and Their Relation to Automata", Addison-Wesley Pub. Company, London (1969)

(5) 小島・本多："木オートマトンの拡張による文脈規定形文法の導出木の特性化"，信学オートマ・インホ研資（1972 - 01)