数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 69-82

Indexed Grammar の木構造について
ー uvwxy 定理の拡張 ー

京大 理　林 健志

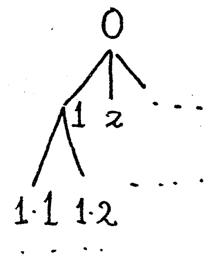
§1. 序

CF文法に対する uvwxy 定理の Stack Automaton に対する拡張は，既に Ogden [1968] によって得られている。能力的に Stack Automaton を含む Indexed Grammar に対する拡張を得た。この拡張定理を応用して，ある種の言語，例えば，$\{a^{n!} \mid n \geq 1\}$ や $\{(\#w)^{|w|} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ が Indexed Language でないことが証明出来る。拡張定理は Indexed Grammar の生成木の増加の様子を述べた形をしているので，まず生成木を formal に扱う必要がある。そのために，CF文法の生成木を記述するために，Brainerd [1969]，Takahashi [1970] らが採用した方法を基礎とした。

§2. 木構造の記述法　I.【基本的な定義】

[Def 2-1] J を自然数の集合とする。J^* を J によって生成された free monoid とし，2項演算を '・'，単位元を 0 で示す。

次の(i),(ii)を満たすJ^*の有限部分集合Dのことをtree domainという。



[J^*の図][図1]

(i) $p\cdot q\in D$ なら $p\in D$

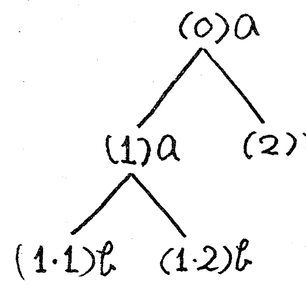
(ii) $p\cdot j\in D,\ 1\le i\le j$ なら $p\cdot i\in D$

Dの元を頂点(node)といい、pと$p\cdot i$がDの元なら$p\cdot i$をpの子(direct descendent)という。(i)より($D\neq\phi$ならば)$0\in D$である。頂点0をDの根(root)という。

[Def 2-2] Σをアルファベット(空でない記号の集合)とした時、Σ上のtreeとは写像$\gamma: D\to\Sigma$のことをいう。ただしDはtree domainである。$\gamma(p)$を頂点pの名称(label)という。γのdomain Dを$dom(\gamma)$で示す。T_ΣでΣ上のtree全体からなる集合を示す。以下写像γとそのgraphを同一視する。

[例1] $\Sigma=\{a,b\}$, $\gamma=\{(0,a),(1,a),(2,b),(1\cdot1,b),(1\cdot2,b)\}$

とすると、γはΣ上のtreeで、通常γは図2のように図示される。treeの頂点の縦の関係 $<\!\cdot$,と横の関係 $\prec$ を定義する。



[図2]

[Def 2-3] $p,q\in J^*$に対して、

$$p\le q \quad \text{iff} \quad (\exists r\in J^*)(q=p\cdot r)$$

$$p<\!\cdot\, q \quad \text{iff} \quad p\le q\ \wedge\ p\neq q$$

$$p\prec q \quad \text{iff} \quad (\exists r\in J^*)(\exists i\in J)(\exists j\in J)\begin{pmatrix} i<j, \\ r\cdot i\le p,\ r\cdot j\le q\end{pmatrix}$$

$p < q$ の時 q は p の子孫であるといい，$p \mathrel{\prec} q$ の時，q は p の右にあるという。

〔例2〕 $1 < 1\cdot 1$ ，$1\cdot 1 \mathrel{\prec} 1\cdot 2$ ，$1 \not< 2\cdot 1$

〔Def 2-4〕 $\gamma \in T_\Sigma$ に対して γ の先端(front) $\hat{\gamma}$ とは，

$$\hat{\gamma} \underset{def}{=} \{ (p, a) \in \gamma \mid \text{for any } q \in dom(\gamma),\ p \not< q \}$$

なる集合のことである。又根から先端の頂点へ到る道を考えたいことがある。すなわち，γ の要素の列

$$\langle (p_0, a_0), \cdots, (p_i, a_i), \cdots, (p_l, a_l) \rangle$$

が γ の鎖(chain)であるとは，

$$p_0 = 0,\quad p_i = p_{i-1} \cdot j_i,\ j_i \in J\ (i = 1, \cdots, l),\ (p_l, a_l) \in \hat{\gamma}$$

の時にいう。l のことを鎖の長さと呼ぶ。

Ⅱ.〖tree に関する種々の操作〗

名称が付いた Σ 上の tree γ に対しては，その subtree などが自然に考えられる。以下 tree に関する種々の operation を導入するが，名称は元の tree γ から自然に導びかれるものになっている。

〔Def 2-5〕 $\gamma \in T_\Sigma$ に対して，

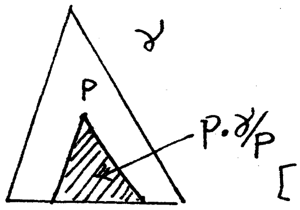
1) $\gamma/p \underset{def}{=} \{ (q, a) \mid (p\cdot q, a) \in \gamma \} \quad (p \in dom(\gamma))$

2) $p\cdot\gamma \underset{def}{=} \{ (p\cdot q, a) \mid (q, a) \in \gamma \} \quad (p \in J^*)$

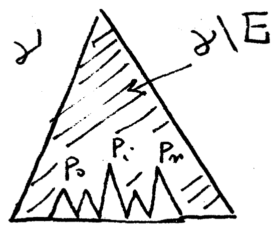
3) $E \subset dom(\gamma)$ に対して，

$$\gamma \backslash E \underset{def}{=} \gamma - \bigcup_{p \in E} p\cdot \gamma/p$$

常に　γ/p, $\gamma\backslash E \in \mathcal{T}_\Sigma$ である。[図3],[図4]参照



[図3]



$E=\{P_0,\cdots,P_n\}$
s.t. $P_i \, 3 \, P_{i+1}$
$(0\le i \le n-1)$の時

[図4]

[Def 2-6] 木による置換とは次の操作を言う。

$\gamma, \tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathcal{T}_\Sigma$, $P_i \in dom(\gamma)$ $(i=0,\cdots,n)$に対して，$P_i \, 3 \, P_{i+1}$ $(i=0,\cdots,n-1)$ かつ $\tau_i(0)=\gamma(P_i)$ $(i=0,\cdots,n)$が成立している時，$\mathcal{T}_\Sigma$の元

$$\gamma\begin{bmatrix} P_0, P_1, \cdots, P_n \\ \tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n \end{bmatrix} \underset{def}{=\!=} \gamma\backslash E \cup \bigcup_{i=0}^{n} P_i\cdot\tau_i$$

但し，$E=\{P_0,\cdots,P_n\}$

を木による置換によって得る。

[Def 2-7] treeの先端の名称を左から右にconcatenationをして出来るstringが必要になってくる。これを与えるyield function　$g: \mathcal{T}_\Sigma \to \Sigma^*$を帰納的に定義する。

i)　$g(\gamma)=\gamma(0)$　　if　$dom(\gamma)=\{0\}$

ii)　$g(\gamma)=g(\gamma/1)\cdots g(\gamma/j)$

if　$1,\cdots,j \in dom(\gamma)$, $j+1 \notin dom(\gamma)$

§3 Indexed Grammarの木構造

Indexed Grammarの基本的な定義，及び一般的な表示法に関しては，Aho[1968]に従った。

[Def 3-1] Indexed Grammar とは次のような5組,

$G=(N, T, F, P, S)$ のことである。

i) Nは空でない有限集合で, 非終端アルファベットと呼ばれ, その元を非終端記号(nonterminal)という。

ii) Tは空でない有限集合で, $N \cap T = \phi$ を満たし, 終端アルファベットと呼ばれ, その元を終端記号(terminal)という。

iii) Fは有限集合でその各要素は $N \times (N \cup T)^*$ の有限部分集合である。$f \in F$ を index といい, $(A, \chi) \in f$ を $A \rightarrow \chi$ と書いて index production in f という。

iv) Pは$N \times (NF^* \cup T)^*$ の有限部分集合である。

$(A, \alpha) \in P$ を $A \rightarrow \alpha$ と書いて production と呼ぶ。

v) SはNの1つの元で sentence symbol という。

以下, $N \cup T$をVと書き, $V_F = NF^* \cup T \cup \{\varepsilon\}$ とした時, $\mathcal{T}_{V_F}$で考える。(tree の名称の集合としてV_Fをとるわけである。)

[Def 3-2] Indexed Grammar (以下 IG と略す。)

$G=(N, T, F, P, S)$ が与えられた時, $\mathcal{T}_{V_F}$ 上の relation $\vdash_G$ を次のように定義する。$\gamma, \delta \in \mathcal{T}_{V_F}$ に対して, $\gamma \vdash_G \delta$

iff 1. (index expanding)

$\exists (p, A\xi) \in \hat{\gamma}$, $\exists A \longrightarrow X_1\eta_1 X_2\eta_2 \cdots X_k\eta_k \in P$ で

$\delta = \gamma \cup \bigcup_{j=1}^{k} \{(p \cdot j, X_j \mu_j)\}$ の時。ここで $\mu_j = \begin{cases} \eta_j \xi & \text{if } X_j \in N \\ \varepsilon & \text{if } X_j \in T \end{cases}$

ただし $k=0$ の時 (i.e $A \rightarrow \varepsilon$) は $\delta = \gamma \cup \{(p \cdot 1, \varepsilon)\}$

又は, 2. (index consuming)

$\exists (p, Af\xi) \in \hat{\gamma}$, $\exists A \to X_1X_2\cdots X_k \in f \in F$ で

$\delta = \gamma \cup \bigcup_{j=1}^{k} \{(p\cdot j, X_j\mu_j)\}$ の時, ここで $\mu_j = \begin{cases} \xi & \text{if } X_j \in N \\ \varepsilon & \text{if } X_j \in T \end{cases}$

ただし $k=0$ の時 (i.e. $A\to\varepsilon\in f$) は $\delta=\gamma\cup\{(p\cdot 1,\varepsilon)\}$

$\overset{*}{\vdash}_G$ で $\vdash_G$ の $\mathcal{T}_{V_F}$ 上の reflexive and transitive closure を示す。(注)

以上の定義, 及びこれからは特にことわらない限り次の symbolic convention に従っている。

(1) A, B, は N の元。(2) f は F の元。(3) η, ξ, μ は F^* の元。

(4) X は V の元。(5) ε は空語 (6) p, q, r は J^* の元。

$\mathcal{T}(G) \underset{def}{=} \{\gamma\in\mathcal{T}_{V_F} \mid \{(0,S)\} \overset{*}{\vdash}_G \gamma,\ g(\gamma)\in T^*\}$ を

G の<u>生成木 (derivation tree) の集</u>合という。又,

$L(G) \underset{def}{=} g(\mathcal{T}(G))$ を G で生成 (generate) された言語という。(この定義は Aho による L(G) の定義と一致している。)

$L\subset T^*$ に対して $L=L(G)$ なる IG : G が存在する時, L を indexed language と呼ぶ。

IG : G の木構造とは,

$\tilde{\mathcal{T}}(G) \underset{def}{=} \{\gamma\in\mathcal{T}_{V_F} \mid \gamma=\Lambda$, 又は $\{(0,A\eta)\}\overset{*}{\vdash}_G\gamma$, $\exists A\in N$, $\exists\eta\in F^*\}$

のことである。ここで Λ は empty tree $\Lambda:\phi\to V_F$ のことである。

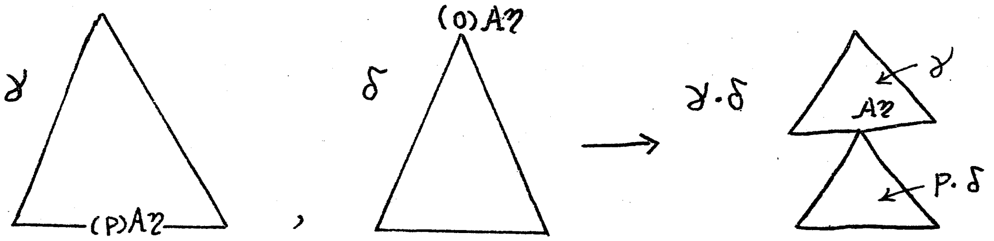
明らかに $\mathcal{T}(G)\subset\tilde{\mathcal{T}}(G)$ である。

(注) すなわち $\gamma \overset{*}{\vdash}_G \delta \iff \gamma=\delta$ or $\exists\gamma_0,\ldots,\gamma_n$ s.t. $\gamma_0=\gamma$, $\gamma_n=\delta$

$\gamma_i\vdash_G\gamma_{i+1}$ $(0\le i\le n-1)$

[Def 3-3] $\gamma, \delta \in \tilde{\mathcal{T}}(G)$ で, $g(\gamma) \in T^* A\eta T^*$ かつ, $\delta = \Lambda$, 又は $\delta(0) = A\eta$ の時, $\gamma \cdot \delta \in \tilde{\mathcal{T}}(G)$ を定義。

$$\gamma \cdot \delta = \begin{cases} \gamma & \text{if} \quad \delta = \Lambda \\ \gamma\left[{p \atop \delta}\right] & \text{if} \quad \delta(0) = A\eta, \text{ ここで } (p, A\eta) \in \hat{\gamma} \end{cases}$$



[図5]

§4. 生成木増加定理

今まで, 述べて来た tree の記述法を使えば, 定理の証明, 及び記述に必要な, 色々の概念, 関数を formal に定義できる。証明は非常に長いのでここでは与えないが, 基本的な idea を説明するために必要な定義を2, 3あげておく。詳細に関しては筆者の論文（林[1972]）を参照されたい。

[Def 4-1] $\gamma \in \tilde{\mathcal{T}}(G)$, $p \in dom(\gamma)$ に対して,
$\pi_{1\gamma}: dom(\gamma) \to V \cup \{\varepsilon\}$, $\pi_{2\gamma}: dom(\gamma) \to F^*$, $\tilde{\pi}_{2\gamma}: dom(\gamma) \to F \cup \{\varepsilon\}$
を次のように定義する。

$$\left.\begin{aligned} \pi_{1\gamma}(p) &= X \\ \pi_{2\gamma}(p) &= \eta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{if} \quad \gamma(p) = X\eta \\ &(\text{ただし } \gamma(p) = \varepsilon \text{ の時は, } \pi_{1\gamma}(p) = \pi_{2\gamma}(p) = \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\tilde{\pi}_{2\gamma}(p) = \begin{cases} f & \text{if} \quad \pi_{2\gamma}(p) = f\eta \\ \varepsilon & \text{if} \quad \pi_{2\gamma}(p) = \varepsilon \end{cases}$$

$\pi_{2\gamma}(p)$の左端の記号をとりだす関数である。これらの関数において添字γが明らかな時は省略する。

CF文法ではtreeの名称はVの元だけであったので，名称の等しい2つの頂点P_0, P_1を捜すことでuvwxy定理(Bar-Hillel et al [1961])は求められた。しかしIGに対しては，名称にindex部($\pi_2(p)$)が存在するので事情はかなり複雑である。ただ$\vdash_G$の定義からも解るようにIndex部の消費は左端から1個ずつであり pushdown記憶機構になっているこの点を考慮して次の定義をする。

[Def 4-2] F^*上の relation $\trianglelefteq$ ($\subset f \leq$ on J^*)を定義:

$\eta, \mu \in F^*$に対して $\begin{cases} \eta \trianglelefteq \mu & \text{iff } (\exists \xi \in F^*)(\mu = \xi\eta) \\ \eta \triangleleft \mu & \text{iff } \eta \trianglelefteq \mu \wedge \eta \neq \mu \end{cases}$

[Def 4-3] $\gamma \in \tilde{\mathcal{J}}(G)$に対して，

$e_\gamma : dom(\gamma) \longrightarrow 2^{dom(\gamma)}$ <u>end of parse function</u>

を次のように定義する。

$$e_\gamma(p) \underset{def}{=} \left\{ q \in dom(\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} p \leq q,\ \pi_2(p) = \pi_2(q), \\ \pi_2(p) \trianglelefteq \pi_2(r) \ \text{for } p \leq {}^\forall r \leq q, \\ \pi_2(q \cdot j) \triangleleft \pi_2(p) \ \text{for any } j \in J \ \text{s.t.} \ q \cdot j \in dom(\gamma) \end{array} \right\}$$

直観的には，pのindex部の上に新たなindexが積上げられ，消費されていって，次には$\pi_2(p)$が始めて消費されるその直

前の頂点 q の集合が $e_\gamma(p)$ である。(もちろんそのような q が存在しない時は $e_\gamma(p)=\phi$ である。) p から $e_\gamma(p)$ までを p の scope と呼ぶ。すなわち $scope_\gamma(p)=\{x\in dom(\gamma)\mid p\leq x\wedge(\forall q\in e_\gamma(p))(x\not\geq q)\}$ のことである。

定理の証明のために次の関数は本質的である。

[Def 4-4] $n_\gamma: dom(\gamma)\rightarrow 2^N$ は次のように定義される。 $n_\gamma(p)=\{\pi_1(q)\in N\mid q\in e_\gamma(p)\}$

$e_\gamma(p)$ の元の名称の第1成分を集めたものである。

以下 Main Theorem を述べその証明のための基本的 idea を説明し，応用を述べる。

〔定理1〕(生成木増加定理)

" $G=(N,T,F,P,S)$ IG が与えられた時，Gにだけ依存する定数 k が存在して次をみたす。

$\#(\hat{\gamma})\geq k$ なる $\gamma\in\mathcal{T}(G)$ に対しては，$\alpha,\beta_i,\delta_i,\tau_i,\nu\in\tilde{\mathcal{T}}(G)$ $(i\geq 1)$ が γ より構成的に求めることができて，$\gamma=\alpha\cdot\beta_1\cdot\delta_1\cdot\tau_1\cdot\nu$ と分解され，

i) $\gamma_n=\alpha\cdot\beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_n\cdot\delta_n\cdot\tau_n\cdots\tau_1\cdot\nu\in\mathcal{T}(G)$ $(n\geq 1)$

$(\gamma=\gamma_1)$

ii) $\#(\hat{\gamma}_n)<\#(\hat{\gamma}_{n+1})<k_\gamma k^{n+1}$ $(n\geq 1)$

ここで k_γ は γ に依存する定数 "

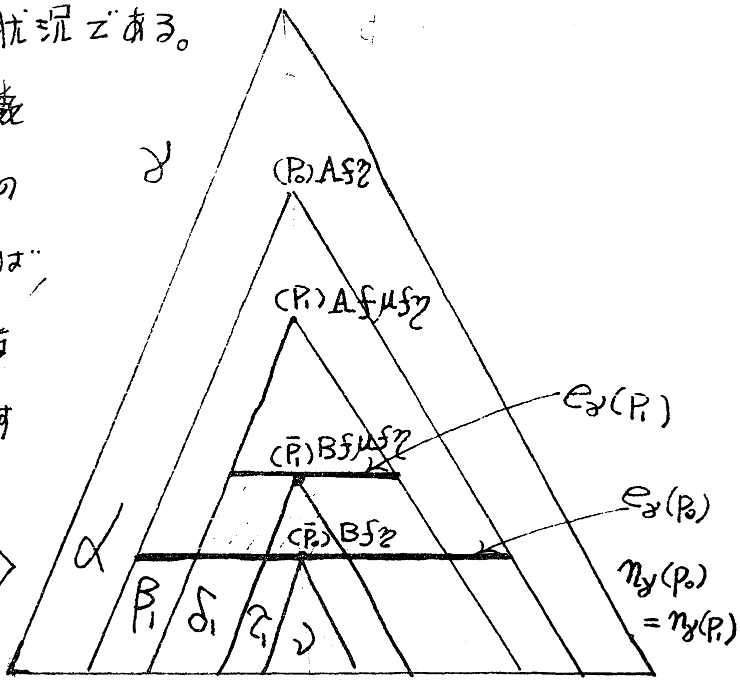
$\alpha,\beta_i,\delta_i,\tau_i,\nu$ の具体的構造は複雑であるので省略する。

【定理1】"証明のための基本的idea"

(i)の分解は図6のような状況である。すなわち、頂点Pの子の数(枝分れの数)が2以上の時Pをproductiveと呼べば、γの鎖の中でproductiveな頂点が最も多いものGとする。

$G=\langle (q_0,X_0\eta_0),\ldots\ldots,(q_m,X_m\eta_m)\rangle$

$D_G=\{q\in dom(\gamma)\mid (q,\gamma(q))\in G\}-\{q_m\}$ とした時



($\gamma=\gamma_1$の分解図)[図6]

$$S: D_G \longrightarrow N\times\{F\cup\{\varepsilon\}\}\times\{N\cup\{\#\}\}\times 2^N$$

$$S(q)=\begin{cases}(\pi_1(q),\ \tilde{\pi}_2(q),\ \pi_1(\bar{e}(q)),\ \eta_\gamma(q)) & \text{if } \bar{e}(q)\neq\phi\\ (\pi_1(q),\ \tilde{\pi}_2(q),\ \#\ ,\ \eta_\gamma(q)) & \text{if } \bar{e}(q)=\phi\end{cases}$$

ここで#は新しい記号、$\bar{e}(q)=e_\gamma(q)\cap D_G$ を考える。

つまり、$q\in D_G$に対して、その名称の非終端記号、index部の左端の記号、Gでのqのend of scope、$\bar{e}(q)$の非終端記号、$e(q)$の非終端記号を集めた集合を対応させているのである。

S-functionの値は有限個だから、$S(P_0)=S(P_1)$で $scope_\gamma(P_1)\subseteq scope_\gamma(P_0)$ なるP_0, P_1の存在を先端の増加に注意をはらって証明すればよい。存在を保証し、か

つ(i),(ii)を満たすようにkを決定できる。$k_\gamma = \#(\hat{\gamma})k^{\#(\hat{\gamma})}$
である。(i)に関しては$\$(P_0)=\$(P_1)$の条件より、$P_0, P_1$間で積み上げられたindex $f\mu$が図6の斜線部で、消費されており、$n_\gamma(P_0)=n_\gamma(P_1)$の条件より$f\mu$を繰り返し増加させても、うまく消費されてゆくわけである。詳細に関しては(林[1972])を参照されたい。

定理1の系として次の応用を得る。

§5 応用

【系-1】Indexed Grammarのfiniteness problemはsolvableである。(Rounds[1970]の別証)

[証明] $G=(N,T,F,P,\$)$ IGが与えられた時、ε-free(*) IG $G'=(N',T,F',P',\$')$をGから構成できて、$L(G)=L(G')$ if $\varepsilon\notin L(G)$ or $L(G)=\{\varepsilon\}\cup L(G')$ if $\varepsilon\in L(G)$とすることが出来る。(Aho[1968], p661)
$L(G)$ finite $\Leftrightarrow$ $L(G')$ finite よってこのG'に対して、定理のkを計算すれば、G'がε-freeであることより、$\#(\hat{\gamma})=|g(\gamma)|$ $(\gamma\in J(G'))$となる。R_kをk以上の長さのTのstringから成る正則集合、すなわち$R_k=\{w\in T^*|\ |w|\geq k\}$とする。すると、$L(G'')=L(G')\cap R_k$なるIG、$G''=(N'',T,F'',P'',\$'')$が構成できる。(Aho[1968] p656)そして定理1の(ii)より、$L(G')$ finite $\Leftrightarrow L(G'')=\phi$

(*) $A\rightarrow\varepsilon\notin P\cup\bigcup_{f\in F} f$ なるIGをいう。

ところが $L(G'')=\phi$ かどうかは solvable である。(AhO, P658) //

【定理2】 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $f(n) \leq f(n+1)$ $(n \geq 1)$ かつ, $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(n)^{\frac{1}{n}} = \infty$ なる関数とした時,

$L_f = \{ a^{f(n)} \mid n \geq 1 \}$ は Indexed Language ではない。

[証明] 系-1の時と同様に $L_f - \{\varepsilon\} = L(G)$ なる ε-free IG: G が存在すると仮定して, 矛盾を導いても, 一般性を失わない。定理1の k をとってくる。$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(n)^{\frac{1}{n}} = \infty$ の条件より, $\#(\hat{\gamma}) = |g(\gamma)| = f(n_0) \geq k$ なる, n_0, γ が存在する。この γ に対して k_γ を計算する。$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(n)^{\frac{1}{n}} = \infty$ の条件より, $f(n_0+t)^{\frac{1}{n_0+t}} > k_\gamma k^2$, $(t>1)$ なる t が存在する。定理1のiiより, $f(n_0+t) > (k_\gamma k^2)^{n_0+t} > k_\gamma k^{2t+1} > \#(\hat{\gamma}_{2t+1}) = |g(\gamma_{2t+1})| > \#(\hat{\gamma}_{2t}) = |g(\gamma_{2t})| > \cdots > |g(\gamma_1)| = f(n_0)$ である。f の単調性より, L_f には長さが $f(n_0)$ より大きく $f(n_0+t)$ より小さい元は高々 $t+1$ 個しか存在しないはずである。ところが上の不等式はそのような元が少くとも $2t+1$ 個存在することを示している。これは矛盾である。 //

定理2を使えば, $\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$ であるから $\{a^{n!} \mid n \geq 1\}$ や同様に $\{a^{n^n} \mid n \geq 1\}$ などが Indexed Language でないことが解る。ところが, $P_i \in \mathbb{N}[X]$ を多項式とし, $k_i \in \mathbb{N}$ として, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{j} P_i(x) k_i^{x}$ とおけば, $L_\varphi = \{a^{\varphi(n)} \mid n \geq 1\}$

が Indexed Language であることは容易に解るから、この点

例えば、$\{a^{nk^n} \mid n \geq 1\}$ を与えるIGは次のとおり。

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a\}, \{f, g\}, P, S)$$

$$P:\ S \longrightarrow Ag\ ,\quad A \longrightarrow Af\ ,\quad A \longrightarrow B$$

$$f = [B \longrightarrow B^k C^k\ ,\ C \longrightarrow C^k],\ g = [B \rightarrow a^k, C \rightarrow a^k]$$

一般に L_φ を与える文法も容易に構成できる。

を考慮すれば、定理2はIGの限界を与えていると言える。すなわち定理1の ii) から解るように、IGの string の長さの増えかたは高々等比数列的である。(CF文法では等差数列的!)

【定理3】 $L_\Sigma = \{(\# w)^{|w|} \mid w \in \Sigma^*,\ \# \notin \Sigma,\ \#(\Sigma) \geq 1\}$ は Indexed Language ではない。

証明には定理1を証明するためのテクニックを拡張して使う。林[1972]を参照されたい。

この定理は、与えられた $k \in N$ に対して $\{(\# w)^k \mid w \in \Sigma^*,\ \# \notin \Sigma,\ \#(\Sigma) \geq 1\}$ なる言語を与えるIGは容易に構成できる点を考慮すれば、興味深い。

【謝辞】

本論文を書くにあたって、色々アドバイスをし、議論、討論をして下さった数理解析研究所 高須 達教授、及び高須

研の皆さん，特に西沢輝泰氏と笠井琢美氏に深謝します。

【参考文献】

1. A.V. Aho, "Indexed Grammars". JACM 15 [1968] PP. 647－671

2. Bar-Hillel et al, "On Formal Properties of Simple Phrase Structure Grammars". Z. Phonetik Sprachwiss. Kommunikat 14 [1961] PP. 143－172

3. W. S. Brainerd, "Tree Generating Regular Systems". Inform & Control 14 [1969] PP. 217－231

4. W. F. Ogden, "Intercalation theorems for Pushdown store and Stack languages." Ph.D dissertation. Stanford Univ [1968]

5. W. G. Rounds, "Tree-Oriented Proofs of Some Theorems in Context-free and Indexed Languages". 2nd ACM Symp. Theory on Computing [1970] PP. 109－116

6. M. Takahashi, "Derivation Trees and Context free Languages." Masters' thesis Pennsylvania Univ [1970]

7. 林 健志，"Indexed Grammar の木構造について" 京都大学修士論文 [1972]