数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 83-97

Deterministic Graded Pushdown Automata

京大・数理解析研　笠井琢美

序　Tree automaton と graded language

Tree automaton [4, 18, 19] とは string のかわりに tree というグラフそのものを入力とするようなオートマトンであり，それの受理する tree の集合は context-free grammar の derivation tree の集合と密接な関係がつく．また有限オートマトンの自然な拡張となっているため，有限オートマトンでの結果が大部分 tree に関しても成立する．

よく知られているように Σ 上の tree t は polish notation ψ によって Σ 上の string $\psi(t)$ として表わされる．ここでは tree に ψ が1対1となるような制限（定義 1-3）をする．ここで述べる graded language [*] とは次のような言語のことである．

★ tree の集合 T が tree automaton に受理される必要十分条件は $\psi(T)$ が graded language となることである．

本稿では graded language が deterministic language [9] であることを示す．

1. Polish Notation

定義 1.1 graded alphabet とは組 (Σ, σ) のことをいう．ここで Σ は空でない有限集合で，σ は写像 $\sigma: \Sigma \to \{0, 1, 2, \cdots\}$ である．Σ の元 a に対し $\sigma(a)$ のことを a の階数 (rank) という．σ のとえかたについて誤解の恐れがない場合は，graded alphabet (Σ, σ) を単に graded alphabet Σ という．以後 Σ とは graded alphabet を示すものとする．

定義 1.2 J を自然数の集合，J^* を J によって生成される free monoid とし，0 を J^* の単位元，$\cdot$ を operation とする．このとき次の (i), (ii) を満す J^* の有限部分集合 D のことを tree domain という．

(i) $p \cdot q \in D$ なら $p \in D$

(ii) $p \cdot i \in D$ で $1 \leq j \leq i$ なら $p \cdot j \in D$

D の元を頂点といい，p と $p \cdot i$ が D の元なら $p \cdot i$ を p の子という．(i) より $D \neq \phi$ なら $0 \in D$ である．頂点 0 を D の根という．

定義 1.3 Σ 上の tree とは写像 $\gamma: D \to \Sigma$ のことをいう．ただし D は tree domain であり，各頂点 p に対し

$$\sigma(\gamma(p)) = \max\{i \mid p \cdot i \in D\}$$
$$= \text{頂点 } p \text{ の子の数}$$

とする．$\gamma(p)$ を頂点 p の名称 (label) という．

すなわちここでいう tree γ においては，各頂点 p から出ている枝の数は p の名称 $\gamma(p)$ の階数と等しくなければならない．

γ の domain D を $dom(\gamma)$ で示し，$\mathcal{T}_\Sigma$ で Σ 上の tree 全体からなる集合を示す．γ を graph $\{(p, \gamma(p)) \mid p \in dom(\gamma)\}$ で表わすこともある．

定義 1.4　γ を Σ 上の tree，p を γ の頂点（すなわち $p \in dom(\gamma)$）とするとき

$$\gamma/p = \{(q, a) \mid (p \cdot q, a) \in \gamma\}$$

と定める．γ/p を頂点 p からの γ の subtree という．

定義 1.5　polish notation とは次のように定義される写像 $\Psi : \mathcal{T}_\Sigma \longrightarrow \Sigma^*$ のことをいう．

$$\Psi(\gamma) = \gamma(0)\Psi(\gamma/1)\Psi(\gamma/2)\cdots\Psi(\gamma/\sigma(\gamma(0)))$$

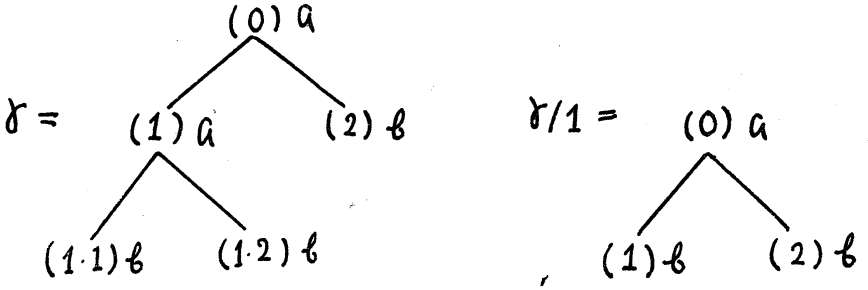
例　$\Sigma = \{a, b\}$，$\sigma(a) = 2$，$\sigma(b) = 0$

$$\gamma = \{(0, a), (1, a), (2, b), (1\cdot1, b), (1\cdot2, b)\}$$

とすると，γ は Σ 上の tree で 図1 のように図示される．また

$$\gamma/1 = \{(0, a), (1, b), (2, b)\},\quad \gamma/2 = \gamma/1\cdot1 = \gamma/1\cdot2 = \{(0, b)\}$$

となる．



－図1－

$$\psi(\gamma)=\psi\left(\begin{array}{c} a \\ a \quad b \\ b\ b \end{array}\right)=a\psi\left(\begin{array}{c} a \\ b\ b \end{array}\right)\psi(\cdot b)$$

$$=aa\psi(\cdot b)\psi(\cdot b)b=aabbb$$

定義 1.6　Σ 上の parenthesis-free formula（PFF と略す）の集合 Σ^T を帰納的に次のように定義する.

(i)　$a\in\Sigma$, $\sigma(a)=0$　ならば　$a\in\Sigma^T$

(ii)　$a\in\Sigma$, $\sigma(a)=n>0$,　$x_1, x_2, \cdots, x_n\in\Sigma^T$　ならば

$ax_1x_2\cdots x_n\in\Sigma^T$

定義より次を得る

補助定理 1.　$a_1a_2\cdots a_m\in\Sigma^*$ が PFF である必要十分条件は次の (i) と (ii) を満すことである.

(i)　$\sigma(a_1)+\sigma(a_2)+\cdots+\sigma(a_m)=m-1$

(ii)　$1\le\forall i<m$ に対し　$\sigma(a_1)+\sigma(a_2)+\cdots+\sigma(a_i)\ge i$

補助定理 2.　(1) $\psi(\mathcal{T}_\Sigma)=\Sigma^T$　　(2) ψ は one to one

したがって　$\psi:\mathcal{T}_\Sigma\to\Sigma^T$ は bijection である.

証明　(1) は明らか.　(2) は補助定理 1 より,　$ax_1x_2\cdots x_n=ay_1y_2\cdots y_m\in\Sigma^T$ で $x_i, y_j\in\Sigma^T$ ならば $n=m=\sigma(a)$, $x_i=y_i$, $1\le i\le\sigma(a)$ となることより証明される.

補助定理 2 によって tree γ と PFF $\psi(\gamma)$ とを同一視することができる.

2. Graded Pushdown Automaton

graded language は文法的モデル graded grammar [*] によって定義される言語である. ここでは同値なオートマトンのモデルとして graded pushdown automaton について述べる. したがって本稿においては graded language を graded pushdown automaton に受理される言語として定義する.

定義 2.1 graded pushdown automaton (gpda と略す) とは $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,F)$ のことをいう. ここで

(1) K は有限集合で状態の集合, $q_0\in K$, $F\subset K$

(2) Σ は graded alphabet

(3) Γ は pushdown symbol の集合, $Z_0\in\Gamma$

(4) $\delta: K\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{K\times\Gamma^*}$ で 任意の $(p,a,Z)\in K\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma$ に対し

$$\delta(p,a,Z)\subseteq K\times\Gamma^{\sigma(a)}$$

とする. ただし ε の階数は 1 とする.

$(p,\gamma)\in\delta(q,a,Z)$ のとき $\forall\omega\in\Sigma^*$, $\forall\alpha\in\Gamma^*$ に対して

$$(q,a\omega,Z\alpha)\vdash(p,\omega,\gamma\alpha)$$

と書く. $\vdash^*$ を $\vdash$ の reflexive transitive closure とする. また図示する関係上 $(p,\omega,\alpha)\vdash^*(q,\varepsilon,\beta)$ を $(p,\alpha)\xrightarrow{\omega}(q,\beta)$ と書くこともある.

$$T(M)=\{\omega\in\Sigma^{*}\mid (q_0,\omega,Z_0)\vdash^{*}(q,\varepsilon,\varepsilon),\ q\in F\}$$

を M によって受理される言語という. 定義より $T(M)\subset\Sigma^{T}$ となる. 一般に, ある gpda によって受理される言語を graded language という.

tree automaton との関係は次のようになる.

⟨オートマトン⟩		⟨文法⟩	
tree automaton	=	regular system [5]	T_Σ
⇕ Ψ		⇕ Ψ	
gpda	=	graded grammar	Σ^{T}

定義 2.2. gpda $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,Z_0,q_0,F)$ が ε-free であるとは $\forall p\in K,\ \forall Z\in\Gamma$ に対し $\delta(p,\varepsilon,Z)=\phi$ となることをいう. また M が deterministic であるとは ε-free で $\forall(p,a,Z)\in K\times\Sigma\times\Gamma$ に対し $\#(\delta(p,a,Z))=1$ となることを言う. ここで A を集合とするとき $\#(A)$ は A の元の個数を示す.

普通の pushdown automaton と同様の方法によって次の補助定理が成立する.

補助定理 2.1 任意の gpda M に対し $T(M)=T(M')$ となる ε-free で 1つの state からなる gpda M' が存在する.

3. The Main Theorem

定理 3.1 任意の gpda M に対し，$T(M) = T(M')$ となる deterministic な gpda M' が存在する．

証明の outline. 補助定理 2.1 より M は 1 つの state からなり ε-free であると仮定できる．

$$M = (\{p\}, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_1, p, \{p\})$$

$$\Gamma = \{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}$$

$$m = \max\{\#(\delta(p, a, Z)) \mid (p, a, Z) \in K \times \Sigma \times \Gamma\}$$

とする．Σ の各元 a と各 Z_i, $1 \le i \le n$, に対し $\delta(p, a, Z_i)$ を任意に順序づけてならべる．j 番目の元を

$$(p, Z_{g(i,j,1)} Z_{g(i,j,2)} \cdots Z_{g(i,j,k)})$$

と書く．定義より $k = \sigma(a)$ である．

次に例でもって deterministic gpda M' の構成方法を示す

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \sigma(a) = 2, \ \sigma(b) = 0, \quad \Gamma = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$$

$$\delta(p, a, Z_1) = \{Z_1 Z_3, Z_2 Z_1\}$$

$$\delta(p, a, Z_2) = \{Z_2 Z_2\}$$

$$\delta(p, a, Z_3) = \{Z_3 Z_1, Z_3 Z_3\}$$

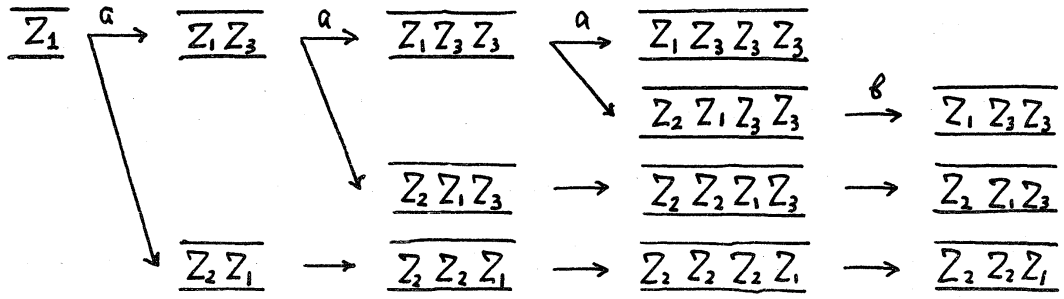
$$\delta(p, b, Z_1) = \phi$$

$$\delta(p, b, Z_2) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, b, Z_3) = \{(p, \varepsilon)\}$$

今，入力 $aaab$ を読んだ時の M のスタックの動きは

90



と4通りの動きが可能である. gpda の性質より, 一般にMが入力wを読んだとき可能なスタックの長さ(スタックに書かれている文字の個数)はすべて等しいことに注意する.

Mを deterministic な M' でまねるためには, Mでの可能なスタックすべてをM'では1本のスタックで表現しなければならない. さらにM'もgpdaとするためには同じ長さのスタックで表わす必要がある. ここで例のMで入力 aaa を読んだ後の4本の長さ4のスタックを一本の長さ4のスタックで表わすことを考えよう。たてに並んだ4文字 $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, Z_{i_4}$ を1文字 $\langle Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, Z_{i_4}\rangle$ と考えて M' での stack symbol とすることはできない. というのはたとえば例のMで入力 a^k を読んだときの可能なスタックの数は $k+1$ 本で, 一般に可能なスタックの数は bound されないからである. したがって次のような特別の工夫をする. 各整数 $k \geq 1$ に対し, 集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ を $[k]$ で示す. M' での stack symbol を $\langle \xi, \nu \rangle$ の型のものとする. ここで

$$\xi : [n] \times [m] \to \Gamma \cup \{\#\},$$

$\nu \subset [n] \times [m] \times [n] \times [m]$

である. ここの例では $n=3$, $m=2$ であるので $\langle \xi, \nu \rangle$ を図2のように図示する. ここで上部 i 行 j 列のますには $\xi(i,j)$ の文字が書きこまれるものとする. M′の state は $[n] \times [m]$ の部分集合とする. さて今, 例に対するM′が構成されたものとして説明する. M′の初期状態 q_0 とスタックの初期記号 Z_0 は図3上のように定める. ここで入力 aaa を入れると図3下のようになる.

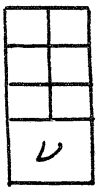


図2. M′の stack symbol

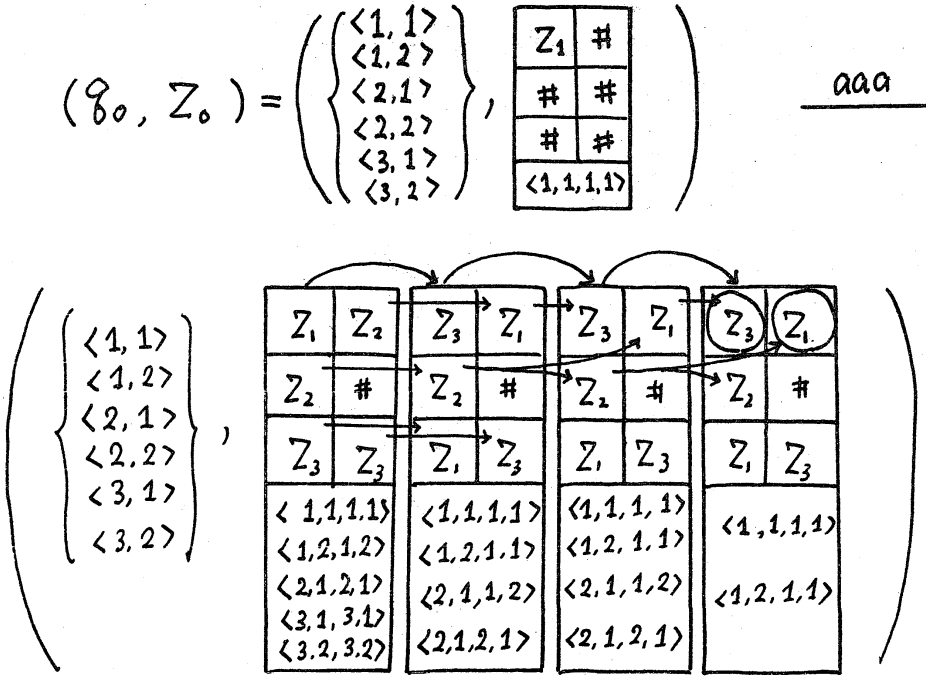


図 3

ここで説明の都合上 track sequence なるものを定義する

$(q_0, Z_0) \xrightarrow{\omega} (q, \langle \xi_1, \nu_1 \rangle \langle \xi_2, \nu_2 \rangle \cdots \langle \xi_s, \nu_s \rangle) = \theta$ in M'

とするとき，次のような $[n] \times [m]$ の列 $\langle i_1, j_1 \rangle, \langle i_2, j_2 \rangle, \cdots, \langle i_s, j_s \rangle$ を θ の track sequence とよぶ

(i) $\langle i_1, j_1 \rangle \in q$

(ii) $\langle i_t, j_t, i_{t+1}, j_{t+1} \rangle \in \nu_t$, $1 \leq t <$

(iii) $\langle i_s, j_s, 1, 1 \rangle \in \nu_s$

track sequence $\langle i_1, j_1 \rangle, \cdots, \langle i_s, j_s \rangle$ の $\langle i_t, j_t \rangle$ は t 番目の stack symbol の上部 i_t 行 j_t 列を指す．したがって $\langle i_t, j_t, i_{t+1}, j_{t+1} \rangle \in \nu_t$ は t 番目の座標 $\langle i_t, j_t \rangle$ は $t+1$ 番目の座標 $\langle i_{t+1}, j_{t+1} \rangle$ と結びつくことを表わす．図3下では，右端のまるで囲まれた座標にいたるまでの矢じるしで結ばれた座標の列で，次の4つである．

l_1 : $\langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle$　　l_2 : $\langle 1,2 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle$

l_3 : $\langle 2,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,1 \rangle$　　l_3 : $\langle 2,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle$

またこの座標に書かれた記号を順にたどると，l_1 に対しては $Z_1 Z_3 Z_3 Z_3$，l_2 に対して $Z_2 Z_1 Z_3 Z_3$，l_3 は $Z_2 Z_2 Z_1 Z_3$，l_4 は $Z_2 Z_2 Z_2 Z_1$ となる．

一般に M' は次を満足するように構成される

$(q_0, Z_0) \xrightarrow{\omega} (q, \langle \xi_1, \nu_1 \rangle \cdots \langle \xi_s, \nu_s \rangle) = \theta$ in M' で $\langle i_1, j_1 \rangle, \cdots, \langle i_s, j_s \rangle$ が θ の track sequence

である必要十分条件は

$(p, Z_1) \xrightarrow{w} (p, \xi_1(i_1,j_1)\xi_2(i_2,j_2)\cdots\xi_o(i_o,j_o))$ in M

ここで M′ の構成にもどる．あと受理状態の集合 F と，次の状態とスタックの様相を定める関数 δ′ を定義すれば M′ の構成は終わる．$F=\{q_0\}$, q_0 は初期状態（図3上）とする．さて，q を M′ の任意の state，$\langle \xi, \nu\rangle$ を任意の stack symbol，a を Σ の任意の元とし，$\sigma(a)=k$ とするとき $\delta'(p, a, \langle \xi, \nu\rangle)$ を次のように定める．

(I) $\sigma(a)=k>0$ のとき

$$\delta'(q, a, \langle \xi, \nu\rangle) = (q', \langle \xi_1, \nu_1\rangle\langle \xi_2, \nu_2\rangle\cdots\langle \xi_k, \nu_k\rangle)$$

とする．ここで $q'=[n]\times[m]$．$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ と $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{k-1}$ は a だけに depend して次のように定める．$1\le i\le n$, $1\le j\le \#(\delta(p,a,Z_i))$ に対し $\delta(p, a, Z_i)$ の j 番目の元は $(p, Z_{g(i,j,1)}\cdots Z_{g(i,j,k)})$ であった．このような (i,j) に対し $\xi_t(i,j)=Z_{g(i,j,t)}$, $1\le t\le k$, と定め $(i,j,i,j)\in\nu_t$, $1\le t\le k-1$, とする．すなわち $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ から (i,j) 座標を取り出して並べると $\delta(p,a,Z_i)$ の j 番目の元となるようにする．その他の (i,j) に対しては $\xi_t(i,j)=\#$, $1\le t\le k$ とする．最後の ν_k はこの規則が適用される直前の track sequence との link の働きをするもので，

$$\nu_k = \{\langle i', j', i'', j''\rangle \mid \exists \langle i, j\rangle \text{ such that } \langle i, j\rangle\in q, \langle i, j, i'', j''\rangle\in\nu, \xi(i,j)=Z_{i'}, 1\le j'\le \#(\delta'(p,a,Z_{i'}))\}$$

と定められる．これは $\langle i,j\rangle, \langle i'',j''\rangle, \cdots$ なる track sequence があって $\xi(i,j)=\Sigma_{i'}$ となるとき．a を読めば $1\leq j'\leq \#(\delta'(p,a,\Sigma_{i'}))$ なる各 j' に対し

$$\underbrace{\langle i',j'\rangle, \langle i',j'\rangle, \cdots, \langle i',j'\rangle}_{k\text{個}}, \langle i'',j''\rangle \cdots$$

もまた track sequence となることを意味する．

(II) $\sigma(a)=k=0$ のとき．$k=0$ はスタックの左端の文字を消すことを意味する．したがって track sequence $\langle i,j\rangle$, $\langle i',j'\rangle, \cdots$ のうち $\delta(p,a,\xi(i,j))\neq\phi$ となる $\langle i',j'\rangle$ を取り出せばよいから，$\delta(q,a,\langle\xi,\nu\rangle)=(q',\varepsilon)$

$$q'=\bigcup_{\langle i,j\rangle\in q}\{\langle i',j'\rangle \mid \delta(p,a,\xi(i,j))\neq\phi, \langle i,j,i',j'\rangle\in\nu\}$$

とすればよい．

このように構成したものが $T(M)=T(M')$ となることは容易に示すことができるであろう．

系 3.1 Parenthesis language は deterministic language である．

系 3.2 $L\subset\Sigma^T$ を graded language とすれば (i) Σ^*-L は deterministic language (ii) Σ^T-L は graded language

系 3.3 L_1 と L_2 が graded language なら (i) $L_1\cup L_2$ (ii) $L_1\cap L_2$ (iii) L_1-L_2 もまた graded language である

ACKNOWLEDGMENT

The author wishes to thank Professor Satoru Takasu and Mr. Teruyasu Nishizawa for their encouragement and their helpful suggestions. The author is also indebted to Professor Hiroshi Noguchi of Waseda University for his advice and suggestions toward this paper.

REFERENCES

1. E. Altman and R. Banerji, Some problems of finite representability, Information and Control 8(1965), 251-263
2. M. A. Arbib and Y. Give'on, Algebra Automata I: Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach, Information and control 12(1968), 331-345
3. Y. Bar-Hillel, M. Perles and E. Shamir, On formal properties of simple phrase structure grammars, Z. Phonetik Sprachwiss. Kommunikat 14(1961), 143-172
4. W. S. Brainerd, The minimalization of tree automata, Information and Control 13(1968), 484-491
5. W. S. Brainerd, Tree generating regular systems, Information and Control 14(1969), 217-231
6. N. Chomsky, On certain formal properties of grammars, Information and Control 2(1959), 137-167

7. N. Chomsky, Formal Properties of Grammars, in D. Luce, R. Bush, and E. Galanter (eds.), "Handbook of Mathematical Psychology," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963

8. K. Culik, On some transformations in context-free grammars and languages, Czechoslovak Math. J. 17(1967), 278-311

9. S. Ginsburg and S. Greibach, Deterministic context free languages, Information and Control 9(1966), 620-648

10. S. Ginsburg and M. A. Harrison, Bracketed context-free languages, J. Comput. System Sci. 1(1967), 1-23

11. S. Ginsburg and E. H. Spanier, Control sets on grammars, Math. Systems Theory 2(1968), 159-177

12. S. A. Greibach, A new normal-form theorem for context-free phrase structure grammars, J. Assoc. Computing Machinery 12(1965), 42-52

13. D. E. Knuth, A characterization of parenthesis languages, Information and Control 11(1967), 269-289

14. B. McNaughton, Parenthesis grammars, J. Assoc. Computing Machinery 14(1967), 490-500

15. M. C. Paull and S. H. Unger, Structural equivalence of Context-free grammars, J. Comput. System Sci. 2(1968), 427-463

16. M. Rabin and D. Scott, Finite automata and their decision problems, IBM J. Res. Develop. 3(1959), 114-125

17. C. P. Schnorr, Transformational class of grammars, Information and Control 14(1969), 252-277

18. J. W. Thatcher, Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automata theory, J. Comput. System Sci. 1(1967), 317-322

19. J. W. Thatcher, Generalized^2 sequential machine maps, J. Comput. System Sci. 4(1970), 339-367

*. T. KASAI, Graded Languages — A Model For The Descaiption of Derivation Tree, Preprint RIMS-93

第3回 L.A. シンポジウム (1971) 予稿集