数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 98-110

エルゴード理論における
エントロピー

京大 数研 十時 東生

§1. 序

C. Shannonは通信理論における符号化の問題を，エントロピーという量を導入することによって定式化し，基本的な解答を得た。その後，彼の結果の数学的に厳密な証明や，拡張が多くの著者によってなされている。

一方，エルゴード理論における保測変換の同型問題は，1930年代以降ほとんど進歩がみられなかったが，50年代末のA.N. Kolmogorov - Ya. G. Sinaiの仕事と最近のD.S. Ornsteinの仕事によって大きく進歩したということができる．彼らの仕事においてもエントロピーが本質的な役割を果しているので，その事情を説明したい。また保測変換の同型問題は定常的な場合の符号化の問題にも関連があるので，符号化の問題の一つの考え方という意味もこめて，符号化と関係づけて話を進めたい。

符号化の問題は，情報源から出る文字の列を通信の符号に変え，受信側で復号して普通の文に代えるという操作が，どのようなときに，どのように可能であるかという問題である。情報源から出る文字の列はrandomに出ると考えるのが自然である。つまり一定の確率法則 ── それは情報源固有のもので，例えば文法などに関係して定まっている ── に従って現れると考えられる。

$\mathcal{O}$をアルファベットとし，$X=\mathcal{O}^{\mathbb{Z}}$を可能な文の全体と考える。個々の文章は両側に無限な文字の列

$$x=(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)\in X$$

で表わされる。X上に確率測度μを定め$[X, \mu]$を情報源と呼ぶ。randomnessを支配するμは時間の経過に関して変わらないことを仮定する（定常な情報源と呼ばれる）；すなわち，Xに時間のずらしに相当する変換Tを

(1) $$(Tx)_n=x_{n+1},\quad n\in\mathbb{Z},\ x\in X,$$

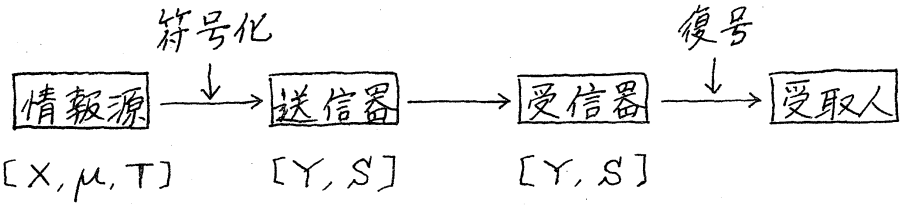
によって定めるとき，

(2) $$\mu(T^{-1}B)=\mu(B),\quad B\in\mathcal{F},$$

であることを仮定する。$\mathcal{F}$はμの定義域であって，それはcylinder setsから生成されるσ-fieldである。これはTが保測変換であることを意味する。

送信のアルファベットを$\mathcal{A}$とし，上と同様に可能な送信

文の全体 $Y=\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}$ を考える。最も簡単な場合として，送信の間に雑音が入らないとしよう。XからYへの可測写像（Yに



も cylinder sets から生成される σ-field $\mathcal{G}$ を考えておく）を符号と呼ぶ。Y上にも（1）と同様に時間のずらし S を定める。そして，符号 φ は

（3）　　$\varphi\circ T(x)=S\circ\varphi(x),\quad x\in X,$

をみたすもののみを考えよう。つまり符号化のしかたが，時間の経過によって不変であるもののみを考える。このような符号は定常的な符号と呼ばれる。

雑音のない通信路の場合，本質的に1対1な符号 φ が求まれば問題は解けたことになる。φ で符号化し，φ^{-1} で復号すれば，もとの通信文が正確に受け取られるからである。この場合に

（4）　　$\gamma(B)=\mu(\varphi^{-1}(B)),\quad B\in\mathcal{G},$

によってY上の確率測度を定めれば，$[Y,\gamma]$ も1つの定常情報源と考えられる。そして，時間のずらしもこめて2つの情報源 $[X,\mu,T]$ と $[Y,\gamma,S]$ は，φ によってたがいに他に写像される。これはまさに，保測変換 T と S が同型であ

ることを意味しているが，同型の厳密な定義は次節で与える。

§2. 保測変換の同型問題

一般の確率空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を考える。

定義1. X から X への可測な写像 T ($T^{-1}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$) が

(i) $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$, $B \in \mathcal{F}$,

(ii) $T: X \longrightarrow X$ one to one, onto, T^{-1}: 可測,

をみたせば，T は保測変換と呼ばれる。もし T が (i) のみをみたせば，T は逆を持たない保測変換と呼ばれる。

例1. $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_N\}$, $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ とし，cylinder sets ($\{x;\ x_n = a_{i_n}, \cdots, x_{n+m} = a_{i_{n+m}}\}$ の形の集合) から生成される σ-field を $\mathcal{F}$ とおく。$\mathcal{A}$ 上に確率測度 μ_0 が与えられているとする。μ_0 は値 $p_i = \mu_0(a_i)$, $1 \le i \le N$, の組 $(p_1, \cdots, p_N)$ によって定まる。$\mathcal{F}$ 上の確率測度 μ を μ_0 の直積として定める，すなわち μ は関係式

$$\mu(\{x;\ x_n = a_{i_0}, \cdots, x_{n+m} = a_{i_m}\}) = p_{i_0} \cdots p_{i_m}$$

によって定まる。このとき (1) で定まる変換 T は，明らかに保測変換になる。そして確率変数列 $\{x_n\}$ が Bernoulli 列 (同分布に従う独立確率変数列) をなすことから，T は Bernoulli 変換 $B(p_1, \cdots, p_N)$ と呼ばれる。

例2. X, $\mathcal{F}$, T は例1と同じとし，測度 μ がつぎのよ

うに定まっているとする。

$$g_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N} g_{ij} = 1,$$

なる $\{g_{ij};\ 1 \leq i, j \leq N\}$ と,

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i g_{ij} = p_j,$$

をみたす $\{p_i;\ 1 \leq i \leq N\}$ が与えられ, μ は関係式

$$\mu(\{x;\ x_n = a_{i_0}, \cdots, x_{n+m} = a_{i_m}\}) = p_{i_0} g_{i_0 i_1} \cdots g_{i_{m-1} i_m}$$

で定まる。このときも T が保測変換であることは明らかである。この場合は $\{x_n\}$ が Markov 連鎖をなすので, T は Markov 変換と呼ばれる。

例3. $X = [0, 1)$, $\mathcal{F}$ = Borel sets の全体, μ = Lebesgue 測度とし, $\alpha \in X$ を固定して変換 T を

$$Tx = x + \alpha, \quad \mod 1,$$

によって定めれば, T は保測変換である。

さて一般に, 確率空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の保測変換 T と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ 上の保測変換 S が与えられたとしよう。もし X から Y への本質的に1対1かつ onto な写像 φ で (3) と (4) をみたすものがあれば, これら2つの変換 T と S は測度論的に同じ構造を持つと考えられ, 同型と呼ばれる。厳密には,

定義2. 集合 $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ と X_0 から Y_0 への写像 φ で

(i) $TX_0 = X_0$, $SY_0 = Y_0$, $\mu(X_0) = \nu(Y_0) = 1$,

(ii) $\varphi : X_0 \longrightarrow Y_0$, one to one, onto,

(iii) $A \subset X_0,\ A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \varphi(A) \in \mathcal{G}$,

$B \subset Y_0,\ B \in \mathcal{G} \Longrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ \mu(\varphi^{-1}(B)) = \gamma(B)$,

(iv) $x \in X_0 \Longrightarrow \varphi \circ T(x) = S \circ \varphi(x)$,

をみたすものがあれば，$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ と $(Y, \mathcal{G}, \gamma, S)$ は<u>同型</u>であるといわれる。

たがいに同型である変換はどのように特徴づけられるであろうか。保測変換 $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ に対して，$L^2(X)$ 上のユニタリ作用素 U_T が

$$U_T f(x) = f(Tx), \quad f \in L^2(X),$$

によって定まる。T と S が同型であれば，明らかに U_T と U_S はユニタリ同値（$L^2(X)$ から $L^2(Y)$ の上への等距離写像 V があって，$V \circ U_T = U_S \circ V$）である。ユニタリ作用素 U_T は変換 T の構造を相当に反映することが期待される。変換 T がエルゴード的であるというのは，

$$TA = A,\ A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mu(A)\mu(A^c) = 0$$

となることである。これは，エルゴード定理によって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int_X f \, d\mu, \quad \text{a.e.} \quad f \in L^1(X)$$

と同値である。ユニタリ作用素 U_T の固有関数が $L^2(X)$ を張るとき，T は純点スペクトルを持つという。

定理1.（J. von Neumann） 2つの保測変換TとSはともにエルゴード的でかつ純点スペクトルを持つとする。もしU_TとU_Sがユニタリ同値であれば，TとSは同型である。

1932年にこの定理が示されて以来，それでは純点スペクトルでない変換に対しても，U_TがTの構造を完全に決定するのかということが問題となった。特に，Bernoulli変換に対しては，それから導かれるユニタリ作用素はすべてユニタリ同値であり，連続スペクトルを持つことが知られていたので，それらが同型であるかどうかが興味ある問題として残されていた。H. Anzaiは1951年に，ユニタリ同値ではあるが同型ではない例を作った。そして1958-59年に，A.N. Kolmogorov - Ya. G. Sinaiは，エントロピーを導入して，たがいに同型でないBernoulli変換が無限に多くあることを示した。これについて次節で述べる。

§3. エントロピー

保測変換$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$のエントロピーをYa. G. Sinaiにしたがって定義する。まず$\alpha = \{A_1, \cdots, A_N\}$を$X$の有限分割，すなわち

$$A_i \in \mathcal{F},\quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j),\quad \bigcup_{i=1}^{N} A_i = X$$

として，αのエントロピーを

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

によって定める。$T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A_1, \cdots, T^{-1}A_N\}$ も有限分割であり，$A_i \cap T^{-1}A_j$ の形の集合への有限分割を $\alpha \vee T^{-1}\alpha$ で表わす。$\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-m}\alpha$ なども同様に定められる。このとき極限

$$h(\alpha, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha)$$

が存在することが知られ，これを分割 α の変換 T に関するエントロピーと呼ぶ。最後に，<u>変換 T のエントロピー</u>を

$$h(T) = \sup\{h(\alpha, T);\ \alpha \text{は有限分割}\}$$

によって定める。一般に $0 \le h(T) \le \infty$ である。

<u>定理2</u>. T と S が同型であれば，$h(T) = h(S)$ である。

変換のエントロピーを計算するのに有効な公式がつぎの定理によって与えられる。

<u>定理3</u>. (Ya. G. Sinai) 有限分割 α に対して，$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^n\alpha$ が一点、一点、への分割であれば，$h(T) = h(\alpha, T)$ である。

例えば，$X = \Omega^{\mathbb{Z}}$ と T を例1と同じとし，確率測度 μ は (2) をみたす任意のものとしよう。$A_i = \{x;\ x_0 = a_i\}$, $1 \le i \le N$ とおけば，$\alpha = \{A_1, \cdots, A_N\}$ は有限分割であって定理3の条件をみたすことが容易にわかる。したがって $h(T) = h(\alpha, T)$ である。特に μ が例1のものであれば，有限分割の列 $\{T^{-i}\alpha\}$

は独立であって，$H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha) = nH(\alpha)$ が得られる。この場合，明らかに

$$H(\alpha) = H(p_1, \cdots, p_N) \equiv -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

だから，つぎのことがわかる。

系1. T を Bernoulli 変換 $B(p_1, \cdots, p_N)$ とすれば

$$h(T) = H(p_1, \cdots, p_N)$$

である。

容易にわかるように，$0 < H(p_1, \cdots, p_N) \leq \log N$ であって $H(p_1, \cdots, p_N)$ は $\{p_i\}$ について連続だから，

系2. 任意の $0 < h < \infty$ に対して，$h(T) = h$ なる Bernoulli 変換 T が存在する。したがって，たがいに同型でない Bernoulli 変換が無限個（連続濃度）存在する。

例2の Markov 変換に対しても $h(\alpha, T)$ が計算できて，

$$h(T) = -\sum_{i,j} p_i g_{ij} \log g_{ij}$$

であることがわかる。

つぎには，エントロピーの等しい Bernoulli 変換は同型であるか，あるいはエントロピーが等しければ同型となるような変換のクラスは何か，ということが問題となる。この問題は最近 D. S. Arnstein 達によって，ほとんど解決された。

定理4. (D. S. Arnstein) エントロピーの等しい Bernoulli 変換は同型である。

この定理はもう少し広いクラスに拡張される。$X=\alpha^{\mathbb{Z}}$, Tを例1と同じとし，αを上に述べたα_0によって定まる有限分割とする。確率測度μは(2)をみたし，さらに

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n>0}\sum_{A\in\bigvee_{k}^{k+n}T^i\alpha,\,B\in\bigvee_{-n}^{0}T^i\alpha}|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|=0$$

をみたすと仮定する。このときTを弱Bernoulli変換と呼ぶ。混合的なMarkov変換は弱Bernoulli変換であることが知られている。

定理5.（N. A. Friedman - D. S. Ornstein）エントロピーの等しい弱Bernoulli変換は同型である。

D. S. Ornsteinはさらに，エントロピーの等しいことから同型が導かれる変換のクラスは本質的に弱Bernoulliに限ることも示している。

同型問題で未解決の問題は，Kolmogorov変換と呼ばれる弱Bernoulliよりも本当に広いクラスに対する分類と，逆を持たない変換（特に逆を持たないBernoulli変換やMarkov変換 ── それらは$X=\alpha^{\mathbb{N}}$として定義される）の同型問題である。

§4. 符号化の問題への応用

1節で定式化したように，雑音のない通信路に対する逆

をもつ符号 φ は保測変換 (X, μ, T) と $(Y, \nu=\mu\circ\varphi^{-1}, S)$ の間の同型を与える写像であった。したがって，3節で述べた諸定理からつぎの結論が直ちに導びかれる。

送信のアルファベット $\mathcal{A}$ の元の個数を $\#\mathcal{A}$ で表わそう。3節で述べたように，$\mathcal{A}$ から定まる Y の有限分割を β とすれば，$h(S)=h(\beta, S)$ である。さらに容易にわかるように，$h(\beta, S)\leq H(\beta)\leq \log(\#\mathcal{A})$ が成りたつ。もし逆をもつ符号 φ があれば $h(T)=h(S)$ だから，つぎのことがわかる。

定理6. もし $h(T)>\log(\#\mathcal{A})$ ならば，逆をもつ符号は存在しない。

さらにつぎのことが示される。

定理7. もし情報源 (X, μ, T) が弱Bernoulli変換であり，さらに $h(T)\leq \log(\#\mathcal{A})$ であれば，逆をもつ符号が存在する。

なぜなら，$s=\#\mathcal{A}$ とおき，$H(p_1, \cdots, p_s)=h(T)$ をみたす確率ベクトル $(p_1, \cdots, p_s)$ を1つとり，S をBernoulli変換 $B(p_1, \cdots, p_s)$ にする Y 上の確率測度を ν とする。そうすれば，$h(S)=H(p_1, \cdots, p_s)=h(T)$ だから定理5によって S と T は同型である。この同型を定める X から Y への写像 φ が求める符号である。

符号の中に予測をしない符号がある。それは，各 $n\in\mathbb{Z}$

$b \in \mathcal{Y}$ に対し，集合 $\varphi^{-1}\{y; y_n = b\}$ が $(x_n, x_{n-1}, \cdots)$ に対する条件のみで定まるような符号 φ として定義される。逆をもち予測をしない符号の存在の問題は，逆をもたない保測変換の同型問題と深く関係している。

雑音のある通信路の場合の符号化の問題は，雑音のない場合のように保測変換の同型問題に直接関係してはいないが，一定のかかわりがあることが，例えば P. Billingsley によって指てきされている。

文献

[1] シャノン：コミュニケーションの数学的理論，明治図書．
（長谷川淳・井上光洋訳）

[2] J. von Neumann: Zur operatoren Methode in der klassischen Mechanik, Ann. Math. 33 (1932), 587-642.

[3] H. Anzai: Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J. 3 (1951), 83-99.

[4] A.N. Kolmogorov: A new metrical invariant for transitive dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces, Доклады Акад. Наук 119 (1958), 861-864; Entropy per unit time as a metrical invariant of automorphisms, ibid. 124 (1959), 754-755.

[5] Ya. G. Sinai : On the concept of entropy a dynamical system, Доклады Акад. Наук 124(1959), 768-771.

[6] D. S. Ornstein : Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, Advances in Math. 4(1970), 337-352; Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic, ibid. 5(1971), 339-348.

[7] N.A. Friedman and D. S. Ornstein : On isomorphism of weak Bernoulli transformations, Advances in Math. 5(1971), 365-394.

[8] D. S. Ornstein : A simpler example of a Kolmogorov automorphism that is not a Bernoulli shift, preprint.

[9] ビリングスレイ：確率論とエントロピー，吉岡書店．（渡辺毅・十時東生訳）