数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 133-146

Structure of determinative subspace in cell space

九大理基礎情報研 山口優子

§1. 序

北川[1]によって提唱された"生物数学へのセル空間論的接近"とは，一般にn次元セル空間の各セルにある状態集合の中の1つの状態がassignされた機構と，この空間のsubdomain上で定義されたある原理にしたがう局所変換とによって生じる機構の遷移構造，振動構造，或いは，安定構造等を解明することである。ここでは，2次元セル空間において特殊なsubdomain (basic cell space) 上で定義された局所多数決原理にしたがう局所変換に関して，機構の遷移構造，安定構造等を論ずる。

§2. 基本的定義

正方形，正三角，或いは正六角形を単位セルとする有限単連結2次元セル空間をCであらわす。Cの各セルに状態1又

は0をassignしたものをconfigurationと呼び $C(X)$ 或いは $C(Y)$ 等であらわし，可能なconfigurations全体を $\{C(X)\}$ とあらわす。 B を C のsubsetとする。

<u>定義2.1.</u> $T_B : \{C(X)\} \longrightarrow \{C(X)\}$ ：B上の局所変換

$\Leftrightarrow \forall C(X), \quad T_B C(X)|(C-B) = C(X)|(C-B)$

ただし $C(X)|(C-B)$ は $C(X)$ をsubset $(C-B)$ に制限したconfigurationをあらわす。

subset B と平行移動及び回転によって合同となるようなすべての可能なsubsetsの全体を考える。これらのsubsets上で同じ局所変換が定義されているとき，それらの集合の各々をbasic cell spaceという。以下我々は次の4つのセルから成るbasic cell spaceのみを考える。

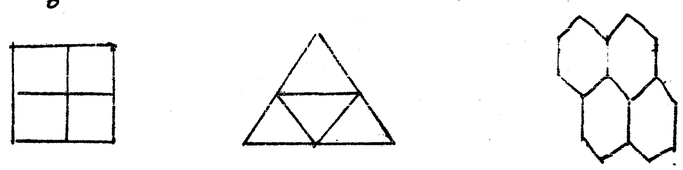

Fig 2.1 4つのセルからなるBasic cell space

種々のbasic cell spaceについての議論は北川[2],[4]を参照。セル空間 C の中のすべての可能なbasic cell spaceに番号をつけ，それを $\{B_i;\ i=1,2,\cdots,k\}$ であらわす。

<u>定義2.2.</u> 局所変換 $T_{B_i} : \{C(X)\} \longrightarrow \{C(X)\}$

：多数決原理をみたす局所変換（略してLMT）

$$\Longleftrightarrow \quad {}^{\forall}C(X)$$

$$T_{B_i} \cdot C(X)|B_i = \begin{cases} \mathbb{1}|B_i, & \text{if } S(X)>2 \\ C(X)|B_i, & \text{if } S(X)=2 \\ 0|B_i, & \text{if } S(X)<2, \end{cases}$$

ただし, $S(X)$は, $C(X)|B_i$ である各状態の和, $\mathbb{1}$, 0 は, すべてのセルの状態がそれぞれ 1, 0 である configuration である。

§3. LMT による configurations の遷移

N個のセルからなるセル空間には, 2^N個の可能な configurations があるが, それらのすべてにLMTを適用することによって得られる configurations の遷移は 頂点の個数が2^N個から成る digraph を構成する。 この節では この digraph の構造について考察する。

定義3.1. $C(X)$: $C(Y)$の direct decendant

$\Longleftrightarrow$ $C(X) \neq C(Y)$, at least one ${}^{\exists}B_i$; $T_{B_i} \cdot C(Y) = C(X)$.

このとき, $C(Y)$を direct ancestor という。

$\mathcal{U}$: configurations の集合

$d(\mathcal{U})$ $(a(\mathcal{U}))$: $\mathcal{U}$に含まれる configurations のすべての direct decendant (ancestor) の集合.

定義3.2. $C(X_n)$: $C(X_1)$の decendant (ancestor)

$\Longleftrightarrow \exists \{C(X_i)\}\quad i=2,3,\cdots,n-1,\ \text{s.t.}\ C(X_{i+1}) \in d(C(X_i))$

$(C(X_{i+1}) \in a(C(X_i)))$.

$d^{(0)}(c(x)) = c(x),\quad d^{\nu}(c(x)) = d(d^{\nu-1}(c(x)))\quad \nu=1,2,\cdots$

$a^{0}(c(x)) = c(x),\quad a^{\nu}(c(x)) = a(a^{\nu-1}(c(x)))\quad \nu=1,2,\cdots$.

定義 3.3. $\mathcal{D}(c(x)) \equiv \sum_{\nu\geqq 0} d^{\nu}(c(x))$: $c(x)$ の decendant tree

$\mathcal{A}(c(x)) \equiv \sum_{\nu\geqq 0} a^{\nu}(c(x))$: $c(x)$ の ancestor tree

$\mathcal{D}(\mathcal{U}) \equiv [\mathcal{D}(c(x))\ ;\ c(x) \in \mathcal{U}]$

$\mathcal{A}(\mathcal{U}) \equiv [\mathcal{A}(c(x))\ ;\ c(x) \in \mathcal{U}]$

$[\mathcal{A},\mathcal{D}](\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U} + \mathcal{A}(\mathcal{U}) + \mathcal{D}(\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U}^{(1)}$

$\mathcal{U}^{(n)} \equiv [\mathcal{A},\mathcal{D}](\mathcal{U}^{(n-1)})\quad n \geqq 1$.

$\mathcal{U}^{(0)} \equiv \mathcal{U}$.

系. $\mathcal{U}^{(0)} \leqq \mathcal{U}^{(2)} \leqq \mathcal{U}^{(2)} \leqq \cdots$

$\exists n_0,\ \text{s.t.}\ \mathcal{U}^{(n_0-1)} \lneqq \mathcal{U}^{(n_0)} = \mathcal{U}^{(n_0+1)} = \cdots$

定義 3.4. $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \equiv \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}^{(n)}$: $\mathcal{U}$ の lineage tree

定義 3.5. $c(x)$: stable $\Longleftrightarrow d(c(x)) = \phi$.

ただし. ϕ : 空集合.

定義 3.6. $c(x)$: isolated stable $\Longleftrightarrow a(c(x)) = \phi$

& $d(c(x)) = \phi$.

定義 3.7. $c(x)$: Eden's Garden $\Longleftrightarrow a(c(x)) = \phi$.

$\nexists B_i;\ T_{B_i} c(x) = c(x)$.

補助定理3.1. configuration $C(X)$ に対して

i) $\exists B_i$, s.t $\sum_{x_j \in C(X)|B_i} x_j \equiv 1 \mod 2 \longrightarrow T_{B_i} \cdot C(X) \in d(C(X))$

$\nexists C(X') = C(X),\ T_{B_i} \cdot (C(X')) = C(X)$

ii) $\exists B_i$, s.t $\sum_{x_j \in C(X)|B_i} x_j \equiv 0 \mod 2 \longrightarrow T_{B_i} \cdot C(X) = C(X)$

この場合、(B_iの)(イ) 2つのセルの状態が1で残りが0であるとき、

$\nexists C(X')$ s.t $T_{B_i} \cdot C(X') = C(X)$

(ロ) 4つのセルの状態がすべて1か0であるとき

$\exists$4つの$C(X')$, $T_{B_i} \cdot C(X') = C(X)$.

$m \times n$ 正方形セル空間の stable configurations の一般的パターンは下図によって与えられる。この stable configuration を $(m_1 + m_2 + \cdots + m_p) \times (n_1 + n_2 + \cdots + n_q)$ 型という。

	n_1	n_2		n_q
m_1	O	I	・・・・・	O
m_2	I	O	・・・・・	I
⋮	⋮	⋮	・・・	⋮
m_q	I	O	・・・・	I

$\sum_{i=1}^{p} m_i = m, \quad \sum_{j=1}^{q} n_j = n.$

$m_0 = \max_i \{m_i\}$

$n_0 = \max_j \{n_j\}$

とする。

補助定理3.2. $C(X)$: isolated stable (北川[7]).

$\Longleftrightarrow$ $C(X)$ は次のいずれかである。

(a) $m_0 = n_0 = 1$, (b) $m > m_0 \geqq 2,\ n_0 = 1$

(c) $m_0 = 1,\ n > n_0 \geqq 2$.

補助定理3.3. $m \times n$ セル空間の isolated stable configurations の個数は $2^m + 2^n - 6$ である。

補助定理3.4. $m \times n$ セル空間の stable configurations と Eden's Garden の個数はそれぞれ, 2^{m+n-1} である。

定理3.1. $m \times n$ セル空間の isolated stable ではない任意の configuration $C(X)$ において その decendant tree $\mathcal{D}(C(X))$ は少くとも1つの stable configuration を含む。

i.e., $C(X)$ は適当にLMTを適用すれば, 有限回で stable になる。

定理3.2. (北川[7]). $m \times n$ セル空間において isolated stable configurations を除くすべての configurations は, 1つの lineage tree を形成する。

§4. セル空間における決定部分空間

この節では セル空間 C に対して C の subset が C の決定部分空間 (D.S.) であるための必要十分条件を, 既知の D.S. を用いて求める。

定義4.1. セル空間 C に対して その subset D が C の決定部分空間 (determinative subspace) である

$$\Longleftrightarrow \ {}^{\forall}D(X),\ {}^{\exists 1}C(X) : \text{stable s.t. } C(X)/D = D(X)$$

ただし, $D(X)$ とは, D 上の configuration。

これを $D(X) \sim C(X)$ とかく。

D. S. の存在，例或いは構成法等は論文[3]で詳しく述べている。

<u>補助定理4.1.</u> $D(\mathbb{O}) \sim C(\mathbb{O}), \quad D(\mathbb{1}) \sim C(\mathbb{1})$

(証)

$C(\mathbb{O}), C(\mathbb{1})$: stable $\quad C(\mathbb{O})|D = D(\mathbb{O}), \; C(\mathbb{1})|D = D(\mathbb{1})$

<u>補助定理4.2.</u> $D(X_i) \sim C(X_i) \quad i = 1, 2, \cdots, t$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{t} D(X_i) \sim \sum_{i=1}^{t} C(X_i) \quad \mathrm{mod}\ 2.$$

セル空間 C の各セルに番号をつける。$1 \sim N$。セル i の状態を x_i であらわす。$\# D = n, \quad D = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ とする。

$D(X) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}\}$

$D(X; i_k) = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}}, \overline{x_{i_k}}, x_{i_{k+1}}, \cdots, x_{i_n}\}$

ただし $\overline{x_{i_k}} \equiv 1 - x_{i_k}$.

<u>定義4.3.</u> $E_D(i_k) \; (\subset C)$: i_k-elementary subset w.r.t D

$\Longleftrightarrow D(\mathbb{O}; i_k) \sim C(X_k)$ とする，$k = 1, 2, \cdots, n$.

$i \in E_D(i_k) \quad \text{if} \quad x_i = 1$

$i \notin E_D(i_k) \quad \text{if} \quad x_i = 0$

ただし，$x_i = C(X_k)|i$ 。 この $C(X_k)$ を $C(E_D(i_k))$ とかく。

<u>補助定理4.3.</u> $\forall D(X), \quad \forall i_k \in D, \quad D(X) \sim C(X)$

$$\longrightarrow D(X; i_k) = C(X) + C(E_D(i_k)) \quad \mathrm{mod}\ 2.$$

$(\because)\quad D(X;i_k) = D(X) + D(0;i_k)$

補助定理4.2より $D(X;i_k) \sim C(X) + C(E_D(i_k))$.

一般に

<u>補助定理4.4.</u> $^\forall D(X)$, $\quad D(X) \sim \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} C(E_D(i_k)) \mod 2$

ただし, $D(X) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}\}$.

$(\because)\quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{i_k} D(0;i_k) \quad \mod 2$

$\therefore\ D(X) \sim \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} C(E_D(i_k)) \quad \mod 2$

(注). 補助定理4.3は, i_k以外のDのセルの状態をfixしたとき, i_kの状態と, $E_D(i_k)$の任意のセルの状態が1対1に対応していることを示している。

$A = \{j_l\,;\, l = 1, 2, \cdots, m\} \subset C$: 任意のsubset.

Aの各セルj_lに対して

$$\varepsilon_k^{j_l} = \begin{cases} 1 & j_l \in E_D(i_k) \\ 0 & j_l \notin E_D(i_k) \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$M_D(A) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{j_1} & \varepsilon_2^{j_1} & \cdots & \varepsilon_n^{j_1} \\ \varepsilon_1^{j_2} & \varepsilon_2^{j_2} & \cdots & \varepsilon_n^{j_2} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_1^{j_m} & \varepsilon_2^{j_m} & \cdots & \varepsilon_n^{j_m} \end{pmatrix} : m \times n \text{ matrix}$$

を導入する。 このmatrixを用いて 次の定理が得られる。

<u>定理4.1.</u> $^\forall D$: given (CのD.S.)

$A = \{j_l\,;\, l = 1, 2, \cdots, n\}$がCのD.S.であるための必十条

件は、　rank $M_D(A) = n$　である。

(∵) (必要性)　$D(X) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$

補助定理4.4より　$D(X) \sim \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} C(E_D(i_k))$

$$A(Y) = \{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_n}\} = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} C(E_D(i_k)) \,|\, A$$

$$\therefore y_{j_l} = \varepsilon_1^{j_l} x_{i_1} + \varepsilon_2^{j_l} x_{i_2} + \cdots + \varepsilon_n^{j_n} x_{i_n}$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

AとDは D.S. であるから、　rank $M_D(A) = n$.

(十分性) rank $M_D(A) = n$ とすると、

$D(X)$ と $A(Y)$ の間に1対1対応があり、DはD.S.だから、　AもまたD.S.である。

§5 正三角形セル空間の決定部分空間の大きさ

北川の論文[5]において、"正三角セル空間における任意の凸多角形(convex polygon)の決定部分空間の大きさは、その境界にあるセルの個数に等しい"ことが証明された。この節では、一般の有限セル空間に対しても、この定理が成り立つことを証明する。

<u>定義5.1.</u>　セル空間U : connected to V

$\Longleftrightarrow$ ∃at least one (u, v) $u \in U$ $v \in V$, uはvとadjacent.

<u>定義5.2.</u>　セル空間U : connected

$\Longleftrightarrow$ $\forall W \subseteq C$,　W : connected to $(U - W)$　ただし $W \neq \Lambda, C$.

<u>定義5.3.</u>　セル空間$\mathcal{V}$: animal
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{V}$: finite connected or $\mathcal{V}=\{u\}$, i.e. 1つのセルから成る。
任意に指定された方向Hに関して丁度n個のrowから成るanimalをn-row animal (H)という。以下次の記号を用いる。$\mathcal{W}$をセル空間とする。

$P(\mathcal{W})$: $\mathcal{W}$の境界にあるすべてのセルの集合.
$D(\mathcal{W})$: $\mathcal{W}$のあるD.S.に属するすべてのセルの集合.
$|\mathcal{W}|$: $\mathcal{W}$に属するすべてのセルの個数.

<u>定理5.1</u>　正三角形を単位セルとする任意の有限セル空間Cに対してCの決定部分空間の大きさは，Cの境界にあるすべてのセルの個数に等しい，i.e. $|P(C)|=|D(C)|$.

(証明)

任意の有限セル空間は an animalであるか，又は異なるanimals (C_i, $i=1,2,\cdots,t$)の集合である。後者の場合，各animalの可能なすべてのbasic cell spaceの集合は，他のanimalのそれらと互いにdisjointである。故に各animalのD.S.の存在と$|P(C_i)|=|D(C_i)|$ $i=1,2,\cdots,t$が証明されれば，全体のセル空間$C\left(=\sum_{i=1}^{t}C_i\right)$のD.S.の存在は明らかであり，又．$|D(C)|=\sum_{i=1}^{t}|D(C_i)|$と$|P(C)|=\sum_{i=1}^{t}|P(C_i)|$から$|D(C)|=|P(C)|$が得られる。従って$C$がan animalの場合に定理を証明す

ればは十分である。 animal C はある方向 H に関して n-row animal であるとする。証明は row の数 n についての数学的帰納法による。

(i) $n=1$. 1-row animal は basic cell space を含んでいないので，$D(C)$ は C のすべてのセルから成り，これは $P(C)$ に他ならない。 $\therefore |D(C)| = |P(C)|$.

(ii) $n = r+1$. r-row 以下の animal に対して，定理が成り立つと仮定する。この仮定の元に，$(r+1)$-row animal に対して証明する。$(r+1)$-row animal を C_{r+1} で表わす。C_{r+1} を一番上位にある row と残りの r 個 row（C_r で表わす）に分割する。仮定より

$$(1) \qquad |P(C_r)| = |D(C_r)|.$$

$A^{(r+1)} \equiv \{R_i^{(r+1)}; i=1,2,\cdots,k_{r+1}\}$: $C_{r+1}-C_r$ のすべての 1-row animal の集合.

$A^{(r)} \equiv \{R_j^{(r)}; j=1,2,\cdots,k_r\}$: C_r-C_{r-1} のすべての 1-row animal の集合.

各 $R_i^{(r+1)}$ は少くとも1つの $A^{(r)}$ に属する animal と adjacent である。$A_l^{(r+1)}$ を，丁度 l 個の $A^{(r)}$ の animal と adjacent である $A^{(r+1)}$ に属する animal の集合とする。

$$A^{(r+1)} = A_1^{(r+1)} + A_2^{(r+1)} + \cdots, \quad A_l^{(r+1)} \cap A_{l'}^{(r+1)} = \Lambda \quad l \neq l'.$$

(A) $l=1$ の場合.

$R_i^{(r+1)} \in A_1^{(r+1)}$ と adjacent な唯一の $A^{(r)}$ の animal を $R_{j_i}^{(r)}$ とする。$R_i^{(r+1)}$ の少くとも１つのセルを含むすべての basic cell space の集合を B_i とかく。$R_i^{(r+1)}$ を次の互いに disjoint な部分 $R_{i1}^{(r+1)}$ と $R_{i2}^{(r+1)}$ に分割する。

$$R_{i1}^{(r+1)} = \{u \,;\, u \in B_i - R_{j_i},\ \exists v \in R_{j_i},\ u \text{ と } v \text{ は adjacent}\}$$
$$R_{i2}^{(r+1)} = R_i^{(r+1)} - R_{i1}^{(r+1)}.$$

明らかに $R_{i1}^{(r+1)}$ は an animal であり、$R_{i2}^{(r+1)}$ は an animal か two animals である。この分割のとり方により、

(2) $|D(C_r + R_i^{(r+1)})| = |D(C_r + R_{i1}^{(r+1)})| + |D(R_{i2}^{(r+1)})|.$

(3) $|P(C_r + R_i^{(r+1)})| = |P(C_r + R_{i1}^{(r+1)})| + |P(R_{i2})|.$

一方，$R_{i2}^{(r+1)}$ は $R_{j_r}^{(r)}$ と connect ではないので；

(4) $|D(R_{i2}^{(r+1)})| = |P(R_{i2}^{(r+1)})|.$

$$S_i^{(r+1)} \equiv \{u : u \in R_i^{(r+1)},\ \exists v \in R_{j_i}^{(r)},\ u \text{ と } v \text{ は adjacent}\}$$
$$T_i^{(r+1)} \equiv \{u \,;\, u \in S_i^{(r+1)},\ u \text{ の状態は } R_{j_i}^{(r)} \text{ によって唯一に定まる。}\}$$

次の３つの場合がありうる。

(A−I) $|S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}|.$

(A−II) $|S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}| + 1$

(A−III) $|S_i^{(r+1)}| = |T_i^{(r+1)}| + 2.$

(A−I) の場合，次の式が得られる

(5) $|P(C_r + R_{i1}^{(r+1)})| = |P(C_r)| + 1.$

(6) $|D(C_r + R_{i1}^{(r+1)})| = |D(C_r)| + 1.$

(1) 〜 (6) より

(7) $|D(C_r + R_i^{(r+1)})| = |D(C_r + R_i^{(r+1)})|.$

以下 このような手法により (A−II), (A−III) 又 (B) $l=2$ (C) $l \geqq 3$ の場合について証明する。以下の証明は論文[6]を参照。次の系はこの定理より，すぐに得られる。

系. 任意の有限セル空間 C において $|P(C)| = n$ ならば C の可能な stable configurations の個数は 2^n 個である。

例. Fig.5.1 は 12-row animal である。$|P(C)| = 45$. D.S. の1つの例が 0 によって表わされている。

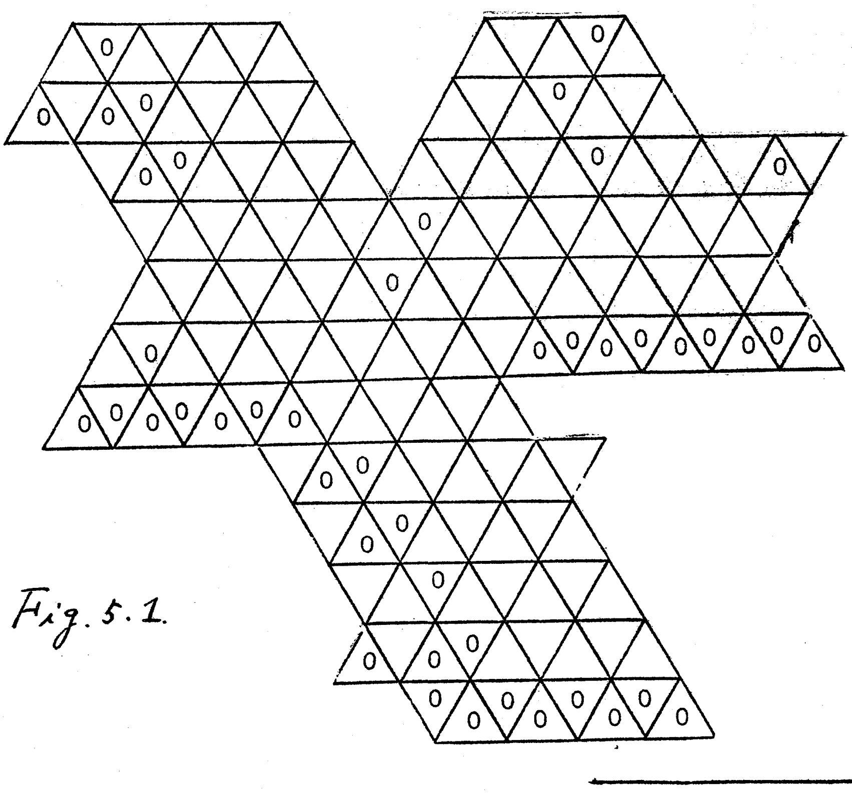

Fig. 5.1.

Reference

[1] Kitagawa, T.: Cell Space Approaches in Biomathematics, Advances in Biophysics, Vol.5 (1972) (to appear).

[2] Kitagawa, T.: Prolegmena to Cell Space Approaches, IV, RR. No.12, December, 1970; Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 26, No.1 (1971).

[3] Kitagawa, T. and Yamaguchi, M.: Determinative Subspace for Stable Configuration under Local Majority Transformations on Cell Space, VI, RR. No.15, December, 1970; Bull. Math. Stat.,15, No.3/4 (1973) (to appear).

[4] Kitagawa, T.: The Second Prolegomena to Cell Space Approaches, VII, RR. No.16, December, 1970; Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 26, No.1 (1971).

[5] Kitagawa, T.: The Size of Generative Determinative Subspace of Convex Polygon in a $\Delta^{(n)}$ Cell Space, IX, RR. No.18, January, 1972; Bull. Math. Stat., 15, No.3/4 (1973) (to appear).

[6] Yamaguchi, M.: The Size of Determinative subspace of Polygon in Triangular Cell Space, XI, RR. No.21 (to appear).

[7] Kitagawa, T.: Generative and Genealogical Classifications of all the Configurations in m×n Cell Space under Applications of Local Majority Transformation, XIII, RR. No.23, March, 1972; Bull. Math. Stat., 15, No.1/2 (1972).