数理解析研究所講究録
第156巻 1972年 230-247

有限状態逐次決定過程とその決定問題

京大・工学部　茨木俊秀

1. まえがき

いわゆる最適化問題（Optimization Problem）は，各分野で，さまざまな形で研究されている。しかし，とくに問題が離散的あるいは組合せ問題的な性格をもつとき，そのFormulationおよび解法に関する統一的な扱いは難しく，問題個別の議論に終始せざるを得ないのが現状のようである。

ここでは，そのような最適化問題の多くが（有限状態）逐次決定過程の形式に記述できる[2]ことに着目し，動的計画法（Dynamic Programming）[1]の適用可能性および可解性の立場から，逐次決定過程の種々のクラスを提案し，その統一的な把握を試みる。逐次決定過程の各クラスに対して，表現し得る最適化問題の範囲は異なり，また，その解法（最適方策すなわち最適解を求める）の難易度も変化する。これは，ある意味で対応する最適化問題のComplexityの階層を与えているとも解釈することができる。この点を明らかにするため，

以下，2種の表現定理を逐次決定過程の各クラスについて議論し，同時に，その可解性（最適方策を求めるアルゴリズムの存在）を調べる。また，状態数の最小化および関連した各種決定問題についても議論する。この種の決定問題のあるものは決定可能であるが，多くは決定不可能となる。なお，紙面の都合上，証明はすべて省略し，結果のみを記す。

2. 定義

最適化問題はすべて離散的決定過程（ddp）の形式に書かれていると考える。ddp $\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}=(\Sigma, \mathfrak{S}, f)$ である。ただし，Σ は基本的決定の有限集合，Σ^* を Σ の要素を連接（Concatinate）して得られる方策（Policy）の全体とする。とくに $\varepsilon\in\Sigma^*$ は零系列である。$\mathfrak{S}\subset\Sigma^*$ は許容方策（Feasible Policies）の集合，$f:\mathfrak{S}\to E$（E は実数の集合）は各方策のコストを与える関数である。$x\in\mathfrak{S}$ が $(\forall y\in\mathfrak{S})(f(x)\leq f(y))$ をみたすとき $\mathfrak{X}$ の最適方策（Optimal Policy）といいその全体を $O(\mathfrak{X})$ と記す。また，f が $\Sigma^*\to Z$（Z は整数の集合）で $\overbrace{\mathfrak{S}}^{\text{正規集合}}$ を Domain としてもつ部分帰納的関数であるとき，$\mathfrak{X}$ は帰納的 ddp（r-ddp）であるという。

有限オートマトン（fa）はシステム $M=(Q, \Sigma, q_0, \lambda, Q_F)$ である。ただし，Q は状態の有限集合，Σ は有限アルファベット，

$q_0 \in Q$ は初期状態，$\lambda: Q \times \Sigma \to Q$ は状態遷移関数，$Q_F \subset Q$ は最終状態の集合である。λ は $\varepsilon, x, y \in \Sigma^*$ に対して，$\lambda(q, \varepsilon) = q$，$\lambda(q, xy) = \lambda(\lambda(q, x), y)$ とすることによって $\lambda: Q \times \Sigma^* \to Q$ と考えることができる。また，$F(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \bar{\lambda}(x) \in Q_F\}$，$\bar{\lambda}(x) = \lambda(q_0, x)$，とする。

さて，<u>逐次決定過程</u>（sdp）はシステム $\Pi = (M, h, \xi_0)$ である。ただし，M は fa，$h: E \times Q \times \Sigma \to E$ はコスト関数，$\xi_0 \in E$ は初期状態 q_0 のもつコストの初期値である。h は $h(\xi, q, \varepsilon) = \xi$；$(\forall x, y \in \Sigma^*)(h(\xi, q, xy) = h(h(\xi, q, x), \lambda(q, x), y))$ によって $h: E \times Q \times \Sigma^* \to E$ に拡張できる。とくに，$\bar{h}(x) = h(\xi_0, q_0, x)$ と置く。Π の許容方策の集合は $F(\Pi) = F(M)$ によって与えられる。最適方策の集合は $O(\Pi) = \{x \in F(\Pi) \mid (\forall y \in F(\Pi))(\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y))\}$ である。sdp $\Pi = (M, h, \xi_0)$ の $h: Z \times Q \times \Sigma \to Z$ が定義域 $L_\Pi = \{(\bar{h}(x), \bar{\lambda}(x), a) \mid x \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}$ をもつ部分帰納的関数ならば，<u>帰納的 sdp</u>（r-sdp）という。つまり，r-sdp ではすべての方策 $x \in \Sigma^*$ に対してそのコスト $\bar{h}(x)$ が計算可能である（$\bar{h}: \Sigma^* \to Z$ は帰納的）。sdp あるいは r-sdp は有限状態をもつ確定的な決定過程の一般的な表現形式である。

sdp Π が $(\forall \xi_1, \xi_2 \in E)(\forall q \in Q)(\forall a \in \Sigma)(\xi_1 \geq \xi_2 \Rightarrow h(\xi_1, q, a) \geq h(\xi_2, q, a))$，あるいは r-sdp Π が $(\forall (\xi_1, q, a), (\xi_2, q, a) \in L_\Pi)(\xi_1 \geq \xi_2 \Rightarrow h(\xi_1, q, a) \geq h(\xi_2, q, a))$ の条件をみたすとき，それ

ぞれ単調sdp（msdp），単調r-sdp（r-msdp）という。これらに対して，つぎのような動的計画法の関数方程式が成立する[2]。すなわち，$G(q)=\min\{\bar{h}(x)\mid\bar{\lambda}(x)=q\in Q\}$とするとき（minimumの存在を仮定），

$$G(q_0)=\min[\xi_0,\ \min\{h(G(q'),q',a)\mid\lambda(q',a)=q_0\}]$$

$$G(q)=\min\{h(G(q'),q',a)\mid\lambda(q',a)=q\},\ q\neq q_0$$

が成立する。この関数方程式が解ければ

$$\min\{G(q)\mid q\in Q_F\}$$

が最適方策$x\in O(\Pi)$のコスト$\bar{h}(x)$である。このようにmsdp（あるいはr-msdp）は動的計画法の適用できる確定的決定過程の一般的な表現形式である。

つぎに，msdpΠが$(\forall\xi_1,\xi_2\in\Xi)(\forall q\in Q)(\forall a\in\Sigma)(\xi_1>\xi_2\Rightarrow h(\xi_1,q,a)>h(\xi_2,q,a))$，あるいはr-msdp$\Pi$が$(\forall(\xi_1,q,a),(\xi_2,q,a)\in L_\Pi)(\xi_1>\xi_2\Rightarrow h(\xi_1,q,a)>h(\xi_2,q,a))$をみたすとき，それぞれsmsdp，r-smsdp（Strictly Monotone sdp, r-sdp）という。さらに，msdpΠが$(\forall\xi\in E)(\forall q\in Q)(\forall a\in\Sigma)(h(\xi,q,a)\geq\xi)$，あるいはr-msdp$\Pi$が$(\forall(\xi,q,a)\in L_\Pi)(h(\xi,q,a)\geq\xi)$をみたすとき，それぞれpmsdp，r-pmsdp（Positively Monotone sdp, r-sdp）という。最後に，msdpΠあるいはr-msdpΠが$F(\Pi)$: finiteをみたすとき，それぞれlmsdp，r-lmsdp（Loop-Free msdp, r-msdp）であるという。

以上の msdp (r-msdp) の Subclasses に対して，後述するように，多くの決定問題が決定可能となる。

さて，ddp Υ に対して，sdp Π が $O(\Pi)=O(\Upsilon)$ をみたすとき，Π は Υ を弱表現するという。Υ を弱表現する sdp Π で最小数の状態をもつものを最小弱表現という。また，Π が $F(\Pi)=F(\Upsilon)$, $(\forall x\in F(\Pi))(\bar{h}(x)=f(x))$ をみたすとき，Υ の強表現であるという。Υ を強表現する sdp Π で最小数の状態をもつものを最小強表現という。$\Pi_1=(M_1, h_1, \xi_{01})$, $\Pi_2=(M_2, h_2, \xi_{02})$ を sdp とする。$O(\Pi_1)=O(\Pi_2)$ のとき，Π_1 と Π_2 は弱等価，また，$F(\Pi_1)=F(\Pi_2)\wedge(\forall x\in F(\Pi_1))(\bar{h}_1(x)=\bar{h}_2(x))$ ならば，強等価であるという。最後に，$\Omega_{sdp}=\{O(\Pi)\mid \Pi: sdp\}$ とする。すなわち，$O(\Upsilon)\in\Omega_{sdp}\Longleftrightarrow\Upsilon$ を弱表現する sdp Π 存在。以上の概念は，sdp の他のクラスについても同様に定義できる。

3．ddp および msdp の例

ddp，msdp の具体例については[2]に詳しい。代表的なものとして最短経路問題，行商人問題，種々のスケジューリング問題，Cutting Stock 問題などがある。

例 3.1　$\Gamma=(N,A)$ を節点集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，枝の集合 $A=N\times N$ をもつ完全グラフとし，d_{ij} を枝 (i,j) の長さとする。$N_0\subset N$ に対して，節点1から出発し，N_0 の各節点を少、

とも1回経由し，節点 N に至る最短経路を見出す問題を考える。$N_0=\phi$ ならば通常の最短経路問題，$N_0=N$ ならば行商人問題に等しい。

さて，$\Sigma=\{1,2,\cdots,n\}$ とし，$i\in\Sigma$ を"現在の節点から節点 i へ進む"という基本的決定と解釈する。この時，上の問題は ddp $\mathcal{Y}=(\Sigma,\mathcal{S},f)$ に等しい。ただし，$\mathcal{S}=\{x\in\Sigma^*\mid x=i_1i_2\cdots i_k n\wedge\{1,i_1,\cdots,i_k,n\}\supset N_0\}$，$f(x=i_1i_2\cdots i_k n)=d_{1i_1}+d_{i_1i_2}+\cdots+d_{i_kn}$ である。

つぎに $\mathcal{Y}$ を強表現する sdp Π を考える。$(B,i)=\{i_1i_2\cdots i_k i\mid\{1,i_1,\cdots,i_k,i\}\cap N_0=B\}$ とする。$\Pi=(M,h,\xi_0)$ の M を $Q=\{[B,i]\mid B\subset N_0,\ i\in N\}$，$q_0=[\phi,1]$，$Q_F=\{[N_0,n]\}$，

$$\lambda([B,i],j)=\begin{cases}[B\cup j,j] & \text{if } j\in N_0\\ [B,j] & \text{otherwise}\end{cases}$$

によって与える。明らかに $(B,j)=\{x\mid\bar{\lambda}(x)=[B,j]\}$ であるから $F(\Pi)=\mathcal{S}$ を得る。そこで，$\xi_0=0$，$h(\xi,[B,i],j)=\xi+d_{ij}$ とすれば，$(\forall x\in\mathcal{S})(\bar{h}(x)=f(x))$ が成立する。よって，Π は $\mathcal{Y}$ を強表現する。また，h の構造より，Π は msdp である。msdp Π から得られる動的計画法の関数方程式は，この種の問題を解く一つのアルゴリズムを与える[3]。

4. sdp とその subclasses に対する弱表現定理[4]

Σ^*上の同値関係Rが<u>右不変</u>であるとは$(\forall x, y\in\Sigma^*)(xRy \Rightarrow (\forall z\in\Sigma^*)(xzRyz))$の成立することをいう。同値関係Rが$B\subset\Sigma^*$を<u>細分</u>するとは，$(\forall x,y\in\Sigma^*)(xRy\Rightarrow(x\in B\Leftrightarrow y\in B))$の成立することである。Bを細分する右不変同値関係の全体を$\Lambda(B)$とする。$B\subset\Sigma^*$に対して，R_Bを$(\forall x,y\in\Sigma^*)(xR_By\Leftrightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(xz\in B\Leftrightarrow yz\in B))$によって定義する。$R_B\in\Lambda(B)$。$R\in\Lambda(B)$で$|\Sigma^*/R|<\infty$をみたすものの全体を$\Lambda_F(B)$と書く。$\Lambda_F(B)\neq\emptyset\Leftrightarrow B$: 正規集合，また，任意の$T\in\Lambda_F(B)$に対して，fa M_Tを作り$F(M_T)=B$とすることができることが知られている。

$\Phi=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$を互いに素な$B_i\subset\Sigma^*$の族とする。$R\in\Lambda(\Sigma^*)$が$\Phi$を<u>J-分離</u>するとは，$xRy\wedge x\in B_i\wedge y\in B_j\Rightarrow i=j$の成立することである。(すなわち，Rの各同値類はたかだか1個のB_iと交わる。)

<u>定理4.1</u>　ddp Υがsdpによって弱表現される必要十分条件は，$\mho/R_\mho$, $\mho\equiv O(\Upsilon)$, をJ-分離する$T\in\Lambda_F(\Sigma^*)$の存在することである。

$\mho\subset\Sigma^*$に対して，Σ^*上の2項関係$\lessdot_\mho$を$(\forall x,y\in\Sigma^*)(x\lessdot_\mho y\Rightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(yz\in\mho\Rightarrow xz\in\mho))$によって定義する。つぎに$R\in\Lambda(\mho)$に対して，$\lessdot_\mho$を$B/R$, $B\subset\Sigma^*$, に拡張する。すなわ

ち，$(\forall A_i, A_j \in B/R)(A_i \precsim_{\mho} A_j \Leftrightarrow (\forall x \in A_i)(\forall y \in A_j)(x \precsim_{\mho} y))$。$\precsim_{\mho}$ はΣ^*, Σ^*/R 上の擬順序であり，とくに$R=R_{\mho}$の場合半順序となる。$B \subset \Sigma^*$ が$\mho$に関して単調であるとは$(\forall x, y \in B)(x \precsim_{\mho} y \vee y \precsim_{\mho} x)$の成立することをいう。

定理 4.2　ddp Υ が msdp によって弱表現される必要十分条件はつぎの条件をみたす $T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$ の存在することである。(i) Tは$\mho/R_{\mho}$, $\mho \equiv O(\Upsilon)$, をJ-分離する。(ii) すべての$C_j \in \Sigma^*/T$は$\mho$に関して単調。

例題 4.1　ddp $\Upsilon=(\Sigma, S, f)$を，$\Sigma=\{a,b\}$, $S=\{a^i b^j \mid i \ge 0, j \ge 0\}$

$$f(a^i b^j)=\begin{cases} i-j & \text{if } i>j \\ 0 & \text{if } j \ge i, \end{cases}$$

によって定義する。明らかに，$O(\Upsilon)(\equiv \mho)=\{a^i b^j \mid j \ge i\}$。$\Sigma^*/R_{\mho}$は同値類：$A_i=\{a^i\}$, $i=0,1,\cdots$, $B_0=\{a^i b^j \mid j \ge i, j>0\}$, $B_i=\{a^k b^j \mid k-j=i, j>0\}$, $i=1,2,\cdots$, $D=\Sigma^*-\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i-\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$，から成る。とくに，$\mho/R_{\mho}=\{A_0, B_0\}$。よって，$T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$を$\Sigma^*/T=\{C_0, C_1\}$, $C_0=\{\varepsilon\}$, $C_1=\Sigma^*-C_0$によって定義すれば，Tは$\mho/R_{\mho}$をJ-分離する。つまり，Υはsdpによって弱表現可能。つぎに，$\Sigma^*/R_{\mho}$上での$\precsim_{\mho}$を図示すると図1を得る。ここで，$T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$を$\Sigma^*/T=\{C_0, C_1\}$, $C_0=\{a^i \mid i \ge 0\}$, $C_1=\Sigma^*-C_0$，によって定義すると（図1参照），Tは定理4.2の条件を満足するからΥはmsdpによって弱表現可能。

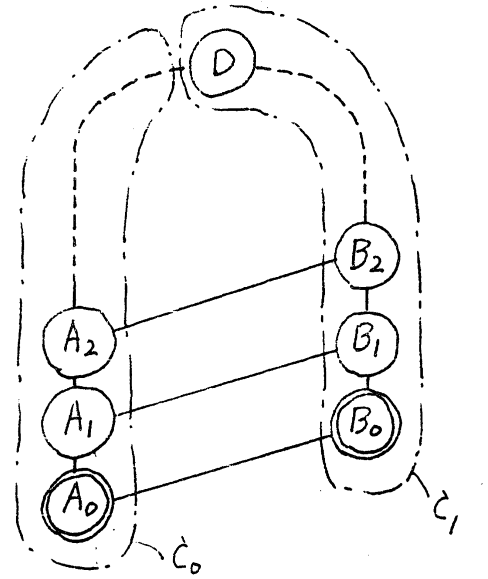

図1. $U=\{a^i b^j \mid j \geq i\}$ に対する半順序 $\prec_U$.

<u>例題4.2</u> $\{a^i b^j \mid j \geq i\}$, $\{a^i b^j \mid i=j \geq 0\} \in \Omega_{sdp}$. $\{a^i b^j \mid i \geq j\} \notin \Omega_{sdp}$. $\{a^i b^j c \mid j \geq i\}$, $\{a^i b^j c \mid i=j\}$, $\{a^i b^j c \mid i \geq j\} \in \Omega_{sdp}$. $\{a^i b^j \mid j \geq i\} \in \Omega_{msdp}$. $\{a^i b^j \mid i=j\}$, $\{a^i b^j \mid i \geq j\} \notin \Omega_{msdp}$. $\{a^i b^j c \mid j \geq i\}$, $\{a^i b^j c \mid i \geq j\} \in \Omega_{msdp}$, $\{a^i b^j c \mid i=j\} \notin \Omega_{msdp}$.

<u>定理4.3</u> ddp Υ が smsdp (pmsdp) によって弱表現される必要十分条件は $O(\Upsilon)$: 正規集合である。

<u>定理4.4</u> ddp Υ が lmsdp によって弱表現される必要十分条件は $O(\Upsilon)$: Finite である。

5. sdp とその Subclasses に対する強表現定理

ddp $\Upsilon=(\Sigma, S, f)$ に対し，同値関係 R_Υ を $xR_\Upsilon y \Leftrightarrow xR_S y \wedge (\forall xz \in S)(f(xz)=f(yz))$ によって定義する。また，$p \in E$ に対して，$\Phi_p=\{T_j \mid T_j \in S/R_\Upsilon \wedge (\forall x \in T_j)(f(x)=p)\}$ とする。

<u>定理5.1</u> [2][4] ddp $\Upsilon=(\Sigma, S, f)$ が sdp によって強表現される必要十分条件は，すべての $p \in E$ に対して，Φ_p を J-分離するような $T \in I_F(S)$ の存在することである。

つぎに，ddp Υ に対し，擬順序 $\prec_\Upsilon$ を $x \prec_\Upsilon y \Leftrightarrow x R_\zeta y \wedge (\forall xz \in \zeta)(f(xz) \le f(yz))$ によって定義する。$B \subset \Sigma^*$ が Υ に関し単調であるとは $(\forall x, y \in B)(x \prec_\Upsilon y \vee y \prec_\Upsilon x)$ の成立することをいう。

定理 5.2 [2][4]　ddp $\Upsilon = (\Sigma, \zeta, f)$ が msdp によって強表現される必要十分条件は，つぎの条件をみたす $T \in \Lambda_F(\zeta)$ の存在することである。(i) T はすべての $p \in E$ に対して 亜$_p$ を J-分離する。(ii) 各 $C_j \in \Sigma^*/T$ は Υ に関し単調である。

ddp $\Upsilon = (\Sigma, \zeta, f)$ に対し，擬順序 $\trianglelefteq_\Upsilon$ を $x \trianglelefteq_\Upsilon y \Leftrightarrow x R_\zeta y \wedge ((\forall xz \in \zeta)(f(xz) < f(yz)) \vee x R_\Upsilon y)$ によって定義する。$B \subset \Sigma^*$ が Υ に関し強単調であるとは，$(\forall x, y \in B)(x \trianglelefteq_\Upsilon y \vee y \trianglelefteq_\Upsilon x)$ の成立することをいう。

定理 5.3 [4]　ddp $\Upsilon = (\Sigma, \zeta, f)$ が smsdp によって強表現される必要十分条件は，つぎの条件をみたす $T \in \Lambda_F(\zeta)$ の存在することである。(i) T はすべての $p \in E$ に対して，亜$_p$ を J-分離する。(ii) 各 $C_j \in \Sigma^*/T$ は Υ に関し強単調である。

ddp $\Upsilon = (\Sigma, \zeta, f)$ と $T \in \Lambda_F(\zeta)$ に対して，つぎのようなグラフ $\Gamma_{\Upsilon;T}$（一般には無限グラフ）を定義する。(1) 各 $A_i \in Y$ $(\equiv \Sigma^*/R_\Upsilon \wedge T)$ に対して，$\Gamma_{\Upsilon;T}$ に節点 A_i が存在する。(2) $\Gamma_{\Upsilon;T}$ はつぎの 3 種の枝をもつ。(a) $A_i, A_j \in Y$ に対し，$A_i \neq A_j \wedge A_i T A_j \wedge A_i \prec_\Upsilon A_j$ あるいは $A_i \neq A_j \wedge A_i, A_j \subset \zeta \wedge f(A_i) < f(A_j)$

ならば(A_i, A_j)は$\Gamma_{\Upsilon;T}$のタイプAの枝である。(b) $A_i \neq A_j \wedge A_i, A_j \subset S \wedge f(A_i) = f(A_j)$ならば$(A_i, A_j)$はタイプBの枝である。(c) $(\exists a \in \Sigma)(A_i a \subset A_j)$ならば$(A_i, A_j)$はタイプCの枝である。

$\Gamma_{\Upsilon;T}$の閉路でタイプAの枝を含むものはI-閉路(Inconsistent閉路)と呼ばれる。

定理5.4[4] ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f)$がpmsdpに強表現される必要十分条件は、$\inf\{f(x) \mid x \in S\} > -\infty$であり、かつつぎの条件をみたす$T \in \Lambda_F(S)$の存在することである。(i) Tはすべての$p \in E$に対し$\Phi_p$をT-分離する。(ii) 各$C_j \in \Sigma^*/T$は$\Upsilon$に関し単調. (iii) $\Gamma_{\Upsilon;T}$はI-閉路を持たない。

定理5.5[4] ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f)$がlmsdpに強表現される必要十分条件は、S: Finiteである。

6. r-sdpとそのSubclassesに対する弱表現定理[5][6]

sdp, msdp, ⋯をr-sdp, r-msdp, ⋯, とすると、§4で述べた弱表現定理の条件も変化する。r-sdp, r-msdp, r-pmsdp, r-lmsdpに対しては、§4の定理をそのまま拡張することができるが、r-msdpに対しては直接の拡張はできないことが分かっている。

定理6.1 r-ddp Υがr-sdpによって弱表現される必要十分条件は、$U, R_U, U \equiv \mathcal{I}(\Upsilon)$, をT-分離する$T \in \Lambda_F(\Sigma^*)$の存在す

ることである。

<u>定理 6.2</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-msdp によって弱表現される必要十分条件は $\mho(\equiv O(\Upsilon))=\phi$ あるいはつぎの条件をみたす帰納的関数 $h':\Sigma^*\to \mathbb{Z}$ の存在することである。(i) $(\forall x,y\in\Sigma^*)(xTy\wedge h'(x)\leq h'(y)\Rightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(h'(xz)\leq h'(yz)))$, (ii) $(\forall x\in\mho)(h'(x)=h^*)\wedge(\forall x,y\in\Sigma^*)(x\in\mho\wedge y\notin\mho\wedge xTy\Rightarrow h'(x)<h'(y))$。ただし，$h^*$ は定数。

<u>定理 6.3</u>　r-ddp Υ が r-smsdp (r-pmsdp) によって弱表現される必要十分条件は $O(\Upsilon)$: 正規集合，である。

<u>定理 6.4</u>　r-ddp Υ が r-lmsdp によって弱表現される必要十分条件は $O(\Upsilon)$: Finite, である。

7、r-sdp とその Subclasses に対する強表現定理[5][6]

強表現の場合，r-sdp, r-smsdp, r-lmsdp に対して §5の結果をそのまま拡張することができるが，r-msdp, r-pmsdp に対しては直接の拡張はできないことが分かっている。

<u>定理 7.1</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-sdp によって強表現される必要十分条件は，すべての $p\in\mathbb{Z}$ に対して亜$_p$ を J-分離するような $T\in\Lambda_F(S)$ の存在することである。

<u>定理 7.2</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-msdp によって強表現される必要十分条件は，つぎの条件をみたす $T\in\Lambda_F(S)$ および帰納的

関数 $h':\Sigma^*\to Z$ の存在することである。(i) $(\forall x,y\in\Sigma^*)(xTy\wedge h'(x)\le h'(y)\Rightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(h'(xz)\le h'(yz)))$, (ii) $(\forall x\in S)(h'(x)=f(x))$.

<u>定理 7.3</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-smsdp によって強表現される必要十分条件は，つぎの条件をみたす $T\in\Delta_F(S)$ の存在することである。(i) T はすべての $p\in Z$ に対して，Φ_p を T-分離する。(ii) 各 $C_j\in\Sigma^*/T$ は Υ に関し強単調である。

<u>定理 7.4</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-pmsdp によって強表現される必要十分条件は，つぎの条件をみたす $T\in\Delta_F(S)$ および帰納的関数 $h':\Sigma^*\to Z$ の存在することである。(i) $(\forall x,y\in\Sigma^*)(xTy\wedge h'(x)\le h'(y)\Rightarrow(\forall z\in\Sigma^*)(h'(xz)\le h'(yz)))$。(ii) $(\forall x,z\in\Sigma^*)(h'(x)\le h'(xz))$。(iii) $(\forall x\in S)(h'(x)=f(x))$。

<u>定理 7.5</u>　r-ddp $\Upsilon=(\Sigma,S,f)$ が r-lmsdp によって強表現される必要十分条件は，S: Finite，である。

8．最適方策の集合の性質 [4][5][6]

Ω_{sdp}, Ω_{msdp}, ⋯等と形式言語のクラスとの関係を図2に示す。ここで $\Omega_{r\text{-}sdp}=\Omega_{sdp}\cap$(帰納的集合のクラス)が成立するが，$\Omega_{r\text{-}msdp}\subsetneqq\Omega_{msdp}\cap$(帰納的集合のクラス)であることに注意しておこう。また，$\Omega_{smsdp}=\Omega_{pmsdp}=\Omega_{r\text{-}smsdp}=\Omega_{r\text{-}pmsdp}=$(正規集合のクラス)，$\Omega_{lmsdp}=\Omega_{r\text{-}lmsdp}=$(有限集合のクラス)である。

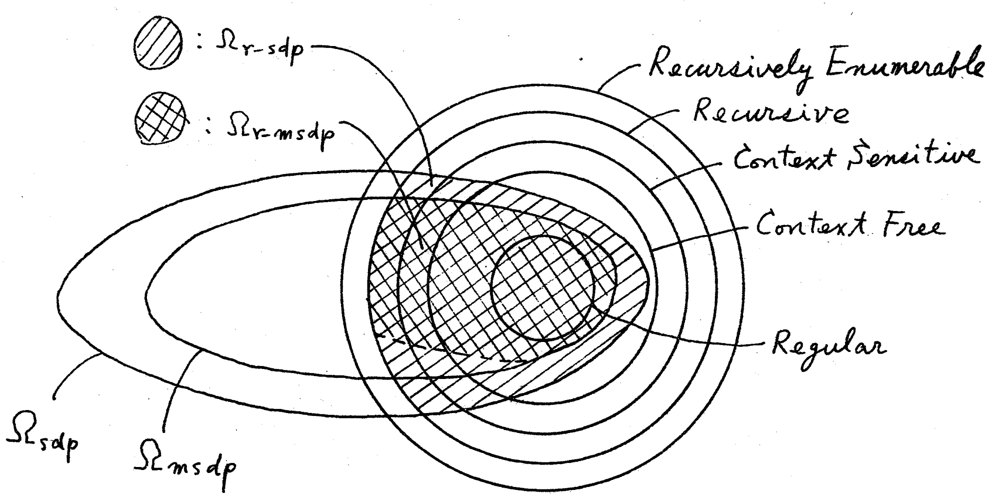

図2　最適方策の集合と形式言語のクラスとの関係

9、最適方策決定のアルゴリズム

本節ではr-sdpの各クラスに対する2種のアルゴリズムの存在を議論する。アルゴリズムAはそのクラスの任意のr-sdp Πに対して $O(\Pi)\neq\phi$かどうかを決定し，$O(\Pi)\neq\phi$ならば $x\in O(\Pi)$を少なくとも1個見出すもの，アルゴリズムBは$O(\Pi)\neq\phi$かどうかの決定の後，すべての$x\in O(\Pi)$（$O(\Pi)$の正規表現）を与えるものである。アルゴリズムの存在するものに対して，具体的なアルゴリズムは[6]に記されている。なお，sdp, msdp, … 等については$h(x)$の計算可能性さえ保証されていないので，アルゴリズムの存在を論ずることは無意味である。

2.4.4

定理9.1[5] 任意の r-sdp (r-msdp) Π に対するアルゴリズムA およびアルゴリズムBはいずれも存在しない。

定理9.2[5] 任意の r-smsdp (r-pmsdp or r-lmsdp) Π に対してアルゴリズムA，アルゴリズムBの両者が存在する。

この種のアルゴリズムを議論するとき，文献[5]に定義された r-msdp の部分クラス r-imsdp (Invertible r-msdp) が興味深い。r-imsdp Π に対しては，$O(\Pi)=\phi$ かどうかは決定不可能であるが，$O(\Pi)\neq\phi$ の仮定の下で $x\in O(\Pi)$ を求めるアルゴリズムが存在する。

実際の最適化問題においては，通常，最適方策を求めることが第一の目的である。したがって，本節の結果から，少なくとも r-smsdp, r-pmsdp, r-lmsdp 程度に表現しなければ意味がないことが分かる。r-msdp に対して，アルゴリズムA, Bが存在しないことは，動的計画法に定式化できることと，最適方策を計算する手段とは別物であることを示唆している。

10、最小弱表現および最小強表現[7]

一般に最適方策を求めるアルゴリズム（存在する場合）は，状態数の小さい程早く収束する。この意味で最小弱（強）表現を求めることは実用上重要である。以下では，最小弱（強）表現を求めるアルゴリズムを，与えられた r-sdp のクラスの

Πと弱(強)等価な同じクラスの最小sdpを求めるアルゴリズムと考えている。

定理10.1　任意のr-sdp(r-msdp)Πに対して最小弱表現を与えるアルゴリズムは存在しない。

定理10.2　任意のr-smsdp (r-pmsdp or r-lmsdp)Πに対して最小弱表現を与えるアルゴリズムが存在する.

定理10.3　任意のr-sdp (r-msdp, r-smsdp or r-pmsdp)Πに対して最小強表現を与えるアルゴリズムは存在しない。

定理10.4　任意のr-lmsdp Π に対して最小強表現を与えるアルゴリズムが存在する。

11、その他の決定問題[5]

まだ述べていない決定問題のいくつかを表1にまとめる。たとえば，1,2の結果は与えられた任意の最適化問題に動的計画法ができるかどうかを決定する一般的なアルゴリズムは存在しないことを示している。

表1. r-sdpの各クラスに対する決定問題

	決定問題	r-sdp	r-msdp	r-smsdp	r-pmsdp	r-lmsdp
1	$\mathcal{I}$を弱表現するΠ存在?	u	u	u	u	u
2	$\mathcal{I}$を強表現するΠ存在?	u	u	u	u	S
3	Πは$\mathcal{I}$を弱表現するか?	u	u	u	u	u

4	Π は Σ を強表現するか?	U	U	U	U	S
5	Π_1 と Π_2 弱等価?	U	U	S	S	S
6	Π_1 と Π_2 強等価?	U	U	U	U	S
7	r-msdp Π_1 と弱等価な Π_2 存在?	T	T	U	U	U
8	r-msdp Π_1 と強等価な Π_2 存在?	T	T	U	U	S

注　U：決定不可能,　S：決定可能,　T：Trivial

なお, 文中の Σ は r-ddp、指定のない Π, Π_i 等は右欄の各列に対応するクラスの r-sdp を示す。

謝辞

日頃ご指導いただく京都大学三根久教授に深謝いたします。

文献

[1] R. E. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press., 1957.

[2] R. M. Karp and M. Held, "Finite-state processes and dynamic programming," SIAM J. of Applied Math. 15, 693-718, 1967.

[3] T. Ibaraki, "Algorithms for obtaining shortest paths visiting specified nodes," to appear in SIAM Review.

[4] ——, "Representation theorems for equivalent optimization problems," to appear in Information

and Control.

[5] ——, "Classes of discrete optimization problems and their decision problems," to be published.

[6] ——, "Discrete optimization problems for which optimal policies are computable: solvable classes of dynamic programming," to be published.

[7] ——, "Minimal representations of some classes of dynamic programming," to be published.