数理解析研究所講究録
第159巻 1972年 69-89

一次元Heisenberg模型における定差方程式の解

神戸大 教育　加藤 祐輔
神戸大 理　麦林 布道
明星大 理工　関根 克彦

有限個のスピンより成る一次元Heisenberg模型において，ハミルトニアンの固有値問題は，附加条件のついた定差方程式を解く問題に帰着する．以下では，逆転したスピン二個の場合の定差方程式を系統的に解いて，可能な全部の解を求め，いわゆるBethe ansatzによる解［1］［2］との比較を行なう．

§1. ハミルトニアン

一次元Heisenberg模型は，元来は強磁性体の模型として考えられたものであるが，数学的には，次のようなハミルトニアンを与えることによって定義できる：

(1.1)
$$H = -\sum_{j=1}^{N} (\vec{S}_j \vec{S}_{j+1} - \tfrac{1}{4}).$$

ただし $\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$ とし，$\vec{S}_j$ （ $j = 1, 2, \cdots, N$ ）は

$$\vec{S}_j = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \tfrac{1}{2}\vec{\sigma} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

ここに I は 2×2 の単位行列，$\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ は Pauli 行列で，上の Kronecker 積の j 番目の因子としてあらわれるものとする．なお，因子の総数は N で，N は 3 以上の自然数としておく．

$\vec{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ の各成分はいずれも 2^N 次の行列，従ってハミルトニアン H も 2^N 次の行列であるから，状態ベクトルのヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ はこの場合 2^N 次元のベクトル空間である．これは，$S^z = \sum_{j=1}^{N} S_j^z$ の固有空間の直和に分解される：

（1．2） $$\mathfrak{H} = \oplus_{r=0}^{N} \mathfrak{H}_r$$

ここに $\mathfrak{H}_r$ は，S^z の固有値 $\frac{N}{2} - r$ に対応する固有空間をあらわす．これを sector とよぶ．$\mathfrak{H}_r$ の次元は ${}_N C_r$ に等しい．

$[S^z, H] = 0$ であるから，ハミルトニアン H の固有値問題は各 sector 毎に解くことが出来る．すなわち，

（1．3） $$H|\Phi_r\rangle = E|\Phi_r\rangle, \qquad |\Phi_r\rangle \in \mathfrak{H}_r.$$

§2．定差方程式

$\mathfrak{H}_r$ のベクトル $|\Phi_r\rangle$ は次の形の一次結合である：

（2．1） $$|\Phi_r\rangle = \sum a(m_1, \cdots, m_r)\,|m_1, \cdots, m_r\rangle.$$

ここに，$|m_1, \cdots, m_r\rangle = S^-_{m_1} \cdots S^-_{m_r}|0\rangle$，$S^-_j = S^x_j - i S^y_j$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$．各 m_j は1からNまでの整数値をとり，$m_1 < m_2 < \cdots < m_r$ とする．

とくに，$|\Phi_0\rangle = a|0\rangle$ $(a \in \mathbb{C})$ で，Ω_0 はベクトル $|\Phi_0\rangle$ のはる一次元の部分空間である．物理的には，$|0\rangle$ はN個のスピンが全部上をむいた状態，$|m_1, \cdots, m_r\rangle$ は，m_1 番目，…m_r 番目のスピンが逆転して下をむいている状態をあらわす．

(2.1)を(1.3)に代入することにより，係数 a（以下これを波動関数とよぶ）にたいする方程式が得られる．これは，Bethe [1]に従って次の形に書かれる：

(2.2) $$E a(m_1, \cdots, m_r) = \frac{1}{2}\sum_{m_1' \cdots m_r'}\left[a(m_1, \cdots, m_r) - a(m_1', \cdots, m_r')\right].$$

ただし，ここでは，各 m_j はすべての有理整数値をとるものとし，そのかわり次の周期性条件をおく：

(2.3) $$a(m_1, m_2, \cdots, m_r) = a(m_2, \cdots, m_r, m_1 + N).$$

また(2.2)の和は，$(m_1, \cdots, m_r)$ のうちのどれか一つ m_j を $m_j \pm 1$ として得られる $(m_1', \cdots, m_r')$ のあらゆる可能性にわたってとる．

とくに $r = 1$ の場合，(2.2)(2.3)はそれぞれ

(2.4) $$E a(m) = a(m) - \frac{1}{2}a(m+1) - \frac{1}{2}a(m-1),$$

(2.5) $$a(m) = a(m+N), \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

となる.

$l=2$ の場合には, $m_2-m_1=1$ または $N-1$ のとき(これは逆転した二個のスピンが隣りあっているときである),

(2.6) $$Ea(m_1, m_2) = a(m_1, m_2) - -\frac{1}{2}a(m_1-1, m_2) - \frac{1}{2}a(m_1, m_2+1).$$

$m_2-m_1 \neq 1, N-1$ のときは,

(2.7) $$Ea(m_1, m_2) = 2a(m_1, m_2) - -\frac{1}{2}a(m_1+1, m_2) - \frac{1}{2}a(m_1-1, m_2) - -\frac{1}{2}a(m_1, m_2+1) - \frac{1}{2}a(m_1, m_2-1).$$

一方, 周期性条件(2.3)は,

(2.8) $$a(m_1, m_2) = a(m_2, m_1+N)$$

となる. ここで, 波動関数 $a(m_1, m_2)$ は, 次のような集合 $D \subset \mathbb{Z}^2$ の上で定義されていると考える:

(2.9) $$D = \{(m_1, m_2) \mid 1 \leqslant m_2 - m_1 \leqslant N-1\}.$$

§3. $l=1$ の場合の解. マグノン.

$l=1$, すなわち逆転したスピンを一個含む場合の解は, 附加条件(2.5)を考慮して一変数の定差方程式(2.4)を解くことによって得られる. その結果は, よく知られており,

(3.1) $$E = 1 - \cos k$$

(3.2) $$a(m) = e^{ikm}$$

ここに

(3.3) $$k = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

である．従って，全部でN個の独立な固有関数がある．

これらの解は，通常，運動量がkの自由なスピン波，またはマグノンをあらわすと解釈される．すなわち，自由なマグノン一個の状態は，ハミルトニアンの固有状態になっており，その運動量は(3.3)のように量子化されている．

§4. $r=2$の場合の解

この場合は，附加条件(2.8)を考慮して，二変数の定差方程式(2.6)(2.7)を解くことが問題である．

まず，方程式系(2.6)−(2.8)が次の変換

(4.1) $$U : \quad a(m_1, m_2) \longmapsto a(m_1+1, m_2+1)$$

にたいして不変であることに注目し，Uの固有値問題を先に解く．変数を

(4.2) $$M = m_1 + m_2, \qquad \mu = m_2 - m_1$$

に変え，$a(m_1, m_2) = A(M, \mu)$と書くと，Uの固有値問題は，

(4.3) $$A(M+2, \mu) = \nu A(M, \mu)$$

と書かれる．ここで，新しい変数の変域は，

$$M = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad ; \quad \mu = 1, 2, \cdots, N-1$$

であることに注意しておく.

方程式(4.3)は, 各μ毎にMにかんする一変数定差方程式で, 簡単に解ける:

$$(4.4)\qquad A(M,\mu) = \nu^{\frac{M}{2}} A(0,\mu)$$
(Mが偶数のとき)
$$= \nu^{\frac{M-1}{2}} A(1,\mu)$$
(Mが奇数のとき)

ここで, 周期性条件(2.8)を用いる. これは新しい変数で

$$(4.5)\qquad A(M,\mu) = A(M+N, N-\mu)$$

と書かれるから, 二回くりかえして用いると,

$$A(M,\mu) = A(M+2N,\mu).$$

一方, (4.3)から

$$A(M+2N,\mu) = \nu^N A(M,\mu).$$

故に, $\nu^N = 1$. これより,

$$(4.6)\qquad \nu = e^{iK}$$

$$(4.7)\qquad K = \frac{2\pi n}{N} \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

が出る.

こうして, $r = 2$ sector は次のような直和に分解される:

$$(4.8)\qquad \mathfrak{H}_2 = \oplus_{n=0}^{N-1} \mathfrak{H}_{2,n}$$

ここに$\mathfrak{H}_{2,n}$は, Uの固有値 $\nu = e^{i\frac{2\pi n}{N}}$ にぞくする固有空間である. これらを, subsector とよぶことにする.

次に，各subsector毎に，ハミルトニアンの固有値問題，つまり（2.6）−（2.8）を解く．

波動関数（4.4）は，まとめて，

（4.9）　$A(M,\mu) = \nu^{\frac{M}{2}}[\, c^{+}(\mu) + (-1)^{M} c^{-}(\mu)\,]$

の形に書くことが出来る．ここに，

$$c^{\pm}(\mu) = \frac{1}{2}[\, A(0,\mu) \pm \nu^{-\frac{1}{2}} A(1,\mu)\,].$$

ところが，$(-1)^{M+\mu} = (-1)^{2m_2} = 1$ だから，

（4.10）　$(-1)^{M} = (-1)^{\mu}$

という関係がある．これを用いると，（4.9）の右辺は変数分離出来て，

（4.11）　$A(M,\mu) = \nu^{\frac{M}{2}} c(\mu)$

のように書かれる．ここで，

$$c(\mu) = c^{+}(\mu) + (-1)^{\mu} c^{-}(\mu)$$

である．

（4.11）を（2.6）−（2.8）に代入することにより，$c(\mu)$ にたいする方程式が得られる．まず，（2.6）からは，

（4.12）　$\lambda c(2) + (E-1)c(1) = 0,$

（4.12a）　$\lambda c(N-2) + (E-1)c(N-1) = 0.$

ただし，

（4.13）　$\lambda = \frac{1}{2}(\nu^{\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{2}}) = \cos\frac{K}{2}.$

また，（2.7）から，

(4.14) $\lambda c(\mu+1)+(E-2)c(\mu)+\lambda c(\mu-1)=0$

$(\mu=2,3,\cdots,N-2)$

さいごに周期性条件(2.8)は，

(4.15) $c(\mu)=\eta c(N-\mu)$

$(\mu=1,2,\cdots,N-1)$

を与える．ただし，

(4.16) $\eta=\nu^{\frac{N}{2}}=e^{i\frac{K}{2}N}$

(4.7)を用いると $\eta=(-1)^n$ であり，これは一種のパリティを定義する．(4.15)により，内部波動関数 $c(\mu)$ は，even か odd かの定まったパリティをもつ．

$\underline{\lambda=0}$

これは $K=\pi$ のときであり，Nが偶数の場合にのみ生ずる．

このとき，(4.12)(4.12a)から，

$$(E-1)c(1)=(E-1)c(N-1)=0.$$

(4.14)から，

$$(E-2)c(\mu)=0 \quad (\mu=2,3,\cdots,N-2).$$

従って，一つの解は，

(4.17) $E=1,\quad c(2)=\cdots=c(N-2)=0$

である．このほかに，

(4.18) $E=2,\quad c(1)=0=c(N-1)$

であるような解がある．その独立なものの個数は，$\eta=+1$

なら $\frac{N}{2}$ 個, $\eta=-1$ なら $\frac{N}{2}-1$ 個である.

$\lambda \neq 0$

このとき, (4.14) は λ でわった形:

$$(4.19) \qquad c(\mu+1)+\frac{E-2}{\lambda}c(\mu)+c(\mu-1)=0$$

にしておく. この形の定差方程式については, その一般解が知られている [3]. 対応する特性方程式

$$(4.20) \qquad x^2+\frac{E-2}{\lambda}x+1=0$$

を考え, その二根を ω, ω^{-1} とすると, 根と係数の関係から,

$$(4.21) \qquad E=2-\lambda(\omega+\omega^{-1})$$

(i) 特性方程式の二根 ω, ω^{-1} が相異なる場合. (4.19) の一般解は,

$$c(\mu)=C_1\omega^{\mu}+C_2\omega^{-\mu}$$

であるが, パリティ確定の条件 (4.15) を考慮すれば,

$$(4.22) \qquad c(\mu)=\mathrm{const.}\left(\omega^{\frac{N}{2}-\mu}\pm\omega^{-\frac{N}{2}+\mu}\right),$$

$$(\eta=\pm 1 \text{ にたいし})$$

一方, (4.12) から, (4.21) を考慮して,

$$\lambda=\frac{c(1)}{(\omega+\omega^{-1})c(1)-c(2)}$$

この右辺に (4.22) を代入すると,

$$(4.23) \qquad \lambda=\frac{\omega^{\frac{N}{2}-1}\pm\omega^{-\frac{N}{2}+1}}{\omega^{\frac{N}{2}}\pm\omega^{-\frac{N}{2}}} \qquad (\eta=\pm 1)$$

が得られる．各 subsector で λ と η の値は知られているから，（4.23）は ω をきめる方程式になる．

（ii）特性方程式が等根をもつ場合．これは $\omega=\pm 1$ の場合である．（4.19）の一般解は，

$$c(\mu) = \omega^{\mu}(C_1+\mu C_2)$$

で与えられるが，（4.12）および（4.15）を考慮すると，次の場合があり得る：

（ii a）　$c(\mu) = \mathrm{const}.$

この解は $K=0$ のとき，従って $\lambda=1$，$\eta=1$ のときだけ存在し，$\omega=+1$ である．従って，（4.21）から $E=0$．

（ii b）　$c(\mu) = \mathrm{const}.\,(\pm 1)^{\mu}\left(1-\frac{\mu}{2N}\right)$

この解は，

（4.24）　$\lambda = \pm\left(1-\frac{2}{N}\right)$

の関係が満たされるとき生ずる．複号は，$\omega=\pm 1$ に対応する．

ところが，（4.24）の関係を満足する $\lambda=\cos\frac{n\pi}{N}$（$n=1, 2, \cdots, N-1$）は実は存在しないこと，従って（ii b）の形の解は存在しないことが証明できる．

実際，$\frac{n\pi}{N}=\varphi$ とおくと，

（4.25）　$\cos\varphi = \pm\left(1-\frac{2}{N}\right)$，

（4.26）　$\cos N\varphi = (-1)^n$，

であるが，この二式が同時に成り立つことは，Nが3以上の自然数である限り決しておこらない．以下，三つの場合に分けてこのことを証明する．

(1) Nが奇数の場合．$\cos N\varphi$は一般に有理整数を係数にもつ$\cos\varphi$の多項式であらわされるが，Nが奇数ならこの多項式は奇数次の項だけから成り，定数項を含まない．従って，$x = \frac{1}{\cos\varphi}$とおくと，(4.26)から，$x$の満たす代数方程式が得られるが，その係数はすべて有理整数で，しかも最高次の項の係数を1に出来る．これは，xが代数的整数であることを意味する．ところで，整数論のよく知られた定理により，代数的整数が有理数ならそれは有理整数でなければならない[4]．一方，(4.25)から $x = 1 + \frac{2}{N-2}$ で，これが有理整数になるのは，3以上の奇数については，$N = 3$ だけである．しかし，$N = 3$ で $\cos\varphi = \pm\frac{1}{3}$ のとき $\cos 3\varphi \neq \pm 1$，すなわち(4.26)は成立しない．従って，Nが奇数である限り，(4.25)(4.26)が同時に成り立つことは決してない．

(2) $N = 2M$ でMが偶数の場合．このとき，(4.26)ならば $\cos M\varphi = 0$ であり，$\cos M\varphi$は有理整数を係数にもつ$\cos\varphi$の多項式で，定数項がある．この定数項は，$\frac{M}{2}$が偶数か奇数かに応じて± 1であることが知られている．従って，(1)と同様に考えて，$x = \frac{1}{\cos\varphi}$ は代数的整数であり，もし有理

数なら有理整数でなければならない．一方，(4.25) から $x = 1 + \frac{2}{N-2}$．これが有理整数になるのは，偶数については $N = 4$ だけであるが，このとき (4.26) が成立しないことは直接確かめられる．

(3) $N = 2M$ で M が奇数の場合．(4.26) は $\cos M(2\varphi) = \pm 1$ と書け，M が奇数だから，(1) の場合と同様に考える．しかしこの場合は，$y = \frac{1}{\cos 2\varphi}$ が有理数なら有理整数でなければならないことが導かれる．ところが (4.25) から，

$$y = \frac{1}{2\cos^2\varphi - 1} = \frac{M^2}{M^2 - 4M + 2}$$

で，これが有理整数になるのは $M = 3$ のときだけであり，しかもこのとき (4.26) が成立しないことが示せる．

以上を綜合して，N が 3 以上の任意の自然数であるとき，(4.25)(4.26) は根をもたないことが証明出来た．従って，(4.24) の関係は決して実現されず，方程式系 (4.12)(4.14)(4.15) には (iib) の形の解はない．

§5. 解の分類と解釈．完全性

5.1. $\lambda \neq 0$ の解の分類と解釈

$\lambda \neq 0$ で，特性方程式 (4.20) が相異なる二根をもつ (i) の場合を最初に考える．このとき ω は，

(5.1) $$\omega = e^{ik}, \qquad 0 < k < \pi,$$

または

(5.2) $\qquad \omega = \pm e^{v}, \qquad v > 0,$

の形に書けることが示せる．これは，ω と ω^{-1} が実係数の二次方程式の二根であり，しかも互いに異なるということから出る．

(5.1) の形の解にたいしては，

(5.3) $\qquad c(\mu) = \mathrm{const.}\left[e^{ik\left(\frac{N}{2}-\mu\right)} \pm e^{-ik\left(\frac{N}{2}-\mu\right)} \right].$

ここで，

(5.4) $\qquad k_1 = \dfrac{K}{2} + k, \qquad k_2 = \dfrac{K}{2} - k$

とおくと，全波動関数は，

(5.5) $$a(m_1, m_2) = A(k_1, k_2)\, e^{ik_1 m_1 + ik_2 m_2} + B(k_1, k_2)\, e^{ik_1 m_2 + ik_2 m_1}$$

の形に書かれる．これは，運動量が k_1, k_2 の二個のスピン波（マグノン）が存在する状態をあらわす．一方，エネルギー固有値は，

(5.6) $\qquad E = 2 - \cos k_1 - \cos k_2$

で与えられる．この形の解を一般に *unbound state solution* とよぶ．

二個のマグノンの相対運動量 k をきめるには，(4.23) に (5.1) を代入して得られる次の式

(5.7) $\qquad \lambda = \dfrac{\cos\left(\frac{N}{2}-\mu\right)k}{\cos\frac{N}{2}k} \qquad (\eta = +1)$

$$(5.8) \qquad \lambda = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}-\kappa\right)k}{\sin\frac{N}{2}k} \qquad (\eta = -1)$$

を用いる.

(5.7) の右辺を $f^+(k)$ と書くと,

$$(5.9) \qquad I^+ = \{\, k \mid 0<k<\pi,\ -1 < f^+(k) \leqq 1 \,\}$$

は次のような和集合としてあらわされる:

$$(5.10) \qquad I^+ = \bigcup_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} I_{2m-1} \qquad (N\text{が偶数のとき})$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\frac{N-3}{2}} I_{2m-1} + \mathring{I} \qquad (N\text{が奇数のとき})$$

ここに, $I_n = \left]\frac{n}{N-1}\pi, \frac{n+1}{N-1}\pi\right]$, $\mathring{I} = \left]\frac{N-2}{N-1}\pi, \pi\right[$ である.

$f^+(k)$ は, すべての半開区間 I_{2m-1} においては -1 から 1 まで, $\mathring{I}$ においては -1 から $-(1-\frac{2}{N})$ まで変る真増加関数である. このことから, (5.7) は, N が偶数なら $-1<\lambda\leqq 1$ の範囲のどの $\lambda \neq 0$ にたいしても $\frac{N}{2}-1$ 個の根をもつこと, N が奇数なら, $-1<\lambda<-(1-\frac{2}{N})$ の範囲の λ にたいしては $\frac{N-1}{2}$ 個, $-(1-\frac{2}{N})<\lambda\leqq 1$ の範囲の $\lambda \neq 0$ にたいしては $\frac{N-3}{2}$ 個の根をもつことがわかる.

同様に (5.8) の右辺を $f^-(k)$ と書くと,

$$(5.11) \qquad I^- = \{\, k \mid 0<k<\pi,\ -1 < f^-(k) \leqq 1 \,\}$$

は次のようにあらわされる:

$$(5.12) \qquad I^- = \bigcup_{m=0}^{\frac{N}{2}-2} I_{2m} + \mathring{I} \qquad (N\text{が偶数のとき})$$

$$= \bigcup_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} I_{2m} \qquad (N\text{が奇数のとき})$$

$f^-(k)$は，I_0を除くすべてのI_{2m}において-1から1まで，I_0では$1-\frac{2}{N}$から1まで，$\mathring{I}$では-1から$-(1-\frac{2}{N})$まで変る真増加関数である．従って(5.8)は，Nが偶数なら，$-(1-\frac{2}{N})<\lambda<1-\frac{2}{N}$の範囲の$\lambda\neq 0$にたいしては$\frac{N}{2}-2$個，$-1<\lambda<-(1-\frac{2}{N})$および$1-\frac{2}{N}<\lambda\leqq 1$の範囲の$\lambda$にたいしては$\frac{N}{2}-1$個の根をもつ．$N$が奇数なら，$-1<\lambda<1-\frac{2}{N}$なる$\lambda\neq 0$にたいして$\frac{N-1}{2}$個，$1-\frac{2}{N}<\lambda\leqq 1$なる$\lambda$にたいしては$\frac{N-3}{2}$個の根をもつ．

次に，(5.2)の形の解にたいしては，

$$c(\mu) = \mathrm{const.}\,(\pm 1)^{\mu}\cosh\left(\frac{N}{2}-\mu\right)v, \tag{5.13}$$

または，

$$= \mathrm{const.}\,(\pm 1)^{\mu}\sinh\left(\frac{N}{2}-\mu\right)v.$$

ここで，確率をあらわす$|c(\mu)|^2$を計算してみると，これは$\mu=1,\ N-1$のところで最大値をとる．このことはBetheによって，二つの逆転したスピンが近づいて"結合状態"をつくる傾向を示すものと解釈された．

この結合状態のエネルギーは，

$$E_b = 2 - 2\cos\frac{K}{2}\cosh v \tag{5.14}$$

で与えられ，同じKの値をもつ unbound state のエネルギー(5.6)すなわち$E(k)=2-2\cos\frac{K}{2}\cos k$よりもつねに低い．

ここに得られた解を，bound state solution of Bethe

type とよぶことにする.

(4.23)の右辺を$h^{\pm}(\omega)$と書くと, $h^{+}(\omega)$は, 区間 $]1,\infty[$においてはNの偶奇に関係なく1から0まで変る真減少関数, $]-\infty,-1[$ではNが偶数なら0から−1まで, Nが奇数なら0から$-(1-\frac{2}{N})$まで変る真減少関数である. $h^{-}(\omega)$は, $]1,\infty[$ではNの偶奇に関係なく$1-\frac{2}{N}$から0まで, $]-\infty,-1[$ではNが偶数なら0から$-(1-\frac{2}{N})$まで, Nが奇数なら0から−1まで変る真減少関数である.

従って, $\lambda=h^{+}(\omega)$は, Nが偶数なら$-1<\lambda<1$の範囲のどの$\lambda\neq0$にたいしても必ず一つ, しかもただ一つの根をもつ. Nが奇数なら, $-(1-\frac{2}{N})<\lambda<1$なる$\lambda\neq0$にたいして一つの根をもつ. 同様$\lambda=h^{-}(\omega)$は, Nが偶数のとき$-(1-\frac{2}{N})<\lambda<1-\frac{2}{N}$なる$\lambda\neq0$にたいし, Nが奇数のときは$-1<\lambda<1-\frac{2}{N}$なる$\lambda\neq0$にたいして, 一つの根をもつ.

$\lambda\neq0$の解は, 上に求めた unbound および bound state solution のほかに, 特性方程式(4.20)が等根をもつ場合の解(iia)があるが, これは unbound state solution で$k_1=k_2=0$の特別の場合と考えられる.

5. 2. 解の完全性

$\lambda\neq0$の解は全部求めたので, その総数を調べてみる.

Nが偶数のとき，$\eta=+1$ の解は，unbound および bound state solution あわせて，$-1<\lambda\leqq 1$ の範囲のどの $\lambda\neq 0$ にたいして $\frac{N}{2}$ 個，$\eta=-1$ の解は $\frac{N}{2}-1$ 個である．Nが奇数のときは $\eta=\pm 1$ に関係なくつねに $\frac{N-1}{2}$ 個である．

ところで，Nが奇数のときには $\lambda=0$ の subsector は存在しない．そして，subsector は全部でN個ある．従って，解の総数は $\frac{N-1}{2}\times N={}_NC_2$ で，これは丁度 $r=2$ sector の次元に等しい．これによって，Nが奇数のときの解の完全性が証明できた．

Nが偶数のときは $\lambda=0$ の subsector があり，これに含まれる独立な解の数は，この subsector が $\eta=+1$ なら $\frac{N}{2}$ 個，$\eta=-1$ なら $\frac{N}{2}-1$ 個であった．しかるに，上に見たように，$\lambda\neq 0$ のどの subsector についても，unbound および bound state solution をあわせたものは $\eta=+1$ なら $\frac{N}{2}$ 個，$\eta=-1$ なら $\frac{N}{2}-1$ 個であった．ところで，subsector は全部でN（偶数）個あり，そのうちの半分 $\frac{N}{2}$ が $\eta=+1$，残りの $\frac{N}{2}$ が $\eta=-1$ である．よって，解の総数は，$\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}+\left(\frac{N}{2}-1\right)\times\frac{N}{2}={}_NC_2$ と計算される．これによって，Nが偶数のときも，解の完全性が証明できた．

5．3．$\lambda=0$ の解の分類と解釈

(5.6)において $k_2=\pi-k_1$ にとると，$E=2$ が得られる．一方，(5.3)で $\mu=1,\ N-1$ とおくと

$$c(1)=c(N-1)=\text{const.}\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)k \qquad (\eta=+1)$$

$$c(1)=-c(N-1)=\text{const.}\sin\left(\frac{N}{2}-1\right)k \qquad (\eta=-1)$$

従って，$\eta=+1$ なら

$$k=\frac{2m-1}{\frac{N}{2}-1}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \left(m=1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2}\right)$$

ととることにより，また $\eta=-1$ なら

$$k=\frac{2(m-1)}{\frac{N}{2}-1}\cdot\pi \qquad \left(m=1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1\right)$$

ととることにより，$c(1)=c(N-1)=0$ でしかも $0\leqq k<\pi$ であるような unbound state solution がそれぞれ $\frac{N}{2}$ 個，$\frac{N}{2}-1$ 個得られる．

こうして，(4.18)の形の解は全部，unbound state solution の特別の場合と考えることが出来る．これらのすべての解は縮退して，そのエネルギーは $E=2$ である．

一方(4.17)の形の解については，確率をあらわす $|c(\mu)|^2$ が $\mu=1,\ N-1$ にたいしてのみ0でない値をもつこと，およびエネルギー $E=1$ が，上に求めた unbound state のエネルギー $E=2$ より下にあることから，一種の bound state をあらわすと解釈される．対応する状態ベクトルは，

$$|\Phi\rangle = \mathrm{const} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j S_j^- S_{j+1}^- |0\rangle$$

である．

ところで，この解は，Bethe ansatzによってはあらわすことが出来ない．次にこの点を検討しよう．

§6．Betheの解法との比較

Betheは，(2.6)(2.7)の二種類の定差方程式を一つにまとめて書く方法を提案した．それには，二つの変数 m_1 と m_2 の値が等しいときの波動関数 a を定義して，次の条件が満たされるとする：

(6.1) $\quad a(m, m) + a(m+1, m+1) = 2a(m, m+1)$.

そうすると，(2.6)も(2.7)と同じ形に書くことが出来る．いいかえると，$m_2 - m_1 = 1, N-1$ のときも，$m_2 - m_1 \neq 1, N-1$ のときも，同じ一つの方程式(2.7)が使える．そのかわり，新しい附加条件として(6.1)を課する．

一方，周期性条件(2.8)は，形はそのままだが，$m_2 - m_1 = 0, N$ にたいしても成り立つものと考える．すなわち，

(6.2) $\quad a(m_1, m_2) = a(m_2, m_1 + N), \quad 0 \leqq m_2 - m_1 \leqq N$.

さて，二つの附加条件(6.1)(6.2)がついた定差方程式(2.7)を解くのに，Betheは次のansatzを用いた：

(6.3) $\quad a(m_1, m_2) =$

$$= e^{i(k_1 m_1 + k_2 m_2 + \frac{\varphi}{2})} + e^{i(k_1 m_2 + k_2 m_1 - \frac{\varphi}{2})}$$

(6.4) $$E = 2 - \cos k_1 - \cos k_2$$

ここで k_1, k_2, φ は必ずしも実数でなくてよい．この ansatz が(2.7)を満足することは容易にわかるが，さらに(6.1)(6.2)が成り立つためには，(k_1, k_2, φ) が次の関係を満たせばよい：

(A) $$2\cot\frac{\varphi}{2} = \cot\frac{k_1}{2} - \cot\frac{k_2}{2}$$

(B) $$Nk_1 - \varphi = 2\pi n_1, \quad Nk_2 + \varphi = 2\pi n_2,$$
$$n_1, n_2 = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$-\pi \leqq Re\,\varphi \leqq \pi$$

この(A)(B)を満足する実数の (k_1, k_2, φ) にたいしては，unbound state solution が得られる．また，$k_1 = u + iv$, $k_2 = u - iv$, $\varphi = iNv$（または $iNv \pm \pi$）（ここで u, v は実数）の形の (k_1, k_2, φ) が(A)(B)を満足するとき，それは bound state solution を与える．

ところで，われわれの(4.17)の形の解は，Katsura [2] によって，$v = -\infty$ に相当する(A)(B)の特殊解として分類されているが，厳密には，波動関数(4.17)を Bethe ansatz によってあらわすことは出来ない．実際，(6.3)は，

(6.5) $$a(m_1, m_2) = e^{i\frac{M}{2}K} c(\mu),$$

(6.6) $$c(\mu) = e^{i(\frac{\varphi}{2} - k\mu)} + e^{-i(\frac{\varphi}{2} - k\mu)}$$

と書けるが，この $c(\mu)$ は，

$$c(1) - 2\cos k\, c(2) + c(3) = 0$$

という関係を満たす．従って，もし $c(2) = c(3) = 0$ だったら，必然的に $c(1) = 0$ になってしまう．しかるに問題の解は，$c(1) \neq 0$ で $c(2) = c(3) = 0$ であるようなものであった．

Betheの方法でこの解が求められなかった理由は，(6.5)の形を $\mu = 0$ にたいしてまで要求したことにある．われわれが求めた解は，問題の解(4.17)も含めて，すべて(6.5)の形であるが，われわれはこの式を $\mu = 1, 2, \cdots, N-1$ にたいしてだけ用いた．いま，この式が $\mu = 0$ にたいしても成り立つことを要求してみると，Betheの附加条件(6.1)は $c(1) = \lambda c(0)$ を与える．従って，$\lambda = 0$ なら必然的に $c(1) = 0$．

文　献

[1] H. Bethe, ZS. f. Physik 71 (1931) 205-226.

[2] S. Katsura, Ann. of Phys. 31 (1965) 325-341.

[3] A. O. Guelfond, Calcul des différences finies, Dunod, 1963.

[4] 高木貞治，代数的整数論，岩波書店，1948.