数理解析研究所講究録
第 160 巻 1972 年 12-31

12

Martin境界の拡散方程式への応用

東大理　伊藤清三

§0. 序. RをC^∞-manifoldとし，そこで与えられたRiemanniann metric tensor $\|a_{ij}(x)\|$とvector $\mathbf{b}=\|b_i(x)\|$（いずれもC^2級）で定義される拡散作用素A:

$$Au = div\,\nabla u + \mathbf{b}\cdot\nabla u$$

$$\equiv \sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\sqrt{a(x)}\,a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}$$

を考える．Rの上の実数値有界連続函数の全体C(R)は，ノルム$\|u\|=\sup_{x\in R}|u(x)|$によってBanach空間となる．Rにおける拡散方程式

$$\partial u/\partial t = Au$$

の最小基本解（§1）を$U(t,x,y)$とすると，

$$(U_t f)(x)=\int_R U(t,x,y)f(y)dy \quad (t>0),$$

$$f\in C(R),\quad dy=\sqrt{a(y)}\,dy^1\cdots dy^m\ (m=\dim R),$$

によって定義される$\{U_t\}_{t>0}$は，C(R)における作用素の半群になるが，$\underset{t\downarrow 0}{\text{s-lim}}\, U_t = I$はC(R)では一般に成立しない．

本稿では，$\{U_t\}$をそれが(C_0)級（$\underset{t\downarrow 0}{s\text{-}lim}\, U_t = I$となること）になるような部分空間に制限したものを$\{U_t^0\}$とし，$\{U_t^0\}$の拡張であるような$(C_0)$級正値縮小半群$\{T_t\}$で，拡散方程式の解を与えるもの，すなわち生成作用素がRの内部で局所的には拡散作用素Aで表わされるもの，を求めることを試みる．この問題の正確な記述は§1で与える．

筆者は[5]において，この問題について一応の報告をしたが，そこで仮定した条件（[5]の(2.6)）は最も自然な仮定ではなかった．その仮定のために，本稿§4以後で現われる集合Ⓗが空である場合になっている．本稿§1において述べる仮定(1.7)は，この問題を考えるかぎり必然的といえるものである（補題1.3）．本稿では，集合Ⓗが現われる事情に関連して，[5]では関係のなかった若干の技巧を必要とする．

本稿の内容は，上記のⒽに関係しない準備の部分では[5]と重複するところも多く，また結果の記述も（Ⓗは結果に貢献しないことが証明されるところの集合であるので）[5]と本質的に同じである．しかし，[5]のcirculationは他の引用文献に比べてやゝ劣ると思われるので，本稿では[5]と重複する説明や証明も，紙数の許すかぎり書くことにする．

（なお，[5]の記述に誤りがあったので，本稿§7でそれを訂正する．）

§1. 問題の記述. 今後, $C(R)$ の部分空間 $\mathbf{D}$ の $C(R)$ における強閉包を $\overline{\mathbf{D}}$ と書く. また, $C(R)$ における線形作用素 L の値域, 零空間をそれぞれ $\mathcal{R}(L)$, $\mathcal{N}(L)$ と書く.

まず, R における拡散方程式

$$(1.1) \qquad \partial u/\partial t = Au$$

の最小基本解を構成する手順を述べておく. R のコンパクト部分領域 D で Dirichlet 型境界条件を与えたときの基本解 $U^D(t,x,y)$ は非負値であり, 各点で D とともに単調増加で, $\int_D U^D(t,x,y)dy \leqq 1$ だから, $\lim_{D\uparrow R} U^D(t,x,y) = U(t,x,y)$ が存在し, $U(t,x,y)$ も非負値であって

$$(1.2) \qquad \int_R U(t,x,y)\,dy \leqq 1$$

となる. 任意の $f \in C(R)$ に対して, 函数

$$(1.3) \qquad u(t,x) = (U_t f)(x) = \int_R U(t,x,y)f(y)\,dy \quad (t>0)$$

は拡散方程式 (1.1) と初期条件

$$(1.4) \qquad \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x) \quad (\text{有界かつ広義一様収束})$$

を満たし, (1.3) で定義される $\{U_t\}_{t>0}$ は, $C(R)$ における作用素の正値縮小半群となる (以上については [3] 参照).

特に, 非負値函数 $f \in C(R)$ に対しては, (1.1) と (1.4) とを満たす任意の非負値の解 $u(t,\cdot) \in C(R)$ は, (1.3) で与えられる解より小さくないことが示される. だから上記の基本解 $U(t,x,y)$ を<u>最小基本解</u>と呼ぶ.

次に，半群 $\{U_t\}$ のレゾルベントについて述べる．任意の $\lambda>0$ に対して

(1.5) $$G_\lambda(x,y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t,x,y)\,dt$$

を核とする積分作用素 G_λ（レゾルベント）は，$C(R)$ において $\|G_\lambda\|\leqq 1/\lambda$ なる有界作用素である．さらに，$\{U_t\}$ の半群的性質から，いわゆるレゾルベント方程式

(1.6) $$G_{\lambda_1}-G_{\lambda_2}+(\lambda_1-\lambda_2)G_{\lambda_1}G_{\lambda_2}=0$$

が導かれる．この関係式により，

補題 1.1. i) 任意の λ_1，λ_2 に対して $G_{\lambda_1}G_{\lambda_2}=G_{\lambda_2}G_{\lambda_1}$．

ii) $\mathcal{R}(G_\lambda)$，$\mathcal{N}(I-\lambda G_\lambda)$ は λ に無関係である．

よって，$\mathbf{G}=\overline{\mathcal{R}(G_\lambda)}$（$\lambda$ に無関係）とおくと，$\{U_t\}$ の半群性を使って，次のことが示される：

補題 1.2. $\lim_{t\downarrow 0}\|U_tf-f\|=0$ と $f\in\mathbf{G}$ とは同等である。

そこで，$\{U_t\}$ の $\mathbf{G}$ への制限を $\{U_t^0\}$ とする．このとき，我々の問題は次のように述べられる．

$C(R)\supseteqq\mathbf{E}\supseteqq\mathbf{G}$ なる閉部分空間 $\mathbf{E}$ と，$\mathbf{E}$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ で，次の i)，ii) を満たすものを求める；ただし $\mathbf{E}$ はなるべく広くとるものとする：

i) 任意の $f\in\mathbf{G}$ に対して $T_tf=U_t^0f\ (=U_tf)$，

ii) 任意の $f\in\mathbf{E}$ に対して $u(t)=T_tf$ が $du/dt=Au$（左辺は強微分，右辺は超函数的微分）を満たす．

さて，基本解 $U(t,x,y)$ は非負値であって (1.2) を満たすが，特に (1.2) でつねに等号が成立すると次のことが言える：

補題1.3. $\int_R U(t,x,y)dy \equiv 1$ ($t>0$, $x\in R$ について恒等的に) が成立するならば，前述のような $\mathbf{E}$, $\{T_t\}$ の存在を仮定しても，$\mathbf{E}=\mathbf{G}$, $T_t=U_t^\circ$ (すべての $t>0$ に対して) となる．

証明．恒等的に 1 なる函数を 1 と書く．$0\leqq f\leqq 1$ なる任意の $f\in\mathbf{E}$ に対して，$U(t,x,y)$ が‘最小’基本解だから，

$$0\leqq U_t f\leqq T_t f\leqq 1,\quad 0\leqq U_t(1-f)\leqq T_t(1-f)\leqq 1$$

となるが，この補題の仮定は $U_t 1=1$ を意味するから，

$$1=U_t f+U_t(1-f)\leqq T_t f+T_t(1-f)=T_t 1\leqq 1$$

となる．以上により任意の $f\in\mathbf{E}$ に対して $U_t f=T_t f$，従って $\operatorname{s-lim}_{t\downarrow 0} U_t f=f$ となり $f\in\mathbf{G}$ となるから，$\mathbf{E}=\mathbf{G}$, $T_t=U_t^\circ$ が得られる．

この補題により，本稿の問題は次の条件のもとに考えればよいから，以下本稿全体を通して次のことを**仮定**する：

(1.7) $\int_R U(t,x,y)dy<1$ となる $t>0$, $x\in R$ が存在する．

このとき，基本解の性質を使って，

(1.8) すべての $t>0$, $x\in R$ に対して $\int_R U(t,x,y)dy<1$ となることが示される．

§2. Green函数. 今後，'調和'，'優調和' は作用素 A についての意味とする．~~まず~~

補題2.1. $u\in C(R)$ が正値優調和ならば，函数 $u(t,x) = \int_R U(t,x,y)u(y)dy$ は，x について正値優調和であり，t について単調減少である；従って $0 \leqq \lambda G_\lambda u \leqq u$ となる．

この補題で特に $u\equiv 1$ に対する $u(t,x)$ は，非定数正値優調和函数であることが，(1.8) を使って示されるので，

(2.1) $$G(x,y)=\int_0^\infty U(t,x,y)dt, \quad x\neq y \quad (\text{Green函数})$$

が存在する[3]．$G(x,y)$ を核とする積分作用素 G を

$$\mathfrak{D}(G)=\{u\in C(R) \mid (Gu^\pm)(x)=\int_R G(x,y)u^\pm(y)dy \in C(R)\}$$

において考える．このとき，任意の $u\in\mathfrak{D}(G)$ に対して

(2.2) $$\lambda G_\lambda G u = \lambda G G_\lambda u = Gu - G_\lambda u$$

が示される（(1.6) で $\lambda_2\downarrow 0$ とした形である）．従って

(2.3) $$\mathfrak{R}(G)\subset \boldsymbol{G}.$$

補題2.2. i) 任意の $u\in C(R)$ に対して $(\lambda - A)G_\lambda u = u$.

ii) 任意の $w\in\mathfrak{D}(G)$ に対して $-AGw = w$.

ここで，恒等的に 1 なる函数を 1 と書くことにして，

(2.4) $$\chi_\lambda = 1-\lambda G_\lambda 1 \qquad (\lambda>0)$$

とおく．このとき，補題2.2，(1.8)，(1.6) を使って，

補題2.3. i) R 上で $0<\chi_\lambda<1$，$(\lambda-A)\chi_\lambda=0$；

ii) $\chi_\lambda\in\mathfrak{D}(G)$，$G\chi_\lambda \leqq G_\lambda 1$.

任意の $\lambda>0$ に対して，次の写像 Φ_λ，Ψ_λ を定義する：

(2.5)　$u\in C(R)$ に対して　$\Phi_\lambda u = u-\lambda G_\lambda u$，

(2.6)　$w\in \mathcal{D}(G)$ に対して　$\Psi_\lambda w = w+\lambda G w$．

<u>補題 2.4</u>．$w\in\mathcal{D}(G)$ ならば $\Psi_\lambda\Phi_\lambda w=\Phi_\lambda\Psi_\lambda w = w$．

証明は，(2.2)を使って計算すればよい．

<u>補題 2.5</u>．$u\in C(R)$，$Au=0$ ならば，$w=\Phi_\lambda u$ とおくと，

i)　$(\lambda-A)w=0$，　ii) $|w|\leqq \|u\|\chi_\lambda$，従って $w\in\mathcal{D}(G)$；

iii)　特に $u\geqq 0$ ならば　$w\geqq 0$．

<u>証明の方針</u>．i) は補題 2.2 の i) による．ii) は補題 2.1 と補題 2.3 の ii) からわかる．iii) は補題 2.1 による．

<u>補題 2.6</u>．$(\lambda-A)w=0$ なる条件のもとでは，$w\in\mathcal{D}(G)$ なることと，任意の $\lambda>0$ に対して R 上で $|w|\leqq M\chi_\lambda$ となるような定数 $M=M_{\lambda,w}$ が存在することとは，同等である．そのとき $v=\Psi_\lambda w$ とおくと

i)　$\|v\|\leqq M$，　$Av=0$，　ii) $G_\lambda v = Gw\in\mathcal{R}(G)$；

iii)　特に $w\geqq 0$ ならば　$v\geqq 0$．

<u>証明</u>．$w\in\mathcal{D}(G)$ ならば，$v=\Psi_\lambda w$ とおくと，補題 2.4 により $w=\Phi_\lambda v$，補題 2.2 により $Av=0$；従って補題 2.5 により $|w|\leqq\|v\|\chi_\lambda$ だから，$M=\|v\|$ とすればよい．逆は，補題 2.3 の ii) による．この証明から，後半の i) も言えている．ii) は (2.2) による．iii) は Ψ_λ の定義から明らか．

§3. $\{U_t^0\}$を拡張するための予備的考察. ここでは，§1 に述べたような $\mathbf{E}$, $\{T_t\}$ が得られたとして考える．まず，

(3.1) $$J_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \, dt \quad (\{T_t\} \text{ のレゾルベント})$$

と定義すると，吉田-Hille の理論[7]により，

補題 3.1. $\{J_\lambda\}$ は $\mathbf{E}$ において次の性質をもつ：

(J. 0) $(\lambda - \tilde{A}) J_\lambda = I$ （$\tilde{A}$ は半群 $\{T_t\}$ の生成作用素）；

(J. 1) $J_{\lambda_1} - J_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) J_{\lambda_1} J_{\lambda_2} = 0$；

(J. 2) $J_\lambda \geqq 0$, $\|\lambda J_\lambda\| \leqq 1$, $\mathcal{N}(J_\lambda) = \{0\}$；

(J. 3) 任意の $f \in \mathbf{E}$ に対して $\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda J_\lambda f - f\| = 0$.

逆に $\{J_\lambda\}$ が $\mathbf{E}$ において (J. 1 − 3) を満たせば，$\tilde{A} = \lambda - J_\lambda^{-1}$ は λ に無関係で，$\mathbf{E}$ におけるある (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ の生成作用素となり，(3. 1) および (J. 0) が成立する．

次に，任意の $f \in \mathbf{E}$ に対し，(J. 0) により，超函数の意味で $(\lambda - A) J_\lambda f = f$ （前§参照）. 一方 $(\lambda - A) G_\lambda f = f$ （補題 2.2）. また $\{U_t\}$ の‘最小’性（§1）により，$f \geqq 0$ ならば $J_\lambda f \geqq G_\lambda f$. よって，$w_\lambda = J_\lambda f - G_\lambda f$ とおくと，$(\lambda - A) w_\lambda = 0$ が成立する．特に $0 \leqq f \leqq 1$ ならば $0 \leqq \lambda w_\lambda \leqq \chi_\lambda$ となり，補題 2.3 の ii) により $w_\lambda \in \mathcal{D}(G)$ となる．だから補題 2.6 と 2.4 とによって $v_\lambda = \Psi_\lambda w_\lambda$ が $A v_\lambda = 0$ を満たし，$w_\lambda = \Phi_\lambda v_\lambda$ となる．このことは，$0 \leqq f \leqq 1$ とかぎらず，任意の $f \in \mathbf{E}$ で言えるから，

(3. 2) $$J_\lambda f = G_\lambda f + w_\lambda = G_\lambda f + v_\lambda - \lambda G_\lambda v_\lambda.$$

今後，Rの上の有界調和函数の全体を $\mathcal{H}$ と書く．(3.2)において $v_\lambda \in \mathcal{H}$（前述）であり，吉田-Hille の理論により $\mathbf{E} = \overline{\mathcal{R}(J_\lambda)}$ となるべきだから，

<u>補題3.2.</u> $\mathbf{E}$ は，$\mathbf{G}$ と $\mathcal{H}$ とで張られるところの，$C(R)$ の線形閉部分空間である．

さて，任意の $\lambda > 0$ に対して，$\mathbf{E}$ における作用素 H_λ を

(3.3) $$H_\lambda f = \Psi_\lambda (J_\lambda f - G_\lambda f)$$

によって定義する．このとき，上に述べたことから，

<u>補題3.3.</u> i) H_λ は $\mathbf{E}$ から $\mathcal{H}$ への写像で $\| \lambda H_\lambda \| \leqq 1$.

ii) $f \in \mathbf{G}$ ならば $H_\lambda f = 0$.

今 H_λ を使って(3.2)を書きなおすと，

(3.4) $$J_\lambda f = G_\lambda f + H_\lambda f - \lambda G_\lambda H_\lambda f$$

となる．また(3.4)と補題3.3の ii) および(1.6)を使って計算すると，次の関係式が得られる：

(3.5) $$\begin{aligned} &J_{\lambda_1} - J_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) J_{\lambda_1} J_{\lambda_2} \\ &= (I - \lambda_1 G_{\lambda_1}) [H_{\lambda_1} - H_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) H_{\lambda_1} H_{\lambda_2}] . \end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{E}$，$\{J_\lambda\}$ の形を決定するためには，補題3.2における $\mathbf{G}$ と $\mathcal{H}$ との関係を見なければならない．そのためには $\mathcal{H}$ の構造を調べなければならないので，次の§では，$\mathcal{H}$ の表現法の一つであるところの Martin 境界を使って，$\mathcal{H}$ の構造を（$\mathbf{G}$ との関係において）調べることにする．

§4. Martin境界と有界調和函数. Green函数 $G(x,y)$ の存在(§2)により，Rの A に関する Martin 境界の理論が構成される[4][6]. すなわち，核函数 $K(x,y)$ と，Rの理想境界 $\hat{S}$ を定義し，$\hat{S}=\hat{S}_0+\hat{S}_1$ と適当な方法で分けると，任意の正値調和函数 u は $\hat{S}_1$ の上で一意的に定まる測度 μ_u により

(4.1) $$u(x)=\int_{\hat{S}_1}K(x,y)\,d\mu_u(\xi)$$

と表現される. 今 $u_0\equiv 1$ に対応する μ_{u_0} を単に μ と書くと，

補題4.1. 任意の有界正値調和函数 u に対する測度 μ_u は μ に関して絶対連続であり，その密度函数は有界にとれる.

証明は，(4.1)から $\|u\|\mu-\mu_u\geqq 0$ となることによる.

この補題により，任意の $h\in H$ (正値とはかぎらない)に対して，$\hat{S}_1$ の上の有界可測函数 $\hat{h}$ が μ-a.e. で定まり

(4.2) $$h(x)=\int_{\hat{S}_1}K(x,\xi)\hat{h}(\xi)d\mu(\xi),\quad \|h\|=\operatorname*{ess.sup}_{\xi\in\hat{S}_1}|\hat{h}(\xi)|,$$

が成立する. このとき $h=K\hat{h}$，$\hat{h}=K^{-1}h$ と書くと，K は $L^\infty(\hat{S}_1,\mu)$ から H の上への一対一線形写像である.

次に，$0\leqq u\in H$ ならば U_tu は t について単調減少(補題2.1)だから，任意の $h\in H$ に対して $h_\infty=\lim_{t\to\infty}U_th$ が存在して有界可測，従って $U_th_\infty=\lim_{\tau\to\infty}U_{t+\tau}h=h_\infty$ となるから $h_\infty\in H$. よって $U_\infty h=\lim_{t\to\infty}U_th$ なる U_∞ が H から H の中への作用素として定義されて，任意の $h\in H$ に対して

(4.3) $$\|U_\infty h\|\leqq\|h\|,\quad U_\infty U_\infty h=U_\infty h.$$

さて，$\mathcal{N}(I-\lambda G_\lambda)$ は λ に無関係（補題1.1）であったから，今後それを単に $\mathcal{N}$ と書く．このとき，半群の性質から

<u>補題4.2.</u> $\mathcal{N}=\{h\in\mathcal{H}\mid U_\infty h=h\}$.

従ってまた，$h=u+v\in\mathcal{N}$，$0\leqq u\in\mathcal{H}$，$0\leqq v\in\mathcal{H}$ ならば $h=U_\infty h=U_\infty u+U_\infty v\leqq u+v=h$ となるから

<u>補題4.3.</u> $h\in\mathcal{N}$，$u\in\mathcal{H}$，$\hat{h}\geqq\hat{u}\geqq 0$ ならば $u\in\mathcal{N}$.

ここで $\theta=U_\infty 1$ と定義すると

<u>補題4.4.</u> μ-a.e. ξ に対して $\hat{\theta}(\xi)$ は 1 または 0 である．

<u>証明</u>. $0<\alpha<\beta<1$ なる任意の α,β をとり，集合 $Ⓗ_{\alpha\beta}=\{\xi\mid\alpha<\hat{\theta}(\xi)<\beta\}$ の定義函数の，写像K（前頁）による像を $h_{\alpha\beta}$ とすると，$0\leqq\hat{h}_{\alpha\beta}\leqq\frac{1}{\alpha}\hat{\theta}$ だから $h_{\alpha\beta}\in\mathcal{N}$（補題4.3）．従って，$0\leqq(1-\beta)h_{\alpha\beta}+\theta\leqq 1$ の各項に U_∞ をほどこすと $0\leqq(1-\beta)h_{\alpha\beta}+\theta\leqq\theta$ となるから $h_{\alpha\beta}\equiv 0$，$\mu(Ⓗ_{\alpha\beta})=0$ を得る．この結果と $0\leqq\hat{\theta}\leqq 1$ により補題4.4を得る．

そこで，$Ⓗ=\{\xi\in\hat{S}_1\mid\hat{\theta}(\xi)=1\}$ とおくと，上の三つの補題を使って次のことが示される．

<u>補題4.5.</u> i) $U_\infty h\equiv 0$ は $\hat{h}(\xi)=0$（μ-a.e. $\xi\in Ⓗ$）と同等；
ii) $U_\infty h\equiv h$ は $\hat{h}(\xi)=0$（μ-a.e. $\xi\in\hat{S}_1-Ⓗ$）と同等．

以上により，$\mathbf{H}=\{h\in\mathcal{H}\mid U_\infty h\equiv 0\}$ とおくとき，

<u>補題4.6.</u> $\mathcal{N},\mathbf{H}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間であり，空間 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}=\mathcal{N}+\mathbf{H}$ と直和分解されて，$\mathcal{N}\subset\mathbf{G}$ である．

§5. 空間$\mathbf{E}$の構造. Martin 境界論[4][6]において，任意の正値優調和函数uと任意のコンパクト集合$\Gamma\subset \mathfrak{S}$に対して定義された函数$u_\Gamma$を，$u$が有界正値優調和函数の場合に制限して考える．$\Gamma$を任意に固定すると，対応$u\to u_\Gamma$は，有界正値優調和函数の差の一様極限となる函数から調和函数への線形写像$f\to f_\Gamma$に，自然な方法で一意的に拡張され，

(5.1)　　$f_\Gamma\in \mathcal{H}$, $\|f_\Gamma\|\leqq\|f\|$;

(5.2)　　$h\in\mathcal{H}$ ならば $h_{\mathfrak{S}}=h$.

<u>補題5.1</u>. i) $g\in\overline{\mathcal{R}(G)}$ ならば $g_\Gamma\equiv 0$; ii) $\overline{\mathcal{R}(G)}\cap\mathcal{H}=\{0\}$.

<u>証明</u>. i)は$g=Gu$, $u\geqq 0$, の場合に示せばよいが，この場合$g-g_\Gamma$が正値優調和だから，これを$G\mu_1+h_1$とRiesz分解すれば，gのRiesz分解の一意性から$g_\Gamma+h_1=0$; ここで$g_\Gamma, h_1\geqq 0$だから$g_\Gamma=h_1=0$. ii)はi)と(5.2)による．

<u>補題5.2</u>. $(\lambda-A)w=0$, $w\in\mathcal{D}(G)$ ならば，$v=\Psi_\lambda w\in\mathbf{H}$.

<u>証明</u>. 補題2.6により$v\in\mathcal{H}$かつ$\lambda G_\lambda v=\lambda G w$; 従って$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda G_\lambda v=0$. 一方$\lambda G_\lambda v=\int_0^\infty e^{-\tau}U_{\tau/\lambda}v\,d\tau\to U_\infty v$ ($\lambda\downarrow 0$のとき各点$x\in R$で)．だから$U_\infty v=0$，すなわち$v\in\mathbf{H}$.

<u>補題5.3</u>. $u\in\mathbf{H}$ ならば $G_\lambda u\in\mathcal{R}(G)$.

<u>証明</u>. $w=\Phi_\lambda u$, $v=\Psi_\lambda w$とおくと，補題2.5と5.2により$v\in\mathbf{H}$. 一方$\Phi_\lambda(u-v)=w-\Phi_\lambda\Psi_\lambda w=0$（補題2.4）．だから$u-v\in\mathbf{H}\cap\mathcal{N}$，従って$G_\lambda u=G_\lambda v=Gw\in\mathcal{R}(G)$.

補題5.4. $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \{0\}$.

証明. $u \in \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$ ならば，$\lambda G_\lambda u \to u$ $(\lambda \to \infty)$ だから補題5.3により $u \in \overline{\mathcal{R}(G)}$，従って補題5.1により $u = 0$.

補題5.5. 任意のコンパクト $\Gamma \subset \hat{S}$ に対し $(\lambda G_\lambda 1)_\Gamma = \theta_\Gamma$.

証明. (4.3) により $\theta = U_\infty 1 \in \mathcal{N}$，$1 - \theta \in \mathbf{H}$．補題5.3 により $G_\lambda(1-\theta) \in \mathcal{R}(G)$．だから補題5.1により $(\lambda G_\lambda 1)_\Gamma = \theta_\Gamma$.

補題5.6. $f = g + h$，$g \in \mathbf{G}$，$h \in \mathbf{H}$ ならば

i) $\|f\| \geqq \|h\|$;　ii) 特に $f \geqq 0$ ならば $h \geqq 0$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|\lambda G_\lambda g - g\| < \varepsilon$ なる $\lambda > 0$ をとれば，R の上で $|\lambda G_\lambda g + h| \leqq \|f\| + \varepsilon$，従って

$$|h| \leqq \|f\| + \varepsilon + \|\lambda G_\lambda g\| \leqq \|f\| + \varepsilon + \lambda \|g\| G_\lambda 1.$$

一方，任意のコンパクト $\Gamma \subset \hat{S}_1 - \textcircled{H}$ に対して $\theta_\Gamma = 0$（補題4.5）だから，補題5.5により $\|h_\Gamma\| \leqq \|f\| + \varepsilon$．$\Gamma$ は $\hat{S}_1 - \textcircled{H}$ の中で任意であり，$h \in \mathbf{H}$ だから，$\varepsilon \downarrow 0$ として $\|h\| \leqq \|f\|$ となる．特に $f \geqq 0$ ならば $h \geqq -\varepsilon - |\lambda G_\lambda g| \geqq -\varepsilon - \lambda \|g\| G_\lambda 1$ だから，上と同様の論法で $h \geqq 0$ を得る．

さて，補題5.4により，$C(R)$ の部分空間 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{H}$（直和）を考えることができるが，これが閉部分空間であることが，補題5.6を使って示される．だから補題3.2と4.6とにより $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ となる．以上により，

補題5.7. $\mathbf{E}$ は閉部分空間 $\mathbf{G}$，$\mathbf{H}$ の直和である．

§6. 空間$\mathbf{H}$におけるレゾルベントH_λについて. §3のH_λの定義と補題5.2により，補題3.3は次のようになる：

補題6.1. i) H_λは$\mathbf{E}$から$\mathbf{H}$への写像で$\|\lambda H_\lambda\| \leqq 1$.

ii) $g \in \mathbf{G}$ならば$H_\lambda g = 0$.

ここで$\{G_\lambda\}$の性質を再記する；これらは補題3.1で述べた$\{J_\lambda\}$の性質に対応するが，$\{G_\lambda\}$は$\mathbf{G}$における半群$\{U_t^0\}$のレゾルベントとしてでなく，(1.5)で定義されているので，(G.3)以外は$C(R)$で成立することに注意すべきである：

(G.0) $(\lambda - A) G_\lambda = I$;

(G.1) $G_{\lambda_1} - G_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} = 0$;

(G.2) $G_\lambda \geqq 0$, $\|\lambda G_\lambda\| \leqq 1$, $\mathfrak{N}(G_\lambda) = \{0\}$;

(G.3) 任意の$g \in \mathbf{G}$に対して$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda G_\lambda g - g\| = 0$.

補題6.2. $\{J_\lambda\}$が補題3.1の(J.1—3)を満たし，各λに対して$J_\lambda - G_\lambda \geqq 0$ならば，(3.3)で定義される$H_\lambda$を$\mathbf{H}$に制限したものは，次の性質をもつ：

(H.1) $H_{\lambda_1} - H_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2) H_{\lambda_1} H_{\lambda_2} = 0$;

(H.2) $H_\lambda \geqq 0$, $\|\lambda H_\lambda\| \leqq 1$, $\mathfrak{N}(H_\lambda) = \{0\}$;

(H.3) 任意の$h \in \mathbf{H}$に対して$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda H_\lambda h - h\| = 0$.

証明の方針. (3.3)で定義されるH_λは(3.5)を満たすから，(J.1)と補題4.6により(H.1)を得る. (H.2), (H.3)も，$\{J_\lambda\}$, $\{G_\lambda\}$の対応する性質と(3.4)によって示される.

逆に，$\mathbf{H}$ における $\{H_\lambda\}$ から $\mathbf{E}$ における $\{J_\lambda\}$ を定義するために，次の補題を準備しておく．

<u>補題 6.3</u>. 空間 $\mathbf{H}$ における作用素系 $\{H_\lambda\}$ が (H.1—3) を満たすとし，$f=g+h\in\mathbf{E}$ ($g\in\mathbf{G}$, $h\in\mathbf{H}$) に対して，$H_\lambda f=H_\lambda h$ (従って特に $H_\lambda g=0$) と定義する．このとき，(3.4) で定義される $\{J_\lambda\}$ は (J.1 — 3) を満たす．

<u>証明</u>. 以下 f, g, h は上記の通りとする．

(J.1)：この補題の $H_\lambda f$ の定義により，(3.4) で定義される J_λ は (3.5) を満たすから，(H.1) により (J.1) を得る．

(J.2)：(G.2) により $|G_\lambda f|\leqq\|f\|\cdot G_\lambda 1$ だから χ_λ の定義により $|\lambda G_\lambda f|\leqq\|f\|\cdot\lambda G_\lambda 1=\|f\|(1-\chi_\lambda)$；また補題 2.4 と補題 5.6 の i) により $|\lambda(I-\lambda G_\lambda)H_\lambda h|\leqq\|\lambda H_\lambda h\|\chi_\lambda\leqq\|f\|\chi_\lambda$. だから $|\lambda J_\lambda f|=|\lambda G_\lambda f+\lambda(I-\lambda G_\lambda)H_\lambda h|\leqq\|f\|$.

特に $f\geqq 0$ ならば，補題 5.6 の ii)，(H.2) および $H_\lambda g=0$ により $H_\lambda f\geqq 0$．だから補題 2.1 により $H_\lambda f-\lambda G_\lambda H_\lambda f\geqq 0$. 一方 (G.2) により $G_\lambda f\geqq 0$．だから (3.4) により $J_\lambda f\geqq 0$.

また，$J_\lambda f=0$ とすると，$G_\lambda f-\lambda G_\lambda H_\lambda f+H_\lambda h=0$ で，補題 5.4 により $G_\lambda f-\lambda G_\lambda H_\lambda h=H_\lambda h=0$，従って (H.2) により $h=0$．だから $G_\lambda f=0$．従って (G.2) により $f=0$.

(J.3)：$\lambda J_\lambda f-f=(\lambda G_\lambda g-g)+(I-\lambda G_\lambda)(\lambda H_\lambda h-h)$ ((3.4) より) と (G.3)，(H.3) により (J.3) を得る．

§7. 半群$\{T_t\}$の特徴づけ. Martin境界$\hat{S}$において, $\hat{S}_{11}=\hat{S}_1-$Ⓗ と定義する. この§では本稿の主要結果として, $\{T_t\}$を$L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$における半群によって特徴づける.

まず, §4で述べた$L^\infty(\hat{S}_1,\mu)$からHへの写像Kは, $\mathbf{H}$の定義と補題4.5により, $L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$から$\mathbf{H}$への写像を与える. Kの$L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$への制限を再びKと書くことにする. このKは$L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$から$\mathbf{H}$の上への一対一等距離線形写像である.

定理1. $\mathbf{E}$における(C_0)級正値縮小半群$\{T_t\}$が, $\mathbf{G}$における半群$\{U_t^0\}$の拡張であって, Aを局所生成作用素とするならば, (3.3)で定義される$\{H_\lambda\}$から, $B=\lambda I-H_\lambda^{-1}$が, λに無関係で$\overline{\mathcal{D}(B)}=\mathbf{H}$なる作用素として定義せられ, $\mathbf{H}$における(C_0)級正値縮小半群$\{V_t\}$を生成する. この半群は, Martin境界$\hat{S}$の部分集合$\hat{S}_{11}$の上の$L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$における一つの$(C_0)$級正値縮小半群を定める.

証明. $\{T_t\}$から§3で述べたように$\{J_\lambda\}$, $\{H_\lambda\}$を定義すると, $\{H_\lambda\}$は補題6.2により(H.1—3)を満たす. だから, 補題3.1の後半を$\mathbf{H}$における$\{H_\lambda\}$に適用すると, 定理に述べたような作用素Bと, それが生成する半群$\{V_t\}$とが得られる. ここで$\hat{V}_t=K^{-1}V_tK$と定義すると, $\{\hat{V}_t\}$は$L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$における$(C_0)$級正値縮小半群である.

逆に$\{\hat{V}_t\}$を与えて, 対応する半群$\{T_t\}$の存在を示そう.

<u>定理2.</u> $L^\infty(\hat{S}_{11},\mu)$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{\hat{V}_t\}$ を与えると，$V_t = K\hat{V}_t K^{-1}$ は $\mathbf{H}$ における正値縮小半群となり，そのレゾルベント系 $\{H_\lambda\}$ から (3.4) により $\mathbf{E}$ におけるレゾルベント系 $\{J_\lambda\}$ が得られて，$\tilde{A} = \lambda I - J_\lambda^{-1}$ が，λ に無関係で $\overline{\mathcal{D}(\tilde{A})} = \mathbf{E}$ なる作用素として定義され，$\mathbf{E}$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ を生成する。この半群は $\{U_t^0\}$ の拡張であって，$T_t = U_t + \int_0^t (-AU_{t-\tau})V_\tau\, d\tau$ と表わされる．

<u>証明</u>. $\{V_t\}$ が $\mathbf{H}$ における (C_0) 級正値縮小半群になることは，K の性質から明らか，だから $\{H_\lambda\}$ が (H. 1—3) を満たし，補題6.3 により，(3.4) で定義される $\{J_\lambda\}$ が (J. 1—3) を満たす．従って補題3.1 の後半により $\tilde{A} = \lambda I - J_\lambda^{-1}$ が上記のように定義されて，$\mathbf{E}$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{T_t\}$ を生成する．これが $\{U_t^0\}$ の拡張であることは，$g \in \mathbf{G}$ ならば $V_\tau g = 0$ なることと，$T_t = U_t + \int_0^t (-AU_{t-\tau})V_\tau d\tau$ (証明下記) による．この T_t の表現式を示すには，右辺 (T_t^0 とおく) の Laplace 変換が J_λ になることを言えばよい。
$Q_t = \int_0^t U_{t-\tau} V_\tau\, d\tau$ とおくと，$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} Q_t\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t\, dt = \lambda G_\lambda H_\lambda$，$\frac{d}{dt} Q_t = V_t + \int_0^t A V_\tau d\tau$ だから，$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t^0\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\{U_t + V_t - \frac{d}{dt}Q_t\}dt = G_\lambda + H_\lambda - \lambda G_\lambda H_\lambda = J_\lambda$ となる（以上の計算は形式的ではあるが実際に正当化される）．

次に，$T_t f$ の表現式を，より具体的な形で与える．

<u>定理3</u>. 前定理の $T_t f$ は次の式で与えられる：

$$(7.1)\quad (T_t f)(x) = \int_R U(t,x,y) f(y)\,dy + \int_0^t d\tau \int_{\hat{S}_{11}} W(t-\tau, x, \xi)(\hat{V}_\tau \hat{h})(\xi)\,d\mu(\xi),$$

ここに $\hat{h}$ は，$f = g + h$ ($g \in \mathbf{G}$, $h \in \mathbf{H}$)，$\hat{h} = K^{-1}h$ としたもの；$W(t,x,\xi)$ ($t>0$, $x \in R$, $\xi \in \hat{S}_{11}$) は正の値の函数で，

$$(7.2)\quad \partial W/\partial t = AW \quad (A \text{ は変数 } x \text{ についてほどこす}),$$

$$(7.3)\quad \int_0^t d\tau \int_{\hat{S}} W(\tau,x,\xi)\,d\mu(\xi) \leqq 1 - \int_R U(t,x,y)\,dy,$$

$$(7.4)\quad W(t+s, x, \xi) = \int_R U(t,x,z) W(s,z,\xi)\,dz \quad (\mu\text{-a.e. } \xi)$$

を満たす．従って，$u(t,x) = (T_t f)(x)$ は拡散方程式 (1.1) と初期条件 $\| u(t,\cdot) - f \| \to 0$ ($t \downarrow 0$) とを満たす．

<u>証明の方針</u>. 前定理の T_t の表現式の最後の項は

$$-\int_0^t d\tau \int_R A_x U(t-\tau, x, y)\,dy \int_{\hat{S}_{11}} K(y,\xi)(\hat{V}_\tau \hat{h})(\xi)\,d\mu(\xi)$$

となる．ここで $W(t,x,\xi) = -\int_R A_x U(t,x,y) K(y,\xi)\,dy$ とおけば，形式的には (7.1) が得られるが，これが実際に意味をもつことと (7.2)－(7.4) を満たすことは，Martin 境界論における論法を使って証明する．$u(t,x)$ が方程式 (1.1) と初期条件とを満たすことは，半群の一般論による．

最後に，$L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における半群 $\{\hat{V}_t\}$ について，若干の注意を述べておく．$(\hat{V}_t \hat{h})(\xi)$ は μ-a.e. ξ に対して $\hat{h}$ について有界線形汎函数となるから，'μ について絶対連続な有限加法的測度による Radon 積分' で表わされる．しかし，それが可算加法的な拡張をもつとはかぎらないので，条件付確率法則の場合（たとえば [1]）のように，すべての ξ に対して意味をもつ形に表わすことはできない．また，$L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における (C_0) 級正値縮小半群 $\{\hat{V}_t\}$ であって，可算加法性をもった推移確率法則では表わされない例を，R が円板（m 次元の有界領域で境界の一部が滑らかなら同じ）の内部で，A が普通のラプラシアンの場合に，具体的に作ることができる．

だから，[5] において $\{\hat{V}_t\}$ がいつも $\hat{S}$ の上の Markov 過程の推移確率法則で表わされるとしたのは，誤りであったので，この機会に訂正しておく．

$\{\hat{V}_t\}$ が推移確率法則で与えられることは，$\{T_t\}$ が与えられるための必要条件ではないが，$L^\infty(\hat{S}_{11}, \mu)$ における強連続半群を与えるような推移確率法則 $\hat{V}(t, \xi, d\eta)$（それは $\hat{S}_{11}$ があるかぎり，いつでも作れる）があれば，それに対して定理 2 が成立し，定理 3 の (7.1) で $(\hat{V}_\tau \hat{h})(\xi) = \int_{\hat{S}_{11}} \hat{V}(\tau, \xi, d\eta)\hat{h}(\eta)$ とした式が成立する．その場合は，[5] の最後に述べたような確率論的解釈が可能である．

文　献（本文中で直接引用したもののみ）

[1] J. L. Doob: *Stochastic processes with an integral-valued parameter*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 87–150.

[2] S. Itô: *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, Japan. J. Math. **27** (1957), 55–102.

[3] ——: *On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order*, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 299–306.

[4] ——: *Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold*, ibid. 307–334.

[5] ——: Martin境界と拡散方程式. 日本数学会第10回実関数論 第9回関数解析合同シンポジウム講演集録, 1971, 77–90.

[6] R. S. Martin: *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 137–172.

[7] K. Yosida: *Functional Analysis*, Springer, 1965 (3rd ed. 1971).