数理解析研究所講究録
第160巻 1972年 79-87

楕円型作用素の固有値分布と負の固有値について

東大 理 田村英男

§1 序

次のような固有値問題の漸近分布を考察することが目的である。

$$(A+r)u=\lambda p(x)u \qquad \text{on } R^n$$

ここでAは $L^2(R^n)$ の中に定義域をもつ正値自己共役作用素（厳密な仮定は§2），$r>0$，$p(x)\geq 0$ としておく．

$N_r(\lambda)=\sum_{\mu_i<\lambda}1$ と定義する．μ_iは上の方程式を満たす固有値．（但し $p(x)$ に対して固有値が可算個存在するための条件はつける．）

適当な条件のもとで次のような事実が知られている。

$$N_r(\lambda)=\{(-\infty,-r)\text{に存在する } A-\lambda p(x) \text{ の負の固有値の個数}\}$$

この事実から$N_r(\lambda)$は $A-p(x)$の負の固有値の状態（可算無限個（0を集積点として），あるいは有限個）

に応じて異なることが予想される。即ち，$p(x)$ の無限遠点に於ける減衰状態によることがわかる。

§2. 仮定 記号 と結果

[仮定] $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$. $\left(D = \frac{\partial}{i\partial x}\right)$.

$a_\alpha(x) \in \mathcal{B}^\infty(R^n)$;（無限回微分可能 すべての導函数は有界）で 一様楕円型作用素で，かつ形式的自己共役とする．更にある実数 a_α が存在して次のことが満足される． $a_\alpha(x) = a_\alpha + b_\alpha(x)$, 十分遠方において

$|D^j b_\alpha(x)| \leq C(j) |x|^{-\delta}$ $(\delta > 0)$ とする．

$A(x, D)$ の一意的自己共役拡張を A とすれば定義域 $\mathcal{D}(A) = H^m(R^n)$ で かつ $A \geq 0$ とする．

更に $A_0(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$ $A_0(\xi) \geq 0$ と仮定する．

[記号] 1° $p(x) \in K_\ell$ とは次のように定義する $(\ell > 0)$

(i) $p(x) > 0$, $p(x) \in \mathcal{B}^\infty(R^n)$

(ii) $^\exists C_1, C_2 > 0$ が存在して

$C_1 / (1+|x|)^\ell \leq p(x) \leq C_2 / (1+|x|)^\ell$ が成立する．

(iii) $|D^j p(x)| \leq C(j)\, p(x)$.

2° $\{Q_k\}$ を単位cubeとして全空間 R^n を覆うものとする． $\sigma_{s,k} = \|p\|_{(s,k)}$ if $m > n$, $s = 1$ if $m \leq n$, $s > \frac{n}{m}$ であって $\|\cdot\|_{(s,k)}$ は

Q_k に於ける p の L^s-norm を表わす.

$d_s(p)=\sum_k \sigma_{s,k}{}^{\gamma}$ $\gamma=\frac{n}{m}$ と定義する.

(注). $d_s(p)<+\infty$ のとき, $p(x)\in L^{\frac{n}{m}}(R^n)$ で, $H^{\frac{m}{2}}(R^n)\longrightarrow H^{-\frac{m}{2}}(R^n)$ への完全連続作用素.

(定理) $p(x)\geq 0$, $p(x): H^{m-\varepsilon}(R^n)\longrightarrow L^2(R^n)$ への有界作用素を仮定する.

(i) 十分小さい $^\forall\varepsilon>0$ に対して,

$p(x)=p_\varepsilon^1(x)+p_\varepsilon^2(x)$ と分解されて

$p_\varepsilon^1(x)\in K_\ell$ $(\ell>m)$, $d_s(p_\varepsilon^2)\leq\varepsilon$ のとき

$N_r(\lambda)=C\lambda^{\frac{n}{m}}+o(\lambda^{\frac{n}{m}})$.

($C=(2\pi)^{-n}\int\omega(x)p(x)^{\frac{n}{m}}dx$, $\omega(x)=\mathrm{meas}\{\xi : A'(x,\xi)\leq 1\}$

$A'(x,\xi)$ は $A(x,D)$ の主要部)

(ii) $p(x)\in K_m$ のとき

$$N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{\lambda p(x)\geq 1}\omega(x)(\lambda p(x)-1)^{\frac{n}{m}}dx+O(\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda).$$

(十分大きな λ に対して)

(iii). $p(x)=p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)$ と分解されて

$p_1(x)\in K_\ell$ $(0<\ell<m)$, $p_2(x)$ 非負有界可測, 十分遠方で $O(|x|^{-(\ell+\varepsilon)})$ $(\varepsilon>0)$, $d_s(p_3)<+\infty$, 更に $p_1(x)$ は十分遠方で $p_1(x)\equiv|x|^{-\ell}$ を満足するものとする. このとき

$N_r(\lambda)=C_r\lambda^{\frac{n}{\ell}}+o(\lambda^{\frac{n}{\ell}})$.

$$C_r = (2\pi)^{-n} S \frac{1}{n} \int (A_0(\xi)+r)^{-\frac{n}{2}} d\xi,$$

（Sは単位球の表面積. $n=1$のときは$S=2$）

(注.1). (iii)に於いて. $p_1(x) \equiv C|x|^{-l}$ $(C>0)$ とすれば

$N_r(\lambda) = C^{\frac{n}{l}} C_r \lambda^{\frac{n}{l}} + o(\lambda^{\frac{n}{l}})$ となる.

(注.2). もし $A_0(\xi)$が$\xi=0$のみで零点をもち

その位数がm_1（偶数）とすれば, $m>l>m_1(\neq m)$

のとき, $r\to 0$とした場合. C_rはある有限な値

C_0に収束する., このことは$A-\lambda p(x)$の負の固

有値の有限性に対応することが予想される.

実際, もし $m_1<n$ $(m_1\neq m)$のとき, $p(x)$が有界

可測. 非負として, 十分遠方で. $O(|x|^{-(m_1+\varepsilon)})$ $\varepsilon>0$の

のとき $A-p(x)$の負の固有値は有限個しか存在し

ない.

§3. 2つの補題.

[補題 3.1]. (Birman-Solomyak [3]).

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間. T: 完全連続自己共役作用素,

十分小さい$^\forall\varepsilon>0$に対して, $T=T_\varepsilon^{(1)}+T_\varepsilon^{(2)}$と分解され,

$T_\varepsilon^{(1)}, T_\varepsilon^{(2)}$は共に 自己共役完全連続作用素とする.

$N_{1.\varepsilon}^{+}(\lambda)=\sum_{0<\mu_i<\lambda} 1$ （μ_iは$T_\varepsilon^{(1)}$の正の固有値）

$N_{1.\varepsilon}^{-}(\lambda)=\sum_{0<-\mu_i<\lambda} 1$ （μ_iは$T_\varepsilon^{(1)}$の負の固有値).

$N_{2.\varepsilon}^{\pm}(\lambda)$ についても同様に定義する.

$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\alpha} N_{1,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = C_{\pm}(T_{\varepsilon}^{(1)})$,

$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \lambda^{-\alpha} N_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) \leq \varepsilon$ が，ある $\alpha>0$ が存在して

成立するとき，次のことが満たされる．

$C_{\pm}(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} C_{\pm}(T_{\varepsilon}^{(1)})$ が存在して

$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\alpha} N^{\pm}(\lambda) = C_{\pm}(T)$.（$N^{\pm}(\lambda)$ は T に対する漸近分布を表わす）

［補題3.2］（Birman–Borzov [4]）

$p(x)$ が $H^{m-\varepsilon} \to H^{0}(=L^{2}(R^{n}))$ への有界作用素（$\varepsilon>0$），更に $d_{s}(p)<+\infty$ のとき，

$\lambda^{-\gamma} N_{\gamma}^{\pm}(\lambda) \leq C\, d_{s}(p)$.　（$\gamma = \frac{n}{m}$）

ここで C は $p(x)$ に対して独立な正数．

（$N_{\gamma}^{\pm}(\lambda)$ は $(A+r)u=\lambda p(x)u$ の漸近分布．

$p(x)$ の非負性を仮定していないので $N^{-}(\lambda)$ は意味をもつ）

上の2つの補題から定理の証明には $p(x)\in K_{\ell}$ について考察すれば十分である．

実際，$(A+r)u=\lambda p(x)u$ の固有値問題は，

$\frac{1}{\lambda}u = (A+r)^{-1}p(x)u$ として，$H^{\frac{m}{2}}(R^{n})$ の中で，

内積を $((A+r)^{\frac{1}{2}}u,\ (A+r)^{\frac{1}{2}}v)$ で定義した空間で考えることと同値である．この内積で，$(A+r)^{-1}p$ は $H^{\frac{m}{2}}(R^{n})$ で完全連続自己共役作用素となる．従って，補題が

適用される。

(注). 定理の(i)の部分は Birman-Borzov[4]が $A=(-\Delta)^k$ の場合に上の補題を使って結果を得ている。特に $k=1$, $n\geq 3$ の場合 $r=0$ まで含めて、証明されている。この結果はよく知られている $-\Delta-p(x)$ の負の固有値の有限性のための $p(x)$ の条件と対応する。

§4. 定理の証明の方針

上のことから $p(x)\in K_l$ に証明すれば十分である。

$p(x)\in K_l$ として $(A+r)u=\lambda p(x)$ は

$$p^{-\frac{1}{2}}(A+r)p^{-\frac{1}{2}}v=\lambda v$$

と同値な固有値問題である。

$\lambda>0$ として $\left(p^{-\frac{1}{2}}(A+r)p^{-\frac{1}{2}}+\lambda\right)^{-1}=p^{\frac{1}{2}}(x)\left(A+r+\lambda p(x)\right)^{-1}p(x)^{\frac{1}{2}}$.

$m>n$, $l>n$ (即ち $p(x)\in L^1$)の場合、

$p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}}$ は trace class の作用素となり、

$$tr\left(p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}}\right)=\int_{R^n}p(x)A(x,x)\,dx$$

(ここで $A(x,y)$ は $(A+r)^{-1}$ の積分核)が従うことに注意して、$(A+r+\lambda p(x))^{-1}$ の積分核の $\lambda\to\infty$ の場合の漸近挙動を調べる。そのために次の補題を使う。

[補題4.1] (Agmon[1])

T: $L^2(R^n)$ を定義域とする有界作用素で値域 $R(T)$, $R(T^*)$ が共に $H^m(R^n)$ $(m>n)$ に含まれるとき、T は $T(x,y)$ を核とする積分作用素で、$T(x,y)$ は $R^n\times R^n$ で

連続かつ有界.

$$|T(x, y)| \le \gamma (\|T\|_m + \|T^*\|_m)^{\frac{n}{2m}} \|T\|_0^{1-\frac{n}{2m}}$$

(γ は T に独立で, $\|\cdot\|_m$ は $L^2(R^n) \to H^m(R^n)$ への

作用素 norm を表わす)

以下 簡単のために A を定数係数の場合として行う.

更に $m > n$, $p(x) \in K_\ell$ ($\ell > n$) としておく.

一般の場合はこれに帰着させる.

$\varphi(x)$ を 次のように定義する. $0 \le \varphi(x) \le 1$. $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$

$\varphi(x) \equiv 1$ if $|x| \le \frac{1}{2}$, $\varphi(x) \equiv 0$ if $|x| \ge 1$

$\varphi_{(x_0, \delta)} \equiv \varphi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right)$ とおく.

証明は(iii)の場合について述べる.

従って $p(x) \in K_\ell$, 十分遠方で $p(x) \equiv |x|^{-\ell}$ ($n < \ell < m$)

任意に $x_0 \in R^n$ を固定して考える.

$\varphi_{(x_0, p(x_0)^{-\frac{1}{\ell}}\varepsilon)} = \varphi\left(\frac{(x - x_0)}{\varepsilon} \cdot p(x_0)^{\frac{1}{\ell}}\right) \equiv \varphi_\varepsilon(x)$ とすれば

[補題 4.2]

(i) $\|\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} (A + r + \lambda p)^{-1} \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}\|_0 \le C(1 + \lambda p(x_0))^{-1}$

(ii) $\|\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} (A + r + \lambda p)^{-1} \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}\|_m \le C$

(C は λ, x_0 に対して独立である)

[補題 4.3]

$(A + r + \lambda p)^{-1}$ の積分核を $A_\lambda(x, y)$ とおく.

$^\forall \varepsilon > 0$ (十分小さい) に対して $^\exists C(\varepsilon)$ が存在して.

$$|A_\lambda(x,x)-F(x,\lambda)(0)|$$
$\leq \varepsilon\cdot C(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}+C(\varepsilon)\cdot p(x)^{\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1}$ が成立する。ここで、$F(x,\lambda)(0)=(2\pi)^{-n}\int\frac{d\xi}{A_0(\xi)+r+\lambda p(x)}$

上のことは (x,λ) に対して一様に成立する。//

〔補題4.3〕は〔4.2, 4.1〕を使って導くが、証明は省略する。〔補題4.3〕より $\sum\frac{1}{\mu_i+\lambda}=\int p(x)A_\lambda(x,x)dx$ の漸近挙動が得られる。(適当な積分計算のもとに)

即ち $\sum\frac{1}{\mu_i+\lambda}={}^{\exists}C\lambda^{\frac{n}{\ell}-1}+o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1})$.

これに Hardy-Littlewoodの Tauber型 定理を適用すれば、証明は完了する。

一般の場合、$B_k=[p^k(A+r)p^{-k}]^a$ $(k>0)$ とおく

$p(x)\in K_\ell$ の仮定があるので、$\mathcal{D}(B_k)=H^m(R^n)$ で、$\mathcal{B}^\infty(R^n)$ を係数にもつ微分作用素である。

〔補題 4.4〕

§2の $A(x,D)$ に対する仮定のもとで、B_k^{-1} が存在して、$L^2(R^n)$ の上で定義された有界作用素である。//

〔補題 4.4〕より $p^k(A+r)^{-1}=B_k^{-1}p^k$, $(A+r)^{-1}p^k=p^k(B_k^*)^{-1}$ が従う。ここで k (integer >0) s.t. $(2k+1)m>n$, かつ $(2k+1)\ell>n$ となるようにとると、上の事実により

$$(p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}})^{2k+1}=p^{\frac{2k+1}{2}}\tilde{A}^{-1}p^{\frac{2k+1}{2}}$$

$\tilde{A}=B_k B_{k-1}\cdots B_1(A+r)B_1^*\cdots B_k^*$ の $(2k+1)m$ 階の

$\mathcal{B}^\infty(R^n)$を係数とする微分作用素
更に $\mathcal{D}(\tilde{A})=H^{(2k+1)m}(R^n)$で、真に正値自己共役作用素。
即ち $\tilde{A}\geq {}^\exists c_0>0$. 従って $\tilde{A}$, $p(x)^{2k+1}$に対して、
$m>n$, $l>n$の場合の結果を適用すれば、一般の場合にも定理(iii)の主張が証明される。

参考文献

(1) S. Agmon
On kernels eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems
Comm. Pure. Appl. Math vol XVIII (627–663) (1965).

(2). M. Š. Birman
On the spectrum of singular boundary value problems
Math. Sb. 55 (97) (1961). 125–174.

(3) M. Š. Birman – M. Z. Solomyak
Leading term in the asymptotic spectral formula for "nonsmooth" elliptic problems
Func. Analysis and its appl. Vol 4. no. 4. 1–13 (1970)

(4) M. Š. Birman – V. V. Borzov
On the asymtotic spectral formula for singluar operators
Problem in Math Phy. vol 5. (24–38). (1971) Edited by Birman.