数理解析研究所講究録
第161巻 1972年 62-78

楕円型作用素の固有値分布

阪大 理　田辺広城
丸尾健二

§1. 序

Ωをn次元空間の有界領域、その境界$\partial\Omega$は限定円錐条件[1]を満足するとする。$2m>n$として$B[u,v]$を$H_m(\Omega)$で定義された双一次型式とする:

$$B[u,v]=\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \cdot \overline{D^\beta v}\, dx 。$$

$B[u,v]$の主部は対称とする, 即ち$|\alpha|=|\beta|=m$のとき$a_{\alpha\beta}(x)=\overline{a_{\beta\alpha}(x)}$。

Vを$\mathring{H}_m(\Omega)$を含む$H_m(\Omega)$の閉部分空間とする。正数δが存在して、すべての$u\in V$に対して

$$\mathrm{Re}\, B[u,u] \ge \delta \|u\|_m^2 \qquad a-(1)$$

が成立するとする。Aを$B[u,v]$により通常の様に定義される作用素とする, 即ち$u\in V$, $f\in L^2(\Omega)$, すべての$v\in V$に対して$B[u,v]=(f,v)$が成立するとき$u\in D(A)$, $Au=f$。こうして定義される作用素Aの固有値の分布を調べることを目的とする。

上記の様な作用素Aに対しては、係数や$\partial\Omega$が十分滑らかで

も一般には $D(A)\subset H_{2m}(\Omega)$ は成立しないことは次の様にしてわかる。 $m=n=2$,

$$B[u,v]=\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)dx\,dy,$$

$$\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\quad \Gamma_1\cap\Gamma_2=\phi$$

$$V=\left\{u\in H_2(\Omega)\,;\ \Gamma_1 \text{で} u=0,\ \Gamma_2\text{で}\ \frac{\partial u}{\partial\nu}=0\right\}$$

とする。 この場合は最小最大の原理により、$V=\mathring{H}_m(\Omega)$, $V=H_m(\Omega)$ の場合の固有値分布から望みの結果を導くことができるのであるが、 $y>0$ で定義された関数 $u=I_m(x+iy)^{3/2}$ を考えると、これは $y>0$ で $\Delta^2u=0$; $x>0$, $y=0$ で $u=\partial^2 u/\partial y^2=0$; $x<0$, $y=0$ で $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$ を満足するが原点の近くで H_3 に属さない。 このことから Ω を適当に選んで $D(A)\not\subset H_4(\Omega)$ である例が作られる。

この例は境界の場所によって境界条件が異なる場合、境界附近では必ずしも境界値問題の解の滑らかさが成立しないことを示した M. Schechter の反例をヒントにしたものである: $u=I_m(x+iy)^{1/2}$ とすると $y>0$ で $\Delta u=0$; $x>0$, $y=0$ で $u=0$; $x<0$, $y=0$ で $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; 原点の附近では $u\notin H_2$。 次に仮定 $2m>n$ に関して、多くの場合この仮定が満たされないときは、$2mk>n$ となる自然数 k をとって A^k を考える。 $D(A^k)\subset H_{2mk}$ が満されるならば A^k の固有値の分布から A の固有値の分布を導く。 ただし上の Schechter の反例の場合しこのときも固有値分布は最小最大の原理により、Dirichlet, Neuman 条件の場合の結果か

ら導けるが）には $D(A^k)\subset H_{2mk}$ は成立しない。

ここでは S. Agmon に従って Sobolev の不等式により resolvent 核を評価する方法と Tauber 定理を用いる。そのために V^* を V の反共役空間として A を V から V^* への作用素に拡張する。即ち A をすべての $u, v\in V$ に対し $B[u,v]=(Au, v)$ により定義する。

ここで右辺の括弧は V^* の元 Au の v における値である。通常の様に代数的位相的に $V\subset L^2(\Omega)\subset V^*$ と考える。λ を A の resolvent set の元とすると $(A-\lambda)^{-1}$ は V^* から V への有界作用素である。この様な作用素に対して次の補題が成立する。

補題 1.1　S を V^* から V への有界作用素とすると S は $\Omega\times\Omega$ で連続有界な核 $M(x,y)$ を持ち：

$$Sf(x)=\int_\Omega M(x,y)f(y)\,dy\ ,\qquad \forall f\in L^2(\Omega) \tag{1-1}$$

$$|M(x,y)|\le C\,\|S\|_{V^*\to V}^{\frac{n^2}{4m^2}}\,\|S\|_{V^*\to L^2}^{\frac{n}{2m}-\frac{n^2}{4m^2}}\,\|S\|_{L^2\to V}^{\frac{n}{2m}-\frac{n^2}{4m^2}}\,\|S\|_{L^2\to L^2}^{(1-\frac{n}{2m})^2}\ 。$$

証明.　S に核がある事は Hilbert-Schmidt 作用素の一般論から知られていることである。$M(x,y)$ を y の関数と考えて Sobolev の不等式を適用すれば、

$$|M(x,y)|\leqq\gamma\,\|M(x,\cdot)\|_m^{\frac{n}{2m}}\,\|M(x,\cdot)\|_0^{1-\frac{n}{2m}}\ 。\tag{1-2}$$

Sf に同じ不等式を適用して

$$\begin{aligned}|Sf(x)|&\leqq\gamma\,\|Sf\|_m^{\frac{n}{2m}}\,\|Sf\|_0^{1-\frac{n}{2m}}\\&\leqq\gamma\,\|S\|_{V^*\to V}^{\frac{n}{2m}}\,\|S\|_{V^*\to L^2}^{1-\frac{n}{2m}}\,\|f\|_{V^*}\ 。\end{aligned}$$

これと (1-1) とから $M(x,\cdot)\in V$ 及び

$$\|M(x,\cdot)\|_m = \|M(x,\cdot)\|_V \le \gamma \|S\|_{V^*\to V}^{\frac{n}{2m}} \|S\|_{V^*\to L^2}^{1-\frac{n}{2m}} \tag{1-3}$$

を得る。 同様にして

$$\|M(x,\cdot)\|_0 \le \gamma \|S\|_{L^2\to V}^{\frac{n}{2m}} \|S\|_{L^2\to L^2}^{1-\frac{n}{2m}} \tag{1-4}$$

となる。 (1-2), (1-3), (1-4)を合わせて結果の不等式を得る。

この補題は $m>n$ のとき $R(T)\subset H_m(\Omega)$, $R(T^*)\subset H_m(\Omega)$ を満足する $L^2(\Omega)$ での有界作用素 T の核を各点毎に評価する Agmon の不等式 [3] の代りに用いるものである。 本論に入る前に $B[u,v]$ が対称でない場合の A の一般化された固有関数の完全性を記しておく。

$$\mathrm{Re}\, B[u,v] = \frac{1}{2}(B[u,v] + \overline{B[v,u]})$$

とおき それにより定義される作用素を H とする: $\mathrm{Re}\, B[u,v] = (Hu,v)$。 A, H を共に $L^2(\Omega)$ での作用素と考える。 $D(H^{\frac{1}{2}}) = V \subset H_m(\Omega)$ であるから Agmon [2], 定理 A1.1 により $H^{-\frac{1}{2}} \in C_{\frac{n}{m}+\varepsilon}$。 H の固有値を $\{\mu_j\}$ とすると $H^{-\frac{1}{2m}}$ の固有値は $\{\mu_j^{-\frac{1}{2m}}\}$ であるから $H^{-\frac{1}{2m}} \in C_{n+\varepsilon}$。 T. Kato [7] により $0<\theta<\frac{1}{2}$ のとき $D(A^\theta) = D(H^\theta)$, 故に $H^{\frac{1}{2m}} A^{-\frac{1}{2m}}$ は有界, 従って N. Danford - J. T. Schwartz [6], XI, 9, 7, 補題 9 (1093頁) により

$$A^{-\frac{1}{2m}} = H^{-\frac{1}{2m}} H^{\frac{1}{2m}} A^{-\frac{1}{2m}} \in C_{n+\varepsilon},$$

故に同補題により $A^{-1} \in C_{\frac{n}{2m}+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ は任意, $2m>n$ であるから $\frac{n}{2m}+\varepsilon<1$ となる様に ε をとると [6] の XI. 9. 28, 定理 29 の系

(1115-1116頁)により望みの結果が得られる。　この証明にはAの主部の対称性は不要，又原点を頂点とし頂角が $2m\pi/n$ より小さい角領域の有限和の外でAの resolvent が存在し，$|\lambda|\to\infty$ のとき $\|(A-\lambda)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$ を満たすならば同じ証明があてはまる。

§2. Resolvent 核の評価

これからAの resolvent 核の λ に関する漸近状態を調べるため種々の接触作用素を考へ，その resolvent 核との比較を考へる。　$d(\lambda)$ を複素数 λ と正の実軸までのきょりを示す。

補題 2.1　十分大きな定数 C に対して $d(\lambda)\geq C|\lambda|^{1-1/2m}$ かつ $|\lambda|\geq C$ を満たす λ は作用素Aの resolvent set に含まれていてその λ に対して，次の様な不等式が成立する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{イ)}\ \|(A-\lambda)^{-1}\|_{L^2\to L^2}\leq K_1/d(\lambda), & \left.\begin{array}{l}\text{ハ)}\ \|(A-\lambda)^{-1}\|_{V^*\to L^2}\\[4pt] \text{ニ)}\ \|(A-\lambda)^{-1}\|_{L^2\to V}\end{array}\right\}\leq K_1|\lambda|^{1/2}/d(\lambda).\\
\text{ロ)}\ \|(A-\lambda)^{-1}\|_{V^*\to V}\leq K_1|\lambda|/d(\lambda), &
\end{array}
$$

ここで K_1 は λ に無関係な定数である。

証明　$B[u,v]=B_0[u,v]+B_1[u,v]$ とおく。　ここで $B_0[u,v]$ は主部とする。　いま $\forall u\in D(A)$ として $(A-\lambda)u=f$ としよう。すると $B[u,u]-\lambda(u,u)=(f,u)$ を満す事と，$\mathrm{Im}\,B_0[u,u]=0$，かつ $|B_1[u,u]|\leq K\|u\|_m\|u\|_{m-1}$ を使用する事によって

$$
|\mathrm{Im}\,\lambda|\,\|u\|_0^2\leq\|f\|_0\|u\|_0+K\|u\|_m\|u\|_{m-1}. \tag{2-1}
$$

次に Young の不等式，補間定理と仮定 a-(1)を使用する事より

$$\|u\|_m\|u\|_{m-1} \le K_2\{|\lambda|^{1-\frac{1}{2m}}\|u\|_0^2+|\lambda|^{-\frac{1}{2m}}\|u\|_0\|f\|_0\} \qquad (2-2)$$

ここで十分大の C をとり，$|\mathcal{I}m\lambda| \geq C|\lambda|^{1-1/2m}$ であれば (2-1), (2-2) を使用する事によって

$$|\mathcal{I}m\lambda|\,\|u\|_0^2 \le K_3\,\|u\|_0\|f\|_0 \ . \qquad (2-3)$$

又 $Re\lambda \le 0$ であれば

$$|Re\lambda|\,\|u\|_0^2 \le \|f\|_0\|u\|_0 \qquad (2-4)$$

(2-3) と (2-4) によって

$$\|u\|_0 \le K_4/d(\lambda)\,\|f\|_0 \ .$$

一方 A^* についても同様の不等式がなりたつ事がわかり，resolvent set の関係とイ) は証明された事になる。次にロ) は

$$d(\lambda)\|u\|_0^2 \le K_5\{\|f\|_{V^*}\|u\|_m+\|u\|_m\|u\|_{m-1}\}$$

$$|\lambda|\,\|u\|_{V^*} \le \|f\|_{V^*} + K_6\|u\|_m \ ,$$

上記の二式と Young の不等式，補間定理とを使用して

$$|\lambda|\,\|u\|_0^2 \le K_6\,{}^{|\lambda|}/_{d(\lambda)}\{(1+|\lambda|^{-\frac{1}{2m}})\|u\|_m\|f\|_{V^*}+|\lambda|^{-1/2m}\|u\|_m^2\} \ .$$

ここで仮定 a-(1) と上記の式を使用して，十分大なる C に対して $d(\lambda) \geq C|\lambda|^{1-1/2m}$ となる λ をとれば，

$$\|u\|_m \le K_7\,|\lambda|/d(\lambda)\,\|f\|_{V^*} \ .$$

以下 A^* についても同様な事がいえてロ) は証明できる。ハ), ニ) はイ), ロ) を使用すれば自明である。

補題 2.2　　次の式を満足する定数 C_1 が存在する。

$$B_0[u,u] \geq \frac{\delta}{2}\|u\|_m^2 - C_1\|u\|_0^2 \qquad {}^\forall u \in \mathring{H}_m(\Omega)$$

ここで $B_0[u,v] + C_1(u,v) = B_2[u,v]$ として ${}^\forall u, v \in \mathring{H}_m(\Omega)$ に対して前記と同様にして $B_2[u,v] = (A_2 u, v)$ を満たす作用素 $A_2 ; \mathring{H}_m(\Omega) \to H_{-m}(\Omega)$ が決まり、それは補題 2.1 と同様な評価をもつ。　ここで $H_{-m}(\Omega)$ とは $\mathring{H}_m(\Omega)$ の反共役空間である。　さて ${}^\forall x_0 \in \Omega$ を固定する。

$$\Lambda = [\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) ;\ \mathrm{supp}\,\zeta \subset \{x \in \mathbb{R}^n ;\ |x| < 1\} \text{ かつ } \zeta(0) = 1]$$

と Λ を定義して $\zeta \in \Lambda$ のとき $\zeta_{\varepsilon_1}(x) = \zeta\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon_1}\right)$ と決める。　$\varepsilon_1 = \delta(x_0)$ としたとき

$$S_{\lambda\varepsilon_1} f = \zeta_{\varepsilon_1}\{(A-\lambda)^{-1} f - (A_2 - \lambda)^{-1} r f\} \qquad {}^\forall f \in V^*$$

とおけば、$S_{\lambda\varepsilon_1}$ は V^* から V への有界作用素になる。　ここで rf とは f の $\mathring{H}_m(\Omega)$ への制限である。

補題 2.3　　$\varepsilon_1^{-1}|\lambda|^{-1/2m} \leq 1$ ならば、次の様な ε_1, λ に無関係な定数 C_2 が存在する。

$$\|S_{\lambda\varepsilon_1}\|_{V^* \to V} \leq C_2(\varepsilon_1^{-1}|\lambda|^{1-1/2m} d(\lambda)^{-1})|\lambda|/d(\lambda), \quad \left.\begin{array}{l}\|S_{\lambda\varepsilon_1}\|_{V^* \to L^2} \\ \|S_{\lambda\varepsilon_1}\|_{L^2 \to V}\end{array}\right\} \leq C_2(\varepsilon_1^{-1}|\lambda|^{1-1/2m} d(\lambda)^{-1})|\lambda|^{1/2}/d(\lambda)$$

$$\|S_{\lambda\varepsilon_1}\|_{L^2 \to L^2} \leq C_2(\varepsilon_1^{-1}|\lambda|^{1-1/2m} d(\lambda)^{-1})/d(\lambda)$$

証明　　$S_{\lambda\varepsilon_1} f = v = \zeta_{\varepsilon_1} u$ とおく。

$$|B[v,v] - \lambda(v,v)| \leq |B[v,v] - B[u, \zeta_\varepsilon v]| + |B_1[u, \zeta_\varepsilon v] + C_1(u, \zeta_\varepsilon v)| = I_1 + I_2$$

とおく。　ここで補間定理と補題 2.1 を使用して、$0 \leq k \leq m$

$$\|(A-\lambda)^{-1} f\|_k \leq K_1|\lambda|^{1/2 + k/2m}/d(\lambda)\,\|f\|_{V^*}, \qquad {}^\forall f \in V^* \qquad (2\text{-}5)$$

$$\|(A-\lambda)^{-1}\Omega f\|_k \leq K_1 |\lambda|^{1/2+k/2m}/d(\lambda)\,\|\Omega f\|_{-m} \leq K_1|\lambda|^{1/2+k/2m}/d(\lambda)\,\|f\|_{V^*} \qquad (2-6)$$

を得る。　又次に

$$\|v\|_k \leq k_2 |\lambda|^{-(m-k)/2m}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0) \qquad {}^\forall v \in H_m(\Omega) \qquad (2-7)$$

をも得る。　さて I_1 に対して Leibniz の公式, $|D^\gamma \xi_{\varepsilon_1}| \leq k_3 \varepsilon_1^{-|\gamma|}$ と

(2-5), (2-6), (2-7) を使用して

$$|I_1| \leq k_4(\varepsilon^{-1}|\lambda|^{1-1/2m}/d(\lambda))\,\|f\|_{V^*}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0)\text{。} \qquad (2-8)$$

次に　$|B_1[u, \xi_{\varepsilon_1} v]| \leq K\{\|u\|_m \|\xi_{\varepsilon_1} v\|_{m-1} + \|u\|_{m-1}\|\xi_{\varepsilon_1} v\|_m\}$　と (2-5), (2-6)

(2-7) を使用する事によって

$$|I_2| \leqq k_5(|\lambda|^{1-1/2m}/d(\lambda))\,\|f\|_{V^*}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0)\text{。} \qquad (2-9)$$

一方　$|B[v\,v] - \lambda(v, v)| \geq k_6\, d(\lambda)/|\lambda|\,(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0)^2 \qquad (2-10)$

がわかり (2-8), (2-9), (2-10) を組み合わせる事により $V^* \to V$, $V^* \to L^2$

への評価式が得られる。　残りの評価式も同様にできる。

ここで補題 2.1 を使用すれば

$$(A-\lambda)^{-1}f(x) = \int_\Omega K_\lambda(x, y) f(y)\,dy \qquad {}^\forall f \in L_2(\Omega)$$

$$(A_2-\lambda)^{-1}f(x) = \int_\Omega K_\lambda^{(2)}(x, y) f(y)\,dy$$

を満足する resolvent 核が存在する事がわかる。　ここで

補題 2.1, 2.3 を使用する事により次の補題を得る。

<u>補題 2.4</u>　　$0 \leq {}^\forall p \leq 1$ に対して λ, x_0 に無関係な定数 C_3 が存在

する。　$|K_\lambda^{(2)}(x_0, x_0) - K_\lambda(x_0, x_0)| \leq C_3 |\lambda|^{n/2m}/d(\lambda)\left(\dfrac{|\lambda|^{1-1/2m}}{\delta(x_0)\, d(\lambda)}\right)^p$。

ここで $B_0[u, v]$ の係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ に次の様な　なめらかさに関する仮定をもうけよう。

S-(0)；Riemann 可積分関数　i.e Ω 内で a.e 連続

S-(1)；h 次の Hölder 連続

S-(2)；$C^{1+h}(\Omega_1)$ に属す。ここで $C^{1+h}(\Omega_1)$ とは $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ となる領域 Ω_1 上で一回微分したものが h 次の Hölder 連続

さて次に　$\tilde{\rho} \in C_0^\infty\{x \in R^1;\ |x| \le n^{-1/2}\}$ として $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}\, dx = 1$，このとき $\rho(x) = \tilde{\rho}(x_1) \cdots\cdots \tilde{\rho}(x_n)$ として $\rho_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon^n \rho(x/\varepsilon)$ とおく。　$\rho_\varepsilon * f(x)$ は ρ_ε と f の合成積とする。

<u>補題 2.5</u>　　$f \in C^1(\Omega_1)$ とする。δ_1 を十分小に取って固定するとき

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \le 1} (x - x_0)^\alpha \partial_x^\alpha f(x_0) & \text{if } |x - x_0| \le \delta_1 \\ \sum_{|\alpha| \le 1} (x_1 - x_0)^\alpha \partial_x^\alpha f(x_0) & \text{if } |x - x_0| > \delta_1 \end{cases} \quad .$$

ここで x_1 は $|x - x_0| = \delta_1$ の球面と x_0 から x を結ぶ半直線との交点とする。

1)　$\rho_\varepsilon * \tilde{f} \in C^\infty(R^n)$

2)　$0 < {}^\forall\varepsilon < \delta \Rightarrow \rho_\varepsilon * \tilde{f} = \tilde{f}(x)$　　if $|x - x_0| < \delta_1 - \varepsilon$ のとき

3)　$|\rho_\varepsilon * \tilde{f}(x) - f(x_0)| \le \delta_1 \sum_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha f(x_0)|$

ここで S-(2) のとき補題 2.5 を使用して $a_{\alpha\beta}(x) = f(x)$ にて　合成積になるものを $a^2_{\alpha\beta}(x)$ とおく。　S-(1) のときは $a^1_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(x_0)$ とお

き、S-(0) のときは　$P_{\alpha\beta}=\{a_{\alpha\beta}(x)$ の連続点全体$\}$ としたとき

$\bigcap_{\alpha,\beta} P_{\alpha\beta}=P$　$\forall x_0\in P$ に対して　$a^0_{\alpha\beta}(x)=a_{\alpha\beta}(x_0)$ とする。　この時

$$\widetilde{B}_i[u,v]=\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a^i_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u\,\overline{D^\beta v}\,dx \qquad \forall u,v\in \mathring{H}_m(\Omega)$$

とする。$i=0,1,2.$

補題 2.6　上記の δ_1 を十分小に取れば　正定数 C_4, C_5 が存在する。

$$\widetilde{B}'_i[u,u]\geq C_4\|u\|_m^2-C_5\|u\|_0^2 \qquad \forall u\in\mathring{H}_m(\Omega)$$

$\widetilde{B}'_i[u,v]+C_5(u,v)=\widetilde{B}_i[u,v]$ とする時　$\widetilde{B}_i[u,v]=(A_{i+3}u,v)$ によって作用素 $A_{i+3}:\mathring{H}_m(\Omega)\to H_{-m}(\Omega)$ が決まり．この A_{i+3} に対しても補題 2.1 と同様の評価式がわかる。　ここで $\varepsilon_0=dist\,(\Omega,\partial\Omega_1)$ とする時．$0<{}^\forall\varepsilon<min\,(\varepsilon_0,\ \delta_1/2)$ に対して

$$S^{1+i}_{\lambda\varepsilon}f=\zeta_\varepsilon\{(A_2-\lambda)^{-1}-(A_{i+3}-\lambda)^{-1}\}f \qquad \forall f\in H_{-m}(\Omega)。$$

補題 2.7　$\varepsilon^{-1}|\lambda|^{1-1/2m}d(\lambda)^{-1}\leq 1$ なれば　任意の正整数 j に対して次の不等式がわかる。

$$\|S^{1+i}_{\lambda\varepsilon}\|_{H_{-m}\to\mathring{H}_m}\leq K_j\,{}^iR^j_{\lambda\varepsilon}\,|\lambda|/d(\lambda)\ ,\quad \|S^{1+i}_{\lambda\varepsilon}\|_{H_{-m}\to L_2}\leq K_j\,{}^iR^j_{\lambda\varepsilon}\,|\lambda|^{1/2}/d(\lambda)$$

$$\|S^{1+i}_{\lambda\varepsilon}\|_{L_2\to\mathring{H}_m}\leq K_j\,{}^iR^j_{\lambda\varepsilon}\,|\lambda|^{1/2}/d(\lambda)\ ,\quad \|S^{1+i}_{\lambda\varepsilon}\|_{L_2\to L_2}\leq K_j\,{}^iR^j_{\lambda\varepsilon}/d(\lambda)$$

$i=1,2$ のとき　${}^iR^j_{\lambda\varepsilon}=\varepsilon^{i-1+h}|\lambda|/d(\lambda)+\left(\dfrac{|\lambda|^{1-1/2m}}{\varepsilon\, d(\lambda)}\right)^j$

$i=0$ のとき　${}^iR^j_{\lambda\varepsilon}=\theta_\varepsilon|\lambda|/d(\lambda)+\left(\dfrac{|\lambda|^{1-1/2m}}{\varepsilon\, d(\lambda)}\right)^j$

又 K_j は ε,λ,x_0 に無関係な定数で θ_ε は $\varepsilon\to0$ のとき 0 に行く。

<u>証明</u> $|B_2[v,v]-\lambda(v,v)| \leq |(\tilde{B}_i - B_2)[(A_{i+3}-\lambda)^{-1}f,\ \zeta_\varepsilon v]| +$

$|B_2[v,v]-B_2[u,\zeta_\varepsilon v]| = I_1 + I_2$ とおく。（ここで $C_1=C_5$ と考へてもよいから） 補題 2.5 の ii) と $|a_{\alpha\beta}(x)-\tilde{a}_{\alpha\beta}(x)| \leq K_1\cdot\varepsilon^{i-1+h}$ if $|x-x_0|<\varepsilon$; $i=1,2$, 又 $i=0$ のときは $|a_{\alpha\beta}(x)-\tilde{a}_{\alpha\beta}(x)| \leq K_1\theta_\varepsilon$ を使用して I_1 を評価する。 たとへば $i=1$ の時は 補題 2.3の証明と同様にして（$L_2\to\cdot$ は $V^*\to\cdot$ と同様にできるので $V^*\to\cdot$ のみをする。）

$$|I_1| \leq k_7\,\varepsilon^h\cdot(|\lambda|/d(\lambda))\,\|f\|_{-m}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0)\ , \qquad (2-11)$$

$$|I_2| \leq k_8\,(\varepsilon^{-1}|\lambda|^{1-1/2m}/d(\lambda))\,\|f\|_{-m}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0)$$

を得る事と (2-10) を使用して $j=1$ の時が証明できた。 後は帰納法を使用する。 ここで $\zeta\in\Lambda$ $x\in supp\,\zeta$ に対して $\zeta(x)=1$ なるものとするとき

$$|I_2| \leq k_9\,(\varepsilon^{-1}|\lambda|^{-1/2m})(\|\zeta_\varepsilon u\|_m + |\lambda|^{1/2}\|\zeta_\varepsilon u\|_0)(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0) \qquad (2-12)$$

となる。 ここで帰納法の仮定を使用して

$$\|\zeta_\varepsilon u\|_m + |\lambda|^{1/2}\|\zeta_\varepsilon u\|_0 \leq K_j\,{}^{'}R^j_{\lambda,\varepsilon}\,|\lambda|/d(\lambda)\,\|f\|_{-m}(\|v\|_m + |\lambda|^{1/2}\|v\|_0) \qquad (2-13)$$

さて (2-10), (2-11), (2-12) (2-13) を考へる事により $\varepsilon^{-1}|\lambda|^{-1/2m}|\lambda|/d(\lambda) \leq 1$ のとき $j+1$ の式が得られる。 又 $i=0,2$ の場合も同様に出来る。

ここで A_{i+3} の *resolvent* 核を $K^{(i+3)}_\lambda(x,y)$ とすれば（$i=0,1,2$）補題 1.1 と補題 2.7 から次の補題を得る。

<u>補題 2.8</u> $\varepsilon^{-1}|\lambda|^{1-1/2m}/d(\lambda) \leq 1$ のとき $x_0, \varepsilon, \lambda$ に無関係な定数 C_6 が存在する。

$$|K_\lambda^2(x_0,x_0)-K_\lambda^{3+i}(x_0,x_0)|\leq C_6|\lambda|^{n/2m}/d(\lambda)\ {}^iR_{\lambda\varepsilon}^j$$

ここで $i=0,1,2$ である。

次に境界のなめらかさがいきないため R^n に拡張した楕融作用素と比較する。　$i=0,1,2$ として

$$\tilde{B}'_{3+i}[u,v]=\int_{R^m}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a^i_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u\,\overline{D^\beta v}\,dx \qquad \forall u,v\in\dot{H}_m(R^n)。$$

補題 2.9　次の不等式を得る。

$$\tilde{B}'_{3+i}[u\,u]\geq C_7\|u\|_m^2-C_8\|u\|_0^2 \qquad \forall u\in\dot{\tilde{H}}_m(R^n)$$

ここで $\tilde{B}'_{3+i}[u,v]+C_8(u,v)=\tilde{B}_{3+i}[u,v]$ とおく。これより $\tilde{B}_{3+i}[u,v]=(A_{6+i}u,v)$ がきまり その A_{6+i} に対して補題 2.1 と同様な評価式がなりたつ。ここで $K_\lambda^{6+i}(x,y)$ を A_{6+i} の resolvent 核とするとき $K_\lambda(x,y)$ と $K_\lambda^2(x,y)$ との評価式と同様な方法により次の補題を得る。

補題 2.10　$0\leq{}^\forall p\leq 1$ としたとき

$$|K_\lambda^{6+i}(x_0,x_0)-K_\lambda^{3+i}(x_0,x_0)|\leqq C_9\,|\lambda|^{n/2m}/d(\lambda)\left(\frac{|\lambda|^{1-1/2m}}{\delta(x_0)d(\lambda)}\right)^p。$$

ここで C_9 は x_0,λ には無関係な定数。

Agmon-Kannai [4] によって次の評価式を得る。

補題 2.11　$d(\lambda)\geq|\lambda|^{1-1/2m\times\frac{1}{2}+\eta}$　$({}^\forall\eta>0)$ のとき x_0,λ には無関係な定数 C_{10} が存在する。

71

$$|K_\lambda^{6+i}(x_0, x_0) - C(x_0)(-\lambda)^{-1+n/2m}| \leq C_{10}|\lambda|^{-1+(n-1)/2m}$$

ここで　$C(x_0) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0)\xi^{\alpha+\beta} + 1\}^{-1} d\xi$ 。

§3.　固有値とresolvent核との関係

いま作用素Aの固有値は離散的である。そこでこれを$\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$とおくとき Agmon[1]によって次の補題を得る。

<u>補題3.1</u>

$$\int_\Omega K_\lambda(x, x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j - \lambda}$$

<u>補題3.2</u>　S-(0)のとき　$C_0 = \int_\Omega C(x_0)\,dx_0$ とすれば

$$N(t) = \sum_{Re\lambda_j < t} 1 = C_0 t^{n/2m} + o(t^{n/2m})$$

<u>証明</u>　λを虚数軸にとり　補題2.4, 2.8, 2.10, 2.11を組合せて　$P = \frac{1}{2}$と取る時　ルベーグの定理が使用できて

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\lambda^{-1+n/2m}\int_\Omega K_\lambda(x,x)\,dx = \int_\Omega \lim_{|\lambda|\to\infty}\lambda^{-1+n/2m}K_\lambda(x,x)\,dx = C_0$$

がわかる。又補題3.1を使用する事により

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j - \lambda} = C_0(-\lambda)^{-1+n/2m} + o(\lambda^{-1+n/2m})$$

これに Hardy-Littlewood の Tauberian Theorem を使用する事により証明できる。

<u>補題3.3</u>　$^{\forall}\gamma > 0$として　次の関係を満たすλに無関係な定数C_{11}が存在する。　ただし $d(\lambda) \geq C|\lambda|^{1-1/2m+\gamma}$ とする。

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j-\lambda}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}\right| \le C_{11}|\lambda|^{1+(n-1)/2m+\varepsilon}/d^2(\lambda)$$

<u>証明</u>

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j-\lambda}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda}\right| \leqq \sum_{\mathrm{Re}\lambda_j\le 2|\lambda|}\frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_j|}{|\lambda_j-\lambda||\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda|}+\sum_{\mathrm{Re}\lambda_j>|\lambda|}(\ 〃\ )$$

後者は補題3.2，2.1を使用して

$$|\lambda_j-\lambda| \ge k_1|\lambda|^{1-n/2m-\varepsilon}\,j^{(1+\varepsilon)}$$

$$|\mathrm{Im}\lambda_j||\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda|^{-1} \le k_2|\lambda|^{-1/2m}$$

から証明できる。 一方前者は補題2.1と3.2を使用して

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_j| \le k_3|\lambda|^{1-1/2m}, \quad N(2|\lambda|) \le k_4|\lambda|^{-1+n/2m}$$

より証明できる。

今までの事をすべて総合すると次の定理が得られる。

<u>定理3.1</u> $\forall\varepsilon>0$， $0\le\forall p\le 1$として $d(\lambda)\ge|\lambda|^{1-1/2m\times\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{8}}$のとき

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\lambda_j-\lambda)^{-1} = C_0(-\lambda)^{-1+n/2m}$$

$$+O[|\lambda|^{(i+h)+(n-i+1-h)/2m+\varepsilon}/d(\lambda)^{1+h+i}$$

$$+|\lambda|^{p+(n-p)/2m}/d(\lambda)^{1+p}+|\lambda|^{1+(n-1)/2m+\varepsilon}/d^2(\lambda) \ .$$

ここで S-(1)ならば $i=1$，S-(2)ならば $i=2$ とする。

<u>証明</u> 補題2.8で $\varepsilon=|\lambda|^{1-1/2m+\frac{\varepsilon}{4}}/d(\lambda)$ととると $iR^{j}_{\lambda\varepsilon}$の後者の項は$j$を大にすれば無視できる。あとは補題2.4，2.10，2.11，3.1 3.2を使用すればよい。

以下Agmon[5]の方法に従う。

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\,\lambda_j - \lambda)^{-1}, \quad I(z) = (2\pi i)^{-1}\int_{L(z)} f(\lambda)\,d\lambda$$

とおく。　ここで $z = t + i\tau$ として z と $\bar{z}$ を結ぶ正の実軸を通らない曲線とする。　すると $t>0$, $\tau>0$ とした時

$$|I(z) - (\tau/\pi)\,\mathrm{Re}\,f(z) - N(t) + N(0)| \leq C_{12}\,\tau \cdot |\mathrm{Im}\,f(z)|$$

となる。　以下 S-(1) の場合をとりあつかう。$d(\lambda) \geq |\lambda|^{1-1/2m \cdot h/(h+2) + \varepsilon}$ の仮定のもとで　λ に無関係な定数 C_{13} が存在する，すなわち

$$|f(\lambda)| \leq C_{13}\,|\lambda|^{-1+n/2m} 。$$

ここで $L(z) = \{\lambda = t + iu \in \mathbb{C}^1;\ t^{1-h/2m(h+2)+\varepsilon} \leq u \leq t\} \cup \{\lambda;\ |\lambda| = \sqrt{2}\,t;\ \mathrm{Re}\,\lambda \leq t\}$

とおく。　上記の事より

$$|I(z) - N(t)| \leq C_{14}\, t^{n/2m - h/2m(h+2) + \varepsilon}$$

一方　I_1, I_2 を次の様におく。

$$I(z) = (2\pi i)^{-1}\int_{L(z)} \{f(\lambda) - C_0(-\lambda)^{-1+n/2m}\}\,d\lambda + (2\pi i)^{-1}\int_{L(z)} C_0(-\lambda)^{-1+n/2m}\,d\lambda$$
$$= I_1 + I_2 。$$

定理3.1を使用して，$h/2 < p < 1$ に取る事によって

$$|I_1| \leq C_{15}\, t^{n/2m - h/2m(h+2) + \varepsilon}$$
$$\left|I_2 - t^{n/2m}\frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m}\right| \leq C_{16}\, t^{n/2m - h/2m(h+2) + \varepsilon} 。$$

以上よりすべて組み合せれば

$$N(t) = C_0\,\frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m}\,t^{n/2m} + O(t^{n/2m - h/2m(h+2) + \varepsilon}) 。$$

S-(2) のときは，if $h<1$,　$1 > p \geq (h+1)/2$ と取り　$h=1$ の時は 1 の十分近くに p を取る事により　同様な方法によって

$$N(t) = C_0\, t^{n/2m} + O[t^{n/2m - (h+1)/2m(h+3) + \varepsilon}] 。$$

以上より

定理3.2　Ω；限定円錐条件を満たす有界領域で

$$\int_\Omega \delta^{-p}(x)\,dx < +\infty \qquad 0 <^\forall p < 1$$

と仮定する。　このとき

S−(0)　なれば

$$N(t) = C_0 \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m} t^{n/2m} + o(t^{n/2m})\text{。}$$

次に、　$$N(t) = C_0 \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m} t^{n/2m} + O(t^{(n-\theta)/2m}).$$

ここで S −(1) なれば　　$0 <^\forall \theta < h/(h+2)$

S −(2) なれば　　$0 <^\forall \theta < (h+1)/(h+3)$ 。

又　$$C_0 = \int_\Omega C(x_0)\,dx_0 = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} \Big\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\,\xi^{\alpha+\beta} + 1 \Big\}^{-1} d\xi$$

となる。

文　献　表

[1], S. Agmon; Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Mathematical Studies, 1965

[2], S. Agmon; On the eigenfunctions and on the eign-values of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., vol 15, (1962), 119−147.

[3], S. Agmon; On kernels eigenvalues and eigen-functions of operators related to elliptic problems, Comm. Pure Appl. Math., vol 18, (1965), 627−663.

[4]. S. Agmon and Y. Kannai; On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math. 5 (1967), 1-30.

[5]. S. Agmon; Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators; Arch Rational Mech. Anal. 28. (1968). 165-183

[6]. N. Dunford and J. T. Schwartz; Linear Operators. vol 2, Interscience Publishers, New York, 1963

[7] T. Kato; Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan 13. (1961) 246-274