数理解析研究所講究録
第 161 巻 1972 年 125-138

楕円型作用素の固有値分布と負の固有値について

東大 理 田村 英男

§1 序

Aを 定義域 $\mathcal{D}(A)=H^m(R^n)$: (order $m>0$ の Sobolev 空間) とする $L^2(R^n)$ の中の 正値 自己共役 楕円型作用素とする (詳しい 仮定は 後で与える)

$p(x)$ を 非負の 実数値函数 で $H^{m-\varepsilon}(R^n)\longrightarrow L^2(R^n)$ $(\varepsilon>0)$ への 作用素として完全連続 と仮定する

任意の $\lambda>0$ に対して

$$A_\lambda = A-\lambda p(x) \quad \text{とおく.}$$

このとき A_λ は $\mathcal{D}(A_\lambda)=\mathcal{D}(A)=H^m(R^n)$ として 自己共役作用素 で 可算個の負の固有値を もつ. (もし存在するならば. 唯一の集積点は 0 である)

今 任意に固定された $r>0$ に対して $N_r(\lambda)$ を $(-\infty,-r)$ に存在する A_λの負の 固有値の個数を表わすものとする. $N_r(\lambda)$ の $\lambda\to\infty$ としたときの漸近的

挙動を調べるのが本稿の目的である.

この問題は次の固有値問題の固有値漸近分布と密接に関連する.

(1.1) $(A+r)\, u = \lambda\, p \cdot u.$

$n_r(\lambda)$ を (1.1)の $(0.\lambda)$ に存在する固有値の個数とすれば. $N_r(\lambda)=n_r(\lambda)$ であることが知られている

一般に $A-p(x)$ の負の固有値は $p(x)$ の無限遠における減衰状態に関係してくる. この事実から $N_r(\lambda)=n_r(\lambda)$ ~~と~~. $p(x)$の無限遠における減衰状態も密接に関係しているように思われる. (1.1) の固有値漸近分布を $p(x)$が滑らかな場合について. Agmon [1] の方法で調べ, 更に Birman–Solomyak 等の補題によって $p(x)$が singular の場合に摂動論的方法によって拡張する.

§2. (仮定) と(定理).

$$A(x.D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad \left(D=\frac{\partial}{i\partial x}\right) \quad \text{on } R^n$$

(仮定)

(i) $a_\alpha(x)\in B^\infty(R^n)$; 無限回微分可能, 微係数有界.

(ii) $a_\alpha(x)=a_\alpha+b_\alpha(x)$; a_α はある正定数. $b_\alpha(x)$は $|D^j b_\alpha(x)|\le C(j)|x|^{-s}$ $(s>0)$ $|x|\ge R>0$. を満足する.

(iii) 一様楕円型. $A'(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq C|\xi|^m$.

(iv) 形式的自己共役でかつ非負. 即ち $(A(x,D)u,u)\geq 0$

for $\forall u\in C_0^\infty(R^n)$

(v). $A_0(D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha D^\alpha$ とおく. $A_0(D)$ は明らかに一様楕円型作用素で かつ $A_0(\xi)\geq 0$ を満足するものとする.

$A(x,D)$. $A_0(D)$ は一意的自己共役拡張をもち. それらを A, A_0 とおく. $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A_0)=H^m(R^n)$.

(記号) $p(x)\in K_\ell$ $(\ell>0)$

$\Longleftrightarrow$ (i) $p(x)>0$. $p(x)\in \mathcal{B}^\infty(R^n)$

(ii) $\frac{c_2}{1+|x|^\ell}\leq p(x)\leq\frac{c_1}{1+|x|^\ell}$

(iii) $|D^j p(x)|\leq C(j)\,p(x)$.

(定理)

Aが上の仮定を満足し. $p(x)\in K_\ell$ のとき. 次のことが成立する

(i) $\ell>m$ のとき

$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int w(x)p(x)^{\frac{n}{m}}dx\,\lambda^{\frac{n}{m}}+o(\lambda^{\frac{n}{m}})$.

$w(x)=\mathrm{meas}\{\xi \mid A'(x,\xi)\leq 1\}$ $A'(x,\xi)$は$A(x,D)$の主部

(ii) $\ell=m$ のとき

$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{\lambda p(x)\geq}w(x)(\lambda p(x)-1)^{\frac{n}{m}}dx+o(\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda)$

特に主部が定数係数で $p(x)$ が十分遠方で $|x|^{-m}$ に等しい

とき

$$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\mathfrak{S}\frac{1}{m}W\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda+o(\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda)$$

$W=\mathrm{meas}\{\xi \mid A'(\xi)\le 1\}$；$\mathfrak{S}$は単位球の表面積 $\{n=1$ のとき $\mathfrak{S}=2\}$

(iii) $0<l<m$，でかつ $p(x)$ が十分遠方で $C|x|^{-l}$ に等しいとき $(C>0)$.

$$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=C_r\lambda^{\frac{n}{l}}+o(\lambda^{\frac{n}{l}})$$

$$C_r=(2\pi)^{-n}\frac{1}{n}\mathfrak{S}\cdot\int(A_0(\xi)+r)^{-\frac{n}{l}}d\xi\, C^{\frac{n}{l}}$$

特に $A_0(\xi)$ が斉次形の場合

$$C_r=(2\pi)^{-n}\frac{1}{m}\mathfrak{S}\cdot\{\Gamma(\tfrac{n}{m})\cdot\Gamma(\tfrac{n}{l}-\tfrac{n}{m})/\Gamma(\tfrac{n}{l})\}W_0 r^{\frac{n}{m}-\frac{n}{l}}$$

$$W_0=\mathrm{meas}\{\xi;\ A_0(\xi)\le 1\}.$$

この定理から Birman-Solomyak-Borzov([3] [4]) の補題によって $p(x)$ が Singular の場合に拡張出来る.

例えば．次のような系が成立する

(系).1° $\{Q_k\}$：単位Cube；R^nをおおう.

$\sigma_{s.k}=\|p\|_{(s.Q_k)}$ $(s=1.$ if $m>n$，$s>\frac{n}{m}$ if $m\le n)$.

$\|\ \|_{(s,Q_k)}$ は Q_k における L^s-norm.

$b_s(p)=\sum_k(\sigma_{s.k})^{\gamma}<\infty$ $\quad(\gamma=\frac{n}{m})$. のとする.

$p(x)=p_\varepsilon^{(1)}(x)+p_\varepsilon^{(2)}(x)$ $\qquad(\varepsilon>0)$.

で $p_\varepsilon^{(1)}(x)\in K_l$.，$b_s(p_\varepsilon^{(2)})<\varepsilon$ を満足するように分解出来るとすると，$(A+r)u=\lambda pu$ の

漸近分布は

$$N_r(\lambda) = n_r(\lambda) = (2\pi)^{-n}\int p(x)^{\frac{n}{m}} w(x)\,dx \cdot \lambda^{\frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{m}}).$$

2°. $p(x) = p_\varepsilon^{(1)}(x) + p_\varepsilon^{(2)}(x) + p^{(3)}(x)$ と分解されて

$\mathscr{b}s(p^{(3)}) < +\infty$, $p_\varepsilon^{(1)}(x)$ は K_ℓ $(\alpha < \ell < m)$ に属して十分遠方において $C|x|^{-\ell}$ に等しく, $|p_\varepsilon^{(2)}(x)| \le \frac{\varepsilon}{1+|x|^\ell}$ を満足するならば,

$$N_r(\lambda) = n_r(\lambda) = C_r\lambda^{\frac{n}{\ell}} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}})$$ となる.

(C_r は定理の中で定義されたものとする).

[例]: $A = -\Delta$, $p(x) = \frac{1}{|x|}$ on R^3.

$A_\lambda = -\Delta - \frac{\lambda}{|x|}$. このとき $m=2$, $n=3$, $\ell=1$ として

$C_r = \frac{1}{24} r^{-\frac{3}{2}}$. 従って $N_r(\lambda) = \frac{1}{24} r^{-\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}} + o(\lambda^{\frac{3}{2}})$

一方. A_λ の負の固有値は $\mu = -\lambda^2 \cdot \frac{1}{4j^2}$ (多重度 j^2)

$-\frac{\lambda^2}{4j^2} < -r$ より $j < \frac{\lambda}{2} r^{-\frac{1}{2}} = j_0$

従って $n_r(\lambda) \sim \sum_{j=1}^{j_0} \sim \frac{1}{6}(\frac{\lambda}{2} r^{-\frac{1}{2}})(\frac{\lambda}{2} r^{-\frac{1}{2}} + 1)(\lambda r^{-\frac{1}{2}} + 1)$

$$= \frac{1}{24} r^{-\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^2).$$

§3: 定理の証明.

簡単のため. A が定数係数の場合について証明を与える. 変数係数の場合も全く同様の方法によって証明することが出来る. 証明は (i) の場合について行い (ii) の場合について簡単にふれる程度にとどめる.

まず $m>n$, $l>n$. (即ち $p(x)\in L^1(R^n)$)の場合を考える. 一般の場合はこの場合に帰着させる.

$(A+r)u=\lambda p(x)\cdot u$ の固有値を $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ とすれば, 明らかに $p^{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}p^{\frac{1}{2}}$ の固有値は $\{\frac{1}{\mu_i+\lambda}\}$ であり, trace formula

$$\sum_i \frac{1}{\mu_i+\lambda} = \int_{R^n} p(x)\, R_\lambda(x,x)\,dx$$ が成立する.

$R_\lambda(x,y)$ は $(A+r+\lambda p)^{-1}$ の積分核で, $m>n$ であるので, 有界 連続 である.(後述).

Tauber型定理の適用のために, $R_\lambda(x,x)$ の $\lambda\to\infty$ のときの漸近的性質を調べる. そのために次のagmon [ ] の補題を出発点とする.

[補題1] (agmon)

Tが $L^2(R^n)$ の中の有界作用素で $R(T)$, $R(T^*)$ が $H^m(R^n)$ $(m>n)$ に含まれるとき

(i) Tは積分作用素で

$$Tu=\int_{R^n} T(x,y)\,u(y)\,dy \qquad u\in L^2(R^n).$$

$T(x,y)$ は $R^n\times R^n$ の上で一様連続かつ有界.

(ii) $$|T(x,y)|\le \gamma\,(\|T\|_m+\|T^*\|_m)^{\frac{n}{m}}\,\|T\|_0^{1-\frac{n}{m}}$$

($\|\cdot\|_m$ は $L^2\to H^m$ への作用素norm). //

[補題2] $p(x)\in K_l$. $(l>0)$, Aは仮定を満足する. $r>0$ に対して $(A+r)p^{-1}$ は $\mathcal{D}((A+r)p^{-1})=$

$= \{ u \in L^2(R^n) \mid p^{-1}u \in H^m(R^n) \}$ を定義域とする
閉作用素であり，更に $^\forall\lambda > 0$ に対して

$$\| ((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1} \|_0 \le \frac{C}{\lambda}$$ が成立する。

(証明)：前半の主張は $((A+r)p^{-1})^{-1} = p(A+r)^{-1}$ より明らか。
$p(x) \in K_e$ より $p^{\frac{1}{2}} A p^{-\frac{1}{2}}$ は $B^\infty(R^n)$ を係数とする一様楕円型作用素。従って Gårding's 不等式より

$$Re((p^{\frac{1}{2}} A p^{-\frac{1}{2}} + c)v, v) \geqq 0. \quad v \in H^{\frac{m}{2}}(R^n).$$

$^\forall u \in \mathcal{D}((A+r)p^{-1})$ に対して

$$Re(\{(A+r+c)p^{-1}+\lambda\}u, u)$$
$$= Re((A+r+c)p^{-1}u, u) + \lambda\|u\|_0^2$$
$$= Re(p^{\frac{1}{2}}(A+r+c)p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{1}{2}}u, p^{-\frac{1}{2}}u) + \lambda\|u\|_0^2 \geqq \lambda\|u\|_0^2$$

($p^{-\frac{1}{2}}u \in H^m(R^n)$ であるので).

故に $\quad \|((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}\|_0 \le \frac{1}{\lambda}$

更に $((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1} = ((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}((A+r+c)p^{-1}+\lambda)((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}$

$= ((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}(1+c(A+r+\lambda p)^{-1})$ から

$$\|((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}\|_0 \le \frac{C}{\lambda}$$ が従う。 //

$\varphi(x)$ を次のように定義する。 $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ $0 \le \varphi(x) \le 1$.

$$\varphi(x) \equiv 1 \ (|x| \le \tfrac{1}{2}). \quad \varphi(x) \equiv 0 \quad (|x| \geqq 1)$$

$x_0 \in R^n$ に対して $\varphi_{(x_0,\delta)}(x) = \varphi((x-x_0)/\delta)$ とおく。

(補題)3 $\quad \|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\|_0 \le C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$

$$\|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\|_m \le C$$

(証明) まず次のことを注意しておく.

$$\varphi(x) \leq C\,p(y) \qquad \text{for } |x-y|\leq 1 \;.. \;(p(x)\in K_\ell).$$

$$\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}$$

$$\equiv \varphi_{(x_0,1)}(r+\lambda p)^{-\frac12}\left((r+\lambda p)^{-\frac12}A(r+\lambda p)^{-\frac12}+1\right)^{-1}(r+\lambda p)^{-\frac12}\varphi_{(x_0,1)}$$

上の注意から $\quad |\varphi_{(x_0,1)}(r+\lambda p)^{-\frac12}| \leq C\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-\frac12}$

従って $\quad \|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\| \leq C\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-1}$

次に m-normの評価を与える.

$$\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}$$

$$= \varphi_{(x_0,1)}(A+r)^{-1}(A+r)p^{-1}\left((A+r)p^{-1}+\lambda\right)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}.$$

$(A+r)p^{-1}\left((A+r)p^{-1}+\lambda\right)^{-1} = 1-\lambda\left((A+r)p^{-1}+\lambda\right)^{-1}$ より

上の補題をつかって.

$$\|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\|_m \leq C. \qquad //$$

(iii)を証明するための準備が出来たので これから証明にうつる. まず最初に $p(x)$ が (iii)の仮定を満足すると

for $|x-y|\leq \frac12 p(x)^{-\frac1\ell}$

(i) $\quad |p(x)-p(y)| \leq C|x-y|\,p(x)^{1+\frac1\ell}$

(ii) $\quad |D^j p(x)| \leq C(j)\,p(x)^{1+\frac{|j|}{\ell}}$ が成立する.

$\varphi_\delta(x) = \varphi\left(((x-x_0)/\delta)\,p(x_0)^{\frac1\ell}\right)$ とおく.

以下 $x_0\in R^n$ は任意に固定して考える.

$$\|\varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac12}\|_0 \le C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$$

$$\|\varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac12}\|_m \le C.$$

上の事実は $p(x)$ の仮定により 補題の証明と全く同様にして証明出来る/

十分小さい $\varepsilon>0$ に対して，$\varphi_{\frac12}\cdot\varphi_\varepsilon\equiv\varphi_\varepsilon$. となるから

$$H_\lambda \equiv \varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon(A+r+\lambda p(x_0))^{-1}\varphi_{\frac12}$$

$$\equiv \varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac12}\, B_\varepsilon\cdot\varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p_0)^{-1}\varphi_{\frac12}$$

$$+\varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac12}\cdot\varphi_\varepsilon(p-p_0)\varphi_{\frac12}(A+r+\lambda p_0)^{-1}\varphi_{\frac12}$$

ここで $p(x_0)=p_0$.　$B_\varepsilon=\varphi_\varepsilon A - A\varphi_\varepsilon$.

(B_ε は $m-1$ 階の微分作用素で，すべての係数は φ_ε に関する微分を含む。)　$|D^j\varphi_\varepsilon|\le C(\varepsilon)p(x_0)^{\frac{j}{2}}\le C(\varepsilon)p(x_0)^{\frac12}$

より　$\|B_\varepsilon\|_{(m-1\to 0)}\le C(\varepsilon)p(x_0)^{\frac12}$

$\|\cdot\|_{(m-1\to 0)}$ は $H^{m-1}\to L^2$ への作用素 norm を示す.

$H_\lambda\equiv H_\lambda^{\mathrm{I}}+H_\lambda^{\mathrm{II}}$ とおく.

$$\|H_\lambda^{\mathrm{I}}\|_0\le C(\varepsilon)\cdot p(x_0)^{\frac12}\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-(1+\frac1m)}.$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{I}}\|_m\le C(\varepsilon)\, p(x_0)^{\frac12}(1+\lambda p(x_0))^{-\frac1m}.$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{II}}\|_0\le \varepsilon\cdot C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{II}}\|_m\le\varepsilon\cdot C.\qquad \|(H_\lambda^{\mathrm{II}})^*\|_m\le\varepsilon\cdot C$$

$$\|(H_\lambda^{\mathrm{I}})^*\|_m\le C(\varepsilon)\,p(x_0)^{\frac12}(1+\lambda p(x_0))^{-\frac1m}$$

上のような 0-norm. m-norm の評価が 補題と $p(x)$ の性質をつかって，容易に得られる.

従って agmon の補題を使って

$$|H_\lambda^{I}(x,y)| \le C(\varepsilon)\, p(x_0)^{\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x_0))^{\frac{n-1}{m}-1}$$

$$|H_\lambda^{II}(x,y)| \le \varepsilon \cdot C\, (1+\lambda p(x_0))^{\frac{n}{m}-1}$$

一方 Fourier 変換によって

$$(A+r+\lambda p_0)^{-1}u = \int F_{(x_0,\lambda)}(x-y)\,u(y)\,dy$$

$$F_{(x_0,\lambda)}(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}(A(\xi)+r+\lambda p(x_0))^{-1}d\xi.$$

特に (x_0,x_0) において $H_\lambda(x_0,x_0) = R_\lambda(x_0,x_0) - F_{(x_0,\lambda)}(0)$

に注意すれば，十分小さい $^\forall\varepsilon>0$ に対して

$^\exists C(\varepsilon)$，x に対して一様に次の評価が成立する．

$$|R_\lambda(x,x) - F_{(x,\lambda)}(0)| \le C\cdot\varepsilon\,(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}$$
$$+\, C(\varepsilon)\cdot p(x)^{\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1}.$$

次のような積分計算は容易に証明出来る．

$$\int p(x)^{1+\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1}dx = O(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1-\theta}) \quad (\theta>0)$$

$$\int p(x)\,(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1}dx = O(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1})$$

$$\int p(x)\,F_{(x,\lambda)}(0)\,dx = C\lambda^{\frac{n}{\ell}-1} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1})$$

$$C = (2\pi)^{-n}\cdot S\cdot\frac{\pi}{\ell}\cdot\left(\sin\frac{n}{\ell}\pi\right)^{-1}\int(A(\xi)+r)^{-\frac{n}{\ell}}d\xi\, C^{\frac{n}{\ell}}.$$

従って trace formula より

$$\sum\frac{1}{\mu_i+\lambda} = \int p(x)\,R_\lambda(x,x)\,dx$$
$$= C\lambda^{\frac{n}{\ell}-1} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1}).$$

Hardy-Littlewood の Tauber 型定理より前の事実が得られる．

一般の場合には、反復法を用いて証明する。

$p(x) \in K_\ell \ (\ell > 0)$ であるので、$^\forall k > 0$ に対して

$p^{\frac{k}{2}}(A+r)p^{-\frac{k}{2}}$ は $B^\infty(R^n)$ 係数の一様楕円型作用素。

$B_k = [p^{\frac{k}{2}}(A+r)p^{-\frac{k}{2}}]^a$ ($[\ \ ]^a$ は closure を意味する)。明らかに $\mathcal{D}(B_k) = H^m(R^n)$ である。

(補題) $[p^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1}p^{-\frac{k}{2}}]^a$ は $L^2(R^n)$ の有界作用素。

従って $B_k^{-1} = [p^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1}p^{-\frac{k}{2}}]^a$

(注) 例えば $A = -\Delta$ のとき。

$C p^{\frac{k}{2}}(x)\, e^{-\sqrt{r}|x-y|}/|x-y| \cdot p^{-\frac{k}{2}}(y) = K(x,y)$ とおくと

Peetreの不等式より $|p^{\frac{k}{2}}(x)\, p(y)^{-\frac{k}{2}}| \leq C(1+|x-y|)^{\frac{k\ell}{2}}$

故に $|K(x,y)| \leq C(1+|x-y|)^{\frac{k\ell}{2}}\, e^{-\sqrt{r}|x-y|}/|x-y|$

$= G(x-y)$.

$G(x)$ は L^1 に属する。convolution 核の性質により主張が従う。この論法は一般の定数係数の場合にも適用され得る。(即ち $(A+r)^{-1}$ の kernel が十分遠方で急減少、原点での特異性が空間次元より小さいこと)

更に、仮定を満足する変数係数の場合にも成立する。

$|a_\alpha(x) - a_\alpha| \leq C|x|^{-\delta}$ (十分遠方で) より

$^\exists \alpha > 0$ s.t. $p^{-\alpha} = O(|x|^{-\delta})$ とすれば、

よく知られた Resolvent equation

$p^\alpha(A+r)^{-1}p^{-\alpha} = p^\alpha(A_0+r)p^{-\alpha} + B$.

ここで　$B = p^{\alpha}(A+r)^{-1}(A_0 - A)p^{-\alpha}\cdot p^{\alpha}(A_0+r)^{-1}p^{-\alpha}\cdot$

$(A_0-A)p^{-\alpha}$ は有界係数をもつ微分作用素であるので

$p^{\alpha}(A+r)^{-1}p^{-\alpha}$ は $L^2(R^n)$ の中で有界作用素である．

更に．$p^{2\alpha}(A+r)^{-1}p^{-2\alpha}$

$$= p^{2\alpha}(A_0+r)^{-1}p^{-2\alpha} + p^{\alpha}\cdot p^{\alpha}(A+r)^{-1}p^{-\alpha}\cdot p^{\alpha}(A_0-A)p^{-2\alpha}\cdot p^{2\alpha}(A_0+r)^{-1}p^{-2\alpha}$$

前の議論により　$p^{\alpha}(A+r)^{-1}p^{-\alpha}$ は有界作用素として拡張され，$p^{\alpha}(A_0-A)p^{-2\alpha}$ は有界係数をもつ微分作用素．

従って　$p^{2\alpha}(A+r)^{-1}p^{-2\alpha}$ は有界作用素．この議論をくり返せば，主張は従う．

上の補題から次のことは容易に証明される．

$$p^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1} = B_k^{-1}p^{\frac{k}{2}}, \qquad (A+r)^{-1}p^{\frac{k}{2}} = p^{\frac{k}{2}}(B_k^{*})^{-1}$$

今 k（奇数），$k = 2S+1$（S：正の整数）．s.t. $km > n$, $kl > n$

$(p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}})^k = p^{\frac{k}{2}}\hat{A}^{-1}p^{\frac{k}{2}}$ と書き換えることが出来る，ここで　$\hat{A} = B_s B_{s-1}\cdots B_1(A+r)\cdot B_1^{*}\cdots B_s^{*}$．

$\hat{A}$ は（km 階）の B^{∞}－係数の一様楕円型作用素で，$\mathcal{D}(\hat{A}) = H^{km}(R^n)$．で　更に正値な自己共役作用素である．即ち　$\hat{A} \geq C > 0$

$\hat{A} - C_1$　$(C_1 < C)$，p^k（$p^k \in L^1$）をそれぞれ，前の議論の A，P として適用すれば，全く同様の議論によって，結果を得ることが出来る．

次の i) と ii) の結果について簡単にふれる.

i) は $\lim \lambda^{1-\frac{n}{m}} R_\lambda(x,x) = (2\pi)^{-n} p(x)^{\frac{n}{m}-1} \int (A'(\xi,x)+1)^{-1} d\xi$.

as $\lambda\to\infty$ (各点収束). しかも,

$p(x) \in K_\ell$ ($\ell > m$) より $p(x) \in L^{\frac{n}{m}}(R^n)$,

一方 $|\lambda^{1-\frac{n}{m}} p(x) R_\lambda(x,x)| \le C p(x)^{\frac{n}{m}}$ が容易に証明されるから. Lebesgue 収束定理より従う.

ii) は Korenblyum の Tauberian Theorem を適用する. (実は, この Tauberian Theorem を適用することによって, ii) の結果をもう少し一般化することが可能). 次の定理がそれである.

$\varphi(t)$, $\psi(t) \ge 0$. 単調増加函数.

$\exists\gamma < 1$, $\varphi(t_1)/\varphi(t_2) \le C(t_1/t_2)^{\gamma}$. (十分大きな $t_1 > t_2$).

かつ $\lim \varphi(t) = \infty$. as $t\to\infty$

$f(x) = \int_0^\infty (t+x)^{-1} d\varphi(t)$, $g(x) = \int_0^\infty (t+x)^{-1} d\psi(t)$.

のとき, $f(x)/g(x) \longrightarrow 1$ as $x\to\infty$, $\varphi(t)/\psi(t) \to 1$ as $t\to\infty$.

ii) の場合と同じ証明から

$$|R_\lambda(x,x) - (1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} E|$$

$$\le \varepsilon (1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} + C(\varepsilon)(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1}.$$

ここで $E = (2\pi)^{-n} \int (A'(\xi)+1)^{-1} d\xi$. である.

claim 1. $\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n-1}{m}-1} dx \Big/ \int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} dx \longrightarrow 0$

as $\lambda\to\infty$.

従って.

$$\sum_i \frac{1}{\mu_i+\lambda} = E\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx + o\left(\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx\right)$$

ここで, $\varphi(t)=\int_{tp(x)\geq 1}(tp(x)-1)^{\frac{n}{m}}dx$. とおくと

claim 2. $\varphi(t)$ は Tauberian Theorem の仮定を満足し, かつ,

$$\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx = \left(\frac{n}{m}\pi\right)^{-1}\sin\frac{n}{m}\pi\int_0^\infty (t+\lambda)^{-1}d\varphi(t).$$

この事実から (1) の主張が従う. //

参考文献.

(1) S. Agmon,
C. P. A. M. Vol 18. (1965). 627~663.

(2) M. Š. Birman.
Math. Sb. 55. (1961) 125~174.
A. M. S. Transl. 53 23~80.

(3). M. Š. Birman – M. Z. Solomyak.
Functional analysis and its application
Vol 4. no. 4. 1–13. (1970)

(4) M. Š. Birman – V. V. Borzov.
Problem in Math. Physics. Vol 5.
Edited by Birman. 24–38. (1971).