数理解析研究所講究録
第 161 巻 1972 年 139-162

抽象的散乱理論と素粒子論

明星大 理工　　関根 克彦

抽象的散乱理論の応用として，素粒子論におけるくりこみの問題と，統一理論の問題を扱う．

§1．抽象的散乱理論の定理

あとで使う定理をまとめておく．以下，$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ はそれぞれ有界作用素，コンパクト作用素，trace class operator の集合をあらわす．

1．1．Wave operator の存在定理

定理 1．1 [1]　$\mathfrak{H}^0$, $\mathfrak{H}$ を可分ヒルベルト空間とし，$J \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}^0, \mathfrak{H})$ が与えられているものとする．H^0, H をそれぞれ $\mathfrak{H}^0$, $\mathfrak{H}$ における自己共役作用素とし，$JD(H^0) \subset D(H)$ で，かつ

(1．1)　$HJ = JH^0 + V, \quad V \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H}^0, \mathfrak{H}),$

(1．2)　$J^*J - I^0 \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{H}^0),$

とする（I^0 は $\mathfrak{H}^0$ における恒等作用素）．このとき，wave operator

(1.3) $W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt} J e^{-iH^0 t} P^0$

が存在し，$\mathfrak{H}^0_{ac}$ を $\mathfrak{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす．ここに，$\mathfrak{H}^0_{ac}$($\mathfrak{H}_{ac}$) は H^0(H) にかんして絶対連続な $\mathfrak{H}^0$($\mathfrak{H}$) の部分空間，P^0 は $\mathfrak{H}^0$ の $\mathfrak{H}^0_{ac}$ への正射影をあらわす．

この定理で，とくに $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}$ の場合を考えると，Rosenblum-Kato の古典的な定理が得られる．

定理 1．2 [2][3]　H^0, H は可分ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における二つの自己共役作用素とし，

(1.4) $H = H^0 + V, \quad V \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H})$,

とする．このとき，wave operator

(1.5) $W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt} e^{-iH^0 t} P^0$

が存在し，$\mathfrak{H}^0_{ac}$ を $\mathfrak{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす．

ここで，(H, H^0) によって与えられる摂動はいわゆる trace class の摂動であるが，上の定理をもっと一般の摂動の場合に拡張するには，次の定理を用いる．

定理 1．3 [4]　$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $\phi(\lambda)$ は次の場合に class (M) の関数であるという．すなわち，$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は有限個の重ならない開区間 I_k，およびそれらの端点の和集合としてあらわされ，各 I_k において，$\phi(\lambda)$ は真に単調で微分可能，導関数 $\phi'(\lambda)$ は連続で $\neq 0$，かつ

局所的に有界変動，という場合である．また，class (M)の関数の列 $\{\psi_n\}$ は，区間 $(-n, n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ において univalent であるとき，approximate univalent sequence であるという．いま，

(1.6) $\quad \psi_n(H) = \psi_n(H^0) + V_n, \quad V_n \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H}),$

であるとする．このとき，wave operator (1.5) が存在して，$\mathfrak{H}^0_{ac}$ を $\mathfrak{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす．

この定理で，とくに，

$$\psi_n(\lambda) = i\left[\frac{1}{n - i\lambda} - \frac{1}{n + i\lambda}\right]$$

にとることにより，次の定理が得られる．

<u>定理 1.4</u> [5][6] $\quad H^0, H$ を可分ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における自己共役作用素とし，それらの resolvent を R^0_z, R_z，resolvent set を ρ^0, ρ であらわす．$z \in \rho^0 \cap \rho$ にたいし，

(1.7) $\quad A_z \equiv R_z - R^0_z \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H}),$

であるとき，wave operator (1.5) が存在して，$\mathfrak{H}^0_{ac}$ を $\mathfrak{H}_{ac}$ へ等距離的にうつす．

1．2．<u>Wave operator の表現定理</u>

<u>定理 2.1</u> [1] $\quad$ 定理 1.1 の条件のもとで，wave operator (1.3) は次のようにあらわされる：

(1.8) $\quad (W_\pm f, g) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E^0_\lambda Q_{\mu\pm i0}\, g)_0 \right]_{\mu=\lambda} d\lambda .$$

ここに，$f \in \mathfrak{H}^0$, $g \in \mathfrak{H}$，$(\cdot , \cdot)_0$ と $(\cdot , \cdot)$ はそれぞれ $\mathfrak{H}^0$, $\mathfrak{H}$ の内積をあらわし，E^0_λ (E_λ) は $H^0 (H)$ のスペクトル分解にあらわれる射影作用素，$Q^0_z = J + VR^0_z$，$Q_z = J^* - V^* R_z$ である．

とくに，二つのヒルベルト空間が一致した場合には，

<u>定理 2．2</u> [7]　定理 1．2 の条件のもとで，wave operator (1．5) は次のようにあらわされる：

(1．9)　$(W_\pm f, g) =$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E^0_\lambda Q_{\mu\pm i0}\, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda .$$

ここに，$Q^0_z = I + VR^0_z$，$Q_z = I - VR_z$．

また，定理 1．4 が成り立つ場合に使える公式として，次のものが得られる．

<u>定理 2．3</u> [8]　定理 1．4 の条件のもとで，

(1．10)　$(W_\pm f, g) =$
$$= \lim_{\varepsilon\to\pm 0} (-i\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda R^0_{\mu+i\varepsilon} f, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda$$
$$= \lim_{\varepsilon\to\pm 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\lambda} (f, E^0_\lambda R_{\mu+i\varepsilon}\, g) \right]_{\mu=\lambda} d\lambda$$

この公式は，定理 1．2 の条件が成り立っている場合には，(1．9) に変形できる．

1．3 Trace formula と scattering operator

<u>定理 3．1</u> [9] 定理 1．2 の条件のもとで，実数値可測関数 $\xi(\lambda) \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$ が存在し，

(1．11) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|\, d\lambda \leq \mathrm{tr}\, |V|$$

(1．12) $$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, d\lambda = \mathrm{tr}\, V$$

<u>定理 3．2</u> [9][5] 定理 1．4 の条件のもとで，

(1．13) $$\mathrm{tr}\, A_z = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2}\, d\lambda$$

ここに ξ は，附加定数を除いて定まる可測関数で，$(1+\lambda^2)^{-1}\xi(\lambda) \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$

<u>定理 3．3</u> [5] 定理 1．4 の条件のもとで，scattering operator

(1．14) $$S = W_+^* W_-$$

が存在し，$\mathfrak{H}^0_{ac}$ 上のユニタリー作用素である．$\mathfrak{H}^0_{ac}$ は，

(1．15) $$\mathfrak{H}^0_{ac} = \int \oplus\, \mathfrak{H}_\lambda\, d\sigma(\lambda)$$

の形に分解でき，S によって $\mathfrak{H}_\lambda$ に誘導される変換を S_λ とすると，$I_\lambda - S_\lambda$ （I_λ は $\mathfrak{H}_\lambda$ における恒等作用素）$\in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H}_\lambda)$ で，

(1．16) $$\det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)}$$

この式は，（H と H^0 とに共通な）絶対連続スペクトルの殆どすべての点 λ において成り立つ．

S_λ を scattering suboperator，$\xi(\lambda)$を spectral shift function という．

§2．無限大のくりこみを含む場の量子論のモデル [10]

2．1．ハミルトニアンの定義

質量 $m=1$ の二個の粒子の（非相対論的な）散乱を考える．相対運動の波動関数を $\psi(\vec{r})$ とすると，シュレーディンガー方程式は，

(2．1)　$$[-\Delta-\lambda_0\delta(\vec{r})]\,\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

と書かれる．ここに，$\lambda_0>0$ は相互作用の大きさを定める定数，$\delta(\vec{r})$ は3次元のデルタ"関数"である．物理的には，これは，二個の粒子が同じ時刻に，空間の同一の点で相会したときにのみ，相互作用がおこることをあらわす．$\psi(\vec{r})$ のフーリエ変換

(2．2)　$$\beta(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,\psi(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

にたいしては，次の形の積分方程式が得られる：

(2．3)　$$k^2\beta(\vec{k}) - \lambda_0(2\pi)^{-3}\int\beta(\vec{k}')\,d^3\vec{k}' = E\beta(\vec{k}).$$

通常，$\beta(\vec{k})\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ と仮定される．シュレーディンガー方程式の左辺によって定義される作用素を，ハミルトニアンという．ところで，いまの場合，$\int\beta(\vec{k})d^3\vec{k}\neq 0$ なる β にたいして（2．3）の左辺第二項は $\mathcal{L}^2$ の元でない．従って，（2．3）の左辺が $\mathcal{L}^2$ における作用素を定義するのは，β が

次の集合Dにぞくする場合だけである：

(2.4) $D = \{\beta \mid \int \beta(\vec{k})d^3\vec{k} = 0,\ k^2\beta \in \mathcal{L}^2\}$.

そして，D上でこの作用素は，

(2.5) $\hat{H}^0 : \quad \beta \longmapsto k^2\beta$

に reduce してしまう．すなわち，相互作用の効果はまったく表現されない．

そこで，Berezin と Faddeev [11] は，D上で定義された対称作用素 $\hat{H}^0$ の自己共役拡大として，相互作用を記述するハミルトニアンを求めた．$\hat{H}^0$ の不足指数は $(1,1)$ である．実際，$\hat{H}^0$ のケイリー変換を $U = (\hat{H}^0 - iI)(\hat{H}^0 + iI)^{-1}$ とすると，$D(U)^\perp$ および $R(U)^\perp$ は，それぞれ $(k^2 - i)^{-1}$ および $(k^2 + i)^{-1}$ のはる一次元の部分空間である．そこで $D(U)^\perp \to R(U)^\perp$ の等距離作用素：$(k^2 - i)^{-1} \longmapsto e^{i\theta}(k^2 + i)^{-1}$ を定めれば，$\hat{H}^0$ のすべての自己共役拡大 H は，von Neumann の公式によって次のように求まる：

(2.6)
$$\beta = \beta_0 + c\left(\frac{1}{k^2 - i} + \frac{e^{i\theta}}{k^2 + i}\right)$$
$$H\beta = \hat{H}^0\beta_0 + ic\left(\frac{1}{k^2 - i} - \frac{e^{i\theta}}{k^2 + i}\right)$$

ここに，$\beta_0 \in D$.

$\theta = \pm\pi$ のときの H をとくに H^0 と書くと，これは (2.6) から直ちに，

(2.7) $H^0\beta = k^2\beta,\quad D(H^0) = \{\beta \mid k^2\beta \in \mathcal{L}^2\}$.

こうして，相互作用しない自由な粒子を記述するハミルトニアン H^0 は，$\hat{H}^0$ の一つの自己共役拡大として得られる.

$-\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$ のときは,

$$(2.8)\qquad \alpha = -c(1+e^{i\theta})$$

$$(2.9)\qquad \sqrt{-2\mu} = 1-\tan\frac{\theta}{2},\quad -\infty < \mu < 0,$$

とおくと,

$$c\left(\frac{1}{k^2-i}+\frac{e^{i\theta}}{k^2+i}\right) = -\frac{\alpha}{k^2-\mu}+f_0,\quad f_0\in D.$$

この関係を用いると，(2.6)の二つの式は次のように書きかえられる：

$$(2.10)\qquad \int\left(\beta+\frac{\alpha}{k^2-\mu}\right)d^3\vec{k} = 0,$$

$$(2.11)\qquad H\beta = k^2\beta + \alpha.$$

このようにして，パラメータ μ $(-\infty < \mu < 0)$ に依存するハミルトニアンHが得られた.

H^0 はスペクトル的に絶対連続で，そのスペクトルは，実軸の正の部分をおおう連続スペクトルである．Hは，μ を固有値にもつ．これは，(二個の粒子の)束縛状態の結合エネルギーをあらわす.

2．2．散乱理論

(H, H^0) によって与えられる摂動を考えると，定理1．4の条件が満たされていることが分る．実際,

$$(2.12)\qquad (A_\zeta\beta)(\vec{k}) = \frac{1}{(k^2-\zeta)D(\zeta)}\int\frac{\beta(\vec{k}')}{k'^2-\zeta}\,d^3\vec{k}'$$

ここに，$D(z) = 2\pi^2 [(-z)^{1/2} - \sqrt{-\mu}]$．関数 $(-z)^{1/2}$ は，実軸の正の部分に cut をいれた複素平面で，$z = E < 0$ にたいし $\sqrt{-E}$ に一致するような解析接続として定義する．従って，とくに $z = E \pm i0$ $(E > 0)$ のとき $(-z)^{1/2} = \mp i\sqrt{E}$ であることを注意しておく．(2.12) を見ると，$R(A_z)$ は $(k^2 - z)^{-1}$ のはる一次元の部分空間であるから，$A_z \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H})$．

従って，定理 2.3 の公式により wave operator $W_\pm$ が求められる．いまの場合 $\mathfrak{H}^0_{ac} = \mathfrak{H}$，従って $P^0 = I$ で，

(2.13) $$(W_\pm \beta)(\vec{k}) = \\ = \beta(\vec{k}) + \int \frac{\beta(\vec{k}')}{(\omega - \omega' \pm i0)\, D(\omega' \mp i0)} d^3\vec{k}', \qquad \forall \beta \in \mathfrak{H}.$$

これより，

(2.14) $$(W_\pm^* \beta_{ac})(\vec{k}) = \\ = \beta_{ac}(\vec{k}) - \frac{1}{D(\omega \pm i0)} \int \frac{\beta_{ac}(\vec{k}')}{\omega - \omega' \pm i0} d^3\vec{k}' \qquad \forall \beta_{ac} \in \mathfrak{H}_{ac}$$

従って，scattering operator $S = W_+^* W_-$ は，

(2.15) $$(S\beta)(\vec{k}) = \\ = \beta(\vec{k}) + \frac{i\pi\sqrt{\omega}}{D(\omega + i0)} \iint \beta_\omega(\theta, \varphi)\, d\cos\theta\, d\varphi$$

ただし，$k^2 = \omega$，$\beta(\vec{k}) = \beta_\omega(\theta, \varphi)$ とおいた．さらに，

(2.16) $$\mathfrak{H} = \int \oplus \mathfrak{H}_\omega\, d\sigma(\omega), \quad d\sigma(\omega) = \frac{1}{2}\theta(\omega)\sqrt{\omega}\, d\omega,$$

として, scattering suboperator S_ω を求めると,

(2.17) $$S_\omega \beta_\omega = \beta_\omega - \frac{2i\sqrt{\omega}}{i\sqrt{\omega}+\sqrt{-\mu}} \langle \beta_\omega, Y_{00} \rangle Y_{00}.$$

ここに $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{h}_\omega$ における内積, すなわち

$$\langle \beta_{\omega 1}, \beta_{\omega 2} \rangle = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \beta_{\omega 1}(\theta,\varphi)\overline{\beta_{\omega 2}(\theta,\varphi)}$$

をあらわし, $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ である. 球関数 Y_{lm} のうち Y_{00} だけしかあらわれないことは, S波(角運動量 $l=0$ の波)の散乱しかおこらないことを示す.

$S(\omega) = \det S_\omega$ によって定義される関数が, 通常S行列とよばれているものである. $S(\omega) = e^{2i\delta(\omega)}$ とおいて, phase shift $\delta(\omega)$ は,

(2.18) $$\delta(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{\omega}{-\mu}}\right)$$

と求められる.

Trace formula は,

(2.19) $$\operatorname{tr} A_z = \frac{1}{z-\mu} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(\omega)}{(\omega-z)^2}\,d\omega$$

と計算される. 従って, spectral shift function は,

(2.20) $$\xi(\omega) = -\theta(\mu-\omega) - \frac{1}{\pi}\theta(\omega)\delta(\omega) + \text{const}.$$

である. この $\xi(\omega)$ は, 定理3.2が述べているように, $(1+\omega^2)^{-1}\xi(\omega) \in \mathcal{L}^1(-\infty,\infty)$ であるが, $\xi(\omega) \in \mathcal{L}^1$ ではない. 従って, 定理3.1により, 摂動 (H, H^0) は trace class の摂動ではないことが分る.

2.3. Resolvent 収束とくりこみ

摂動 (H, H^0) によって non trivial な散乱理論が展開できたことから，ハミルトニアンHがたしかに相互作用を記述していることが分った．Hはパラメータ μ によって特徴づけられるが，この μ と，最初に予想したパラメータ λ_0 との関係はどうなっているであろうか？ これを見るために，次のようなハミルトニアンを考える．

(2.21) $\quad H_K : \beta \longmapsto k^2\beta - \lambda_0(K) f_K(\beta, f_K)$

ここに，$f_K(\vec{k}) = 1$ （$|\vec{k}| \leq K$ のとき），$= 0$ （$|\vec{k}| > K$ のとき）．Kは運動量空間の積分領域を制限するために導入したパラメータで，通常 momentum cutoff とよばれている．λ_0 はKの関数であると考え，この関数のふるまいが，大きいKにたいし，

(2.22) $$\frac{1}{\lambda_0(K)} = 4\pi K + \frac{1}{\lambda} + \cdots$$

のようであるとする．書かなかった部分は，$K \to \infty$ のとき 0 になる項をあらわす．

このように定義した作用素 H_K は，$K \to \infty$ のとき，前に出てきたHに resolvent 収束することが示せる．ただし，

(2.23) $$\frac{1}{\lambda} = -2\pi^2\sqrt{-\mu}$$

とする．ここに resolvent 収束とは，ζ を複素平面上のある集合にぞくする点とするとき，$(H_K - \zeta)^{-1} \xrightarrow{s} (H - \zeta)^{-1}$ の意味である．

このresolvent収束が，通常"無限大のくりこみ"とよばれている操作の数学的表現になっている．通常のくりこみ理論との関係を明かにするために，

$$S(\omega) = 1 - 2\pi i\, T(\omega) \tag{2.24}$$

によって定義される散乱振巾$T(\omega)$を計算してみる．まず，H_Kから出発して対応する$T_K(\omega)$を求めると，$\omega \leqq K^2$にたいし，

$$T_K(\omega) = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}\,\lambda_0}{1 - 4\pi\lambda_0 \int_0^K \frac{k'^2\,dk'}{k'^2 - \omega - i0}} \tag{2.25}$$

ここで，普通やるように，$\lambda_0(K)$のかわりに単にλ_0と書いた．これをunrenormalizedの相互作用定数といい，これにたいして，くりこまれた相互作用定数を

$$\lambda = Z\lambda_0 \tag{2.26}$$

で定義する．ここでZは，

$$Z = (1 - C\lambda_0)^{-1} \tag{2.27}$$

の形であると仮定してみる．(2.26)(2.27)より，

$$Z = 1 + C\lambda \tag{2.28}$$

が得られる．λを使って(2.25)を書き直すと，

$$T_K = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}\,\lambda}{1 + C\lambda - 4\pi\lambda \int_0^K \frac{k'^2\,dk'}{k'^2 - \omega - i0}} \tag{2.29}$$

ここで分母の積分は，$K \to \infty$では発散するが，大きいKに

たいして，

$$4\pi\int_0^K \frac{k'^2\,dk'}{k'^2-\omega-i0} = 4\pi K + 2\pi^2 i\sqrt{\omega} + \cdots$$

と書ける．従って，もし

(2.30) $$C = 4\pi K + \cdots$$

にとれば，発散部分が丁度うちけして，

(2.31) $$T_K \to T = \frac{-2\pi\sqrt{\omega}}{\frac{1}{\lambda}-2\pi^2 i\sqrt{\omega}}$$

が得られる．(2.23)に注意すれば，ここに得られたTは，摂動(H, H^0)による散乱理論で計算される散乱振巾と一致する．

なお，H_Kは

$$H_K = H^0 + V_K, \quad V_K = -\lambda_0(K) f_K(\beta, f_K),$$

と書かれ，明かに$V_K \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H})$．従って，$(H_K, H^0)$によって与えられる摂動はtrace classの摂動である．そこで，

$$\mathrm{tr}\, V_K = -\lambda_0(K)\,\|f_K\|$$

と計算される．ここで，$K\to\infty$のとき$\mathrm{tr}\,V_K$が発散することは，H_Kのresolvent極限であるHを用いた(H, H^0)がtrace classの摂動でなかったことと符合する．

2.4. そのほかのモデル

上で扱ったのは，相互作用定数のくりこみを含む理論のモデルであったが，このほか，質量のくりこみのモデルもつく

れる．これは，二種類の粒子の間に$A+A \rightleftarrows B$のような相互作用が行なわれるとするもので，cutoffしたハミルトニアンを用いた摂動（H_K, H^0）は前と同様 trace class の摂動になるが，この場合は，$-\mathrm{tr}\, V_K$が丁度B粒子の質量のくりこみを与える．従って$K\to\infty$のときの$\mathrm{tr}\, V_K$の発散がそのまま質量のくりこみの発散になる．一方，H_Kの resolvent 極限として定義されるHを用いた（H, H^0）は，定理1.4の条件を満たし，（発散を含まない）散乱理論が展開できる．

くりこみの対象となる発散量が（本質的に）二つあるようなモデルとしては，Leeのモデルが知られている．これは，三種類の粒子の間で$V \rightleftarrows N+\theta$のような相互作用が行なわれるもので，この相互作用の定数とV粒子の質量がくりこみの対象となる．このモデルでは，それぞれの発散を処理する操作が互いに両立するかどうかに関連して，若干の新しい問題がある．

量子電気力学は，電子と光子の相互作用を扱うもので，電子の質量と電荷がくりこみの対象となる．その点上の Lee model と似ているが，違うことは，$e\to e+\gamma \to e+2\gamma \to \cdots$のように電子は光子を何個でも放出できること，またそれらの光子が，$\gamma \to e^- + e^+$のように陰陽電子対を発生する過程があることで，このような"無限"に関連した問題がある．

§3. 簡単な強磁性モデルと素粒子の統一理論

3. 1. 一次元 Heisenberg モデル

N個のスピンが輪の形に並んだものを考え，ハミルトニアンとして次のものをとる：

(3. 1) $$H^{(N)} = -\sum_{j=1}^{N}(\vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - \tfrac{1}{4}).$$

ここに $\vec{S}_{N+1} \equiv \vec{S}_1$ とし，$\vec{S}_j$ は

$$\vec{S}_j = I\otimes\cdots\otimes I\otimes\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}\otimes I\otimes\cdots\otimes I,$$

I は 2×2 の単位行列，$\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ は Pauli 行列で，Kronecker積の j 番目にあらわれるものとする．因子の総数は N で，N は，以下の取扱いの便宜のため，3以上の奇数としておく．

ハミルトニアン $H^{(N)}$ は 2^N 次の行列であるから，状態ベクトルのヒルベルト空間 $\Omega^{(N)}$ として，2^N 次元ユニタリー空間を考える．これを，$S^z = \sum_{j=1}^{N} S_j^z$ の固有空間の直和に分解しておく：

(3. 2) $$\Omega^{(N)} = \oplus_{r=0}^{N}\,\Omega_r^{(N)}.$$

ここに $\Omega_r^{(N)}$ は S^z の固有値 $\frac{N}{2}-r$ に属する固有空間をあらわす．$[S^z, H^{(N)}] = 0$ であるから，$H^{(N)}$ の固有値問題は各部分空間 $\Omega_r^{(N)}$ 毎に解かれる．すなわち，

(3. 3) $$H^{(N)}\,|\Phi_r\rangle^{(N)} = E\,|\Phi_r\rangle^{(N)},\quad |\Phi_r\rangle^{(N)} \in \Omega_r^{(N)}.$$

ここで $|\Phi_r\rangle^{(N)}$ は次の形に書ける：

(3.4) $\quad |\Phi_2\rangle^{(N)} = \sum a(m_1, \cdots, m_2) S_{m_1}^- \cdots S_{m_2}^- |0\rangle^{(N)}$.

ただし $S_j^\pm = S_j^x \pm i S_j^y$, 各 m_j は1からNまでの整数値をとるものとする. $|0\rangle^{(N)} \in \Omega_0^{(N)}$ は基底状態のベクトルである. (3.4)を(3.3)に代入することにより, 係数aにたいする定差方程式が得られる.

$\ell = 1$ の場合,

(3.5) $\quad E a(m) = a(m) - \frac{1}{2} a(m-1) - \frac{1}{2} a(m+1)$.

ここでaは $\forall m \in \mathbb{Z}$ にたいして定義されているものとし, そのかわり周期性条件

(3.6) $\quad a(m') = a(m), \quad m' \equiv m \pmod N$,

をおく. 従って, $\Omega_1^{(N)}$ はN成分ベクトル$(a(1), \cdots, a(N))$の全体からなるN次元ユニタリー空間であり, (3.5)の右辺はこの空間における一つの作用素 $H_1^{(N)}$ を定義する.

$\ell = 2$ の場合は, $\mathbb{Z}^2$ から直線 $m_1 = m_2$ を除いたものを $\mathbb{Z}^{2*}$ とし, $a(m_1, m_2)$ は $\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^{2*}$ にたいして定義されているとする. そして次の条件をおく:

(3.7) $\quad a(m_2, m_1) = a(m_1, m_2)$,

(3.8) $\quad a(m_1', m_2') = a(m_1, m_2)$,

$$m_1' \equiv m_1, \quad m_2' \equiv m_2 \pmod N.$$

ここで m_1, m_2 を適当に選んで,

$$-\frac{N-1}{2} \leqslant m_1 \leqslant \frac{N-1}{2},$$

$$-\frac{N-1}{2} \leqq m_2 - m_1 \leqq \frac{N-1}{2}, \qquad m_2 \neq m_1,$$

になるようにする．この条件が成り立っているような(m_1, m_2)の集まりをΔ_Nと書く．独立な$a(m_1, m_2)$は，$(m_1, m_2) \in \Delta_N$，$m_1 < m_2$の条件によって${}_N C_2$個あるから，$\mathfrak{H}_2^{(N)}$はこれらの${}_N C_2$成分ベクトルの全体からなる${}_N C_2$次元ユニタリー空間である．

このとき，$a(m_1, m_2)$は次の定差方程式を満たす：

(3.9) $$E a(m_1, m_2) = a(m_1, m_2) - \\ - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1)$$

$(m_1 - m_2 = \pm 1$ のとき$)$

(3.10) $$E a(m_1, m_2) = 2 a(m_1, m_2) - \\ - \frac{1}{2} a(m_1 - 1, m_2) - \frac{1}{2} a(m_1 + 1, m_2) - \\ - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 - 1) - \frac{1}{2} a(m_1, m_2 + 1)$$

$(m_1 - m_2 \neq \pm 1$ のとき$)$

これらの方程式の右辺によって定義される$\mathfrak{H}_2^{(N)}$の作用素を$H_2^{(N)}$と書く．

ここで，Trotterの意味における極限として[12][13]，

(3.11) $$\mathfrak{H}_r = \lim_{N \to \infty} \mathfrak{H}_r^{(N)},$$

(3.12) $$H_r = \lim_{N \to \infty} H_r^{(N)},$$

を定義する（さしあたり$r = 0, 1, 2$にたいして）．ここに，Trotterの意味の極限とは次のことをいう．一般にX，X_n

をBanach空間とし，各nにたいして$P_n \in \mathcal{B}(X, X_n)$が存在して，i) $\|P_n\| \leqslant M$（nによらない），ii) $n \to \infty$のとき，各$x \in X$にたいし$\|P_n x\| \to \|x\|$，iii) $\sup \|P_n\| < \infty$とする.* ベクトルの列$\{x_n\}$，$x_n \in X_n$，がTrotterの意味で$x \in X$に収束するとは，$\|x_n - P_n x\| \to 0$（$n \to \infty$）なることをいう．作用素の列$\{A_n\}$，$A_n \in \mathcal{B}(X_n)$，がTrotterの意味でA（Xにおける作用素で，必ずしも有界であることを要しない）に収束するとは，$\|A_n P_n x - P_n A x\| \to 0$，$\forall x \in D(A)$，なることをいう．

こうして求められた$\mathfrak{H}_1$およびH_1は，具体的には次のようなものである．

(3.13) $\mathfrak{H}_1 \sim \ell^2(\mathbb{Z})$，

(3.14) $H_1 : a(m) \mapsto a(m) - \frac{1}{2} a(m-1) - \frac{1}{2} a(m+1)$.

フーリエ変換

(3.15) $\hat{a}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) e^{ikm}$

を行なうと，$\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$における作用素

(3.16) $\hat{H}_1 : \hat{a}(k) \longmapsto (1 - \cos k) \hat{a}(k)$，

が得られる．この結果は，物理的には次のように解釈される：$\mathfrak{H}_1$におけるハミルトニアンの"固有状態"は，運動量がkでエネルギーが$1 - \cos k$に等しい一個の粒子（magnonと

* Trotterはこのとき，"Banach空間の列$\{X_n\}$がXを近似する"と云っている．(3.11)は，この関係をシンボリカルに示しただけである．

よばれる）をあらわす．数学的には，$\mathfrak{H}_1$ は，

(3.17) $$\mathfrak{H}_1 = \int_0^{2\pi}\oplus\, \mathfrak{H}_{1k}\,\frac{dk}{2\pi},$$

の形に分解され，H_1 によって $\mathfrak{H}_{1k}$ に誘導される変換 H_{1k} は，(3.16) と同じく $\hat{a}(k) \mapsto (1-\cos k)\,\hat{a}(k)$ で与えられる．ただし，ここで $\hat{a}(k) \in \mathfrak{H}_{1k} \sim \mathbb{C}$.

二個の magnon が相互作用を行なっている系は，$\mathfrak{H}_2$ のベクトルで記述される．Trotter の極限として求められた $\mathfrak{H}_2$ は，$\{a(m_1, m_2)\}$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^{2*}$ で，

$$\sum_{(m_1, m_2)\in \mathbb{Z}^{2*}} |a(m_1, m_2)|^2 < \infty$$

であるようなものの全体であるが，ここで変数を $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_2 - m_1$ に変えると，$a(m_1, m_2) \equiv A(M, \mu) \in \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)$ となる．ここに，$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. 変数 M について フーリエ変換を行ない，

(3.18) $$\hat{A}(K, \mu) = \sum_{M\in\mathbb{Z}} A(M, \mu)\, e^{iKM}$$

とすると，これによって $\mathfrak{H}_2$ は，

(3.19) $$\mathfrak{H}_2 = \int_0^{2\pi}\oplus\, \mathfrak{H}_{2K}\,\frac{dK}{2\pi}$$

の形に分解され，

(3.20) $$\mathfrak{H}_{2K} \sim \ell^2(\mathbb{Z}^*).$$

H_2 によってこの空間に誘導される変換を具体的に求めると，

(3.21) $$\hat{H}_2 : \quad c(\pm 1) \mapsto c(\pm 1) - \cos\frac{K}{2}\, c(\pm 2),$$
$$c(\mu) \mapsto 2c(\mu) - \cos\frac{K}{2}\,[c(\mu-1) + c(\mu+1)],$$
$$(\mu = \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

が得られる．Kは，二個の magnon の運動量の和をあらわす．

自己共役演算子 $\hat{H}_2$ は点スペクトルをもち，固有値・固有関数は，

(3.22) $\quad E = 2 - 2\cos\frac{K}{2}\cosh v,$

(3.23) $\quad c(\mu) = e^{-|\mu| v}.$

ただし，$e^{-v} = \cos\frac{K}{2}$ である．この解は，二個の magnon の束縛状態をあらわす．

一方，magnon の散乱を扱うには，上の $\mathfrak{H}_{2K}$，$\hat{H}_2$ をそれぞれ $\mathfrak{H}$，H とし，これと対にする $\mathfrak{H}^0$，H^0 を次のように定める．これらは，自由な（相互作用しない）二個の magnon を記述すべきであるから，まず，

(3.24) $\quad \mathfrak{H}_2^0 \equiv \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_1 \sim l^2(\mathbb{Z}^2)$

を考え，これを

(3.25) $\quad \mathfrak{H}_2^0 = \int_0^{2\pi} \oplus\, \mathfrak{H}_{2K}^0 \frac{dK}{2\pi}$

の形に分解する．こうして，

(3.26) $\quad \mathfrak{H}_{2K}^0 \sim l^2(\mathbb{Z})$

が得られる．これを $\mathfrak{H}^0$ とする．他方，$\mathfrak{H}_2^0$ における作用素 $H_1 \otimes I + I \otimes H_1$ をとり，これによって $\mathfrak{H}_{2K}^0$ に誘導される変換を求めると H_1 が得られるから，これを H^0 とする．

こうして，摂動 (H, H^0) を考えることが出来る．この場合，二つの自己共役作用素 H，H^0 の作用する空間は同じで

ないが，定理1．1の条件が成り立っていることが示せる．

Jとしては，$\mathfrak{H} = l^2(\mathbb{Z}^*)$ を $\mathfrak{H}^0 = l^2(\mathbb{Z})$ の部分空間と考えたときの，$\mathfrak{H}^0$ の $\mathfrak{H}$ への正射影をとる．定理1．1，2．1によって wave operator をつくり，さらに scattering operator やS行列を求めることが出来る．

しかし，ここでは，その計算の結果よりも，上に論じたスキームが素粒子の統一理論のモデルになっていることに興味がある．

3．2．素粒子の統一理論との比較

実験によってさまざまな素粒子の存在が知られているが，これらを，一つの基礎方程式の多様な解として統一的に理解しようというのが，統一理論の思想である．Heisenberg は，たとえば，二成分スピノル場 $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ を用いて一つの基礎方程式を与えた[14]．これは，次のようなハミルトニアン H^Ω を考えることと同じである：

$$(3.27) \qquad H^\Omega = \int_\Omega \mathcal{H}(\vec{x})\, d^3\vec{x},$$

$$\mathcal{H} = -i\chi^*\vec{\sigma}\vec{\nabla}\chi - l^2[(\chi^*\chi)^2 - (\chi^*\vec{\sigma}\chi)^2].$$

ここにΩは，空間の任意の有限領域を示す．ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ の第二項で，空間の同じ点における場の積をどう定義するかという問題が生ずるが，これは相互作用が一点で行なわれることを記述するためで，§2で扱ったくりこみの問

題につながる．一方，Ωが全空間になった極限は，Trotterの意味の極限として扱うことが可能である．

このように定義した一つのハミルトニアンのさまざまな"固有状態"として，真空（基底状態），一粒子状態（たとえば核子），二粒子の束縛状態（たとえば核子・反核子の束縛状態と解釈される中間子）や散乱，が記述できることが期待される．ここで，強磁性モデルの$\vec{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$に当るのが$\chi(\vec{x}) = (\chi_1(\vec{x}), \chi_2(\vec{x}))$である．

上のH^{Ω}がχを用いて書かれているのと同様に，強磁性モデルの$H^{(N)}$は$\vec{S}_j$を用いて書かれていた．ヒルベルト空間$\mathfrak{H}^{(N)}$は，$\mathfrak{H}^{(N)} = \oplus_{r=0}^{N} \mathfrak{H}_r^{(N)}$のように分解された．必要に応じて始めの方の数項（たとえば$r = 0, 1, 2$）に話を限ると，Trotterの意味の極限で，

(3.28) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$$

およびハミルトニアン

(3.29) $$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$$

を定義することが出来る．そのとき，基底状態，自由なmagnon一個の状態，magnon二個の束縛状態は，それぞれ$\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$にぞくする$H$の固有状態として求められた．また二個のmagnonの散乱は，それぞれ$\mathfrak{H}_2$，$\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_1$で作用する$H_2$，$H_1 \otimes I + I \otimes H_1$を用いて，抽象的散乱理論により記述でき

た．このさい，total Hamiltonian と free Hamiltonian の作用する空間が異なるとして散乱理論が具体的に定式化されたことは，とくに注目してよい．なぜなら，一般に相対論的不変な場の量子論では，Haag の定理［15］によって，いわゆる Fock space の中で non trivial な相互作用は記述できない，とされているからである．

文　献

［1］ A. L. Belopolski and M. Sh. Birman, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat. **32** (1968) 1162 - 1175.

［2］ M. Rosenblum, Pacific J. Math. **7** (1957) 997 - 1010.

［3］ T. Kato, Proc. Japan Acad. **33** (1957) 260 - 264.

［4］ T. Kato, Pacific J. Math. **15** (1965) 171 - 180.

［5］ M. Sh. Birman and M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962) 475 - 478.

［6］ C. R. Putnam, Commutation Properties of Hilbert space Operators and Related Topics, Springer-Verlag, 1967, p108.

［7］ M. Sh. Birman and S. B. Entina, Dokl. Akad. Nauk SSSR **155** (1964) 506 - 508 ; Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat. **31** (1967) 401 - 430.

[8] K. Sekine, Méthode stationnaire de construction des opérateurs d'onde, 1969, unpublished.

[9] M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 268-271.

[10] K. Sekine, Structure mathématique d'une théorie renormalisable, 1966, unpublished.

関根克彦, 数理科学 28 (1969) 42-47.

関根克彦, 数理解析研講究録「ハミルトニアンの定義とスペクトル」, to be published.

[11] F. A. Berezin and L. D. Faddeev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961) 1011-1014.

[12] H. F. Trotter, Pacific J. Math. 8 (1958) 887-919.

[13] T. Kato, Perturbation Theory of linear Operators, Springer-Verlag, 1966, p 512-513.

[14] W. Heisenberg, Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles, Interscience, 1966.

[15] R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd 29 (1965) No. 12.

D. Hall and A. S. Wightman, Dan. Mat. Fys. Medd. 31 (1967) No. 5.

ボゴリューボフ他,「場の量子論の数学的方法」, 東京図書, オ5章 §4.