数理解析研究所講究録
第162巻 1972年 10-20

相対的 Hodge 分解

東大教養， 藤原大輔．

§1 序

$m+n$ 次元で，コンパクトで，向きづけられたリーマン空間を X とす。 X 上の p 次微分型式全体の空間を $\Omega^p(X)$ と書く。 Hodge の有名な定理によると，p 次の de Rham のコホモロジー群 $H^p(X)$ の各コホモロジー類は，X 上で調和な p 次微分型式で一意的に代表される。

X の中に，m 次元の閉で向きづけられた部分多様体 Y があるとき，相対コホモロジー群 $H^p(X, Y)$ が出来るが，上の Hodge の定理の真似をして，$H^p(X, Y)$ の各コホモロジー類を代表する微分形式（あるいはカレント）として，特別の函数方程式をみたすものを一意的にとれるのではないか？ という問題を考えてみたい。

Y 上の p 次の微分型式の全体を $\Omega^p(Y)$ と書く。 すると，複体の完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X, Y) \longrightarrow \Omega^*(X) \xrightarrow{i} \Omega^*(Y) \longrightarrow 0$$

がある。 i は制限写像である。 そして 相対 cohomology

群 $H^*(X,Y)$ は，複体 $\Omega^*(X,Y)$ のコホモロジーであった。
上の完全列から，次の基本的な，長い完全列を得る。

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & 0 \longrightarrow H^0(X,Y) \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^0(Y) \longrightarrow \\
& \longrightarrow H^1(X,Y) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow H^1(Y) \longrightarrow \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& \longrightarrow H^p(X,Y) \longrightarrow H^p(X) \longrightarrow H^p(Y) \longrightarrow \\
& \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

我々が，$H^p(X,Y)$ を代表するカレントを定めようというとき，自然な要請として，それは，上の長い完全列 (1) に自然な意味をもたせるものでなければなるまい。

ここで，一足と飛びに，筆者の得た結論を述べてみよう。

(A) $H^p(X,Y)$ の各コホモロジー類は，X 上のカレント α であって，$X-Y$ 上で poly-harmonic，即ち

$$\Delta^{a+1}\alpha = 0.$$

で，Y においてある境界条件をみたすものによって完全に代表される。ここで Δ は通常の de Rham-Laplace 作用素で，a は $\frac{n}{2}$ の整数部，即ち $a=[\frac{n}{2}]$.

この境界条件が，(1) における $H^{p-1}(Y) \to H^p(X,Y) \to H^p(X)$ という部分の完全性を与える。

なお，(A) のもっと詳しい説明は後段で説明する。

(B)　$H^p(X, Y)$ の各コホモロジー類はまた、X 上のカレント β で、$X-Y$ 上調和、即ち

$$\Delta\beta = 0 \qquad \text{on } X-Y$$

で Y 上に特異性をもつものでも代表し得る。

(A)，(B) の各事項については後段の節により詳しく論ずるが、ここでは一つ一寸した注意を書く。それは、部分多様体 Y のコホモロジー $H^p(Y)$ の各コホモロジー類の代表元として、Hodge のように Y 上の調和微分形式をとることは、長い完全列 (1) との関係からは、適切でない、ということである。長い完全列 (1) が成立することを重視して $H^p(Y)$ の代表元を選ぶと、$H^p(Y)$ の各コホモロジー類の代表としては、Y 上の p-微分形式で、Y 上2階の楕円型方程式 $L\alpha = 0$ をみたすようなもの α をとるべきである。ここで L という微分積分作用素は、Y 上の Laplace-de Rham 作用素と同じ主部をもつ楕円型作用素だが、L の具体的形は Y によって異り、また L は微分作用素ではない。一般には、部分多様体 Y は X の中で歪んでいるわけだから、これはむしろ当然のことであろう。

§2 Hilbert空間の導入. 直交射影法.

$\mathcal{D}^p(X, Y)$に次のような内積$[\ ,\ ]$を定義する.

(2.1) $$[\alpha, \beta] = (\Delta_0^{\frac{a}{2}}\alpha, \Delta_0^{\frac{a}{2}}\beta) + (H_0\alpha, H_0\beta).$$

但し, $(\ ,\ )$は微分形式の通常のL^2内積. Δ_0はX上の通常のLaplace-de Rham作用素で, $H_0\alpha$は微分形式αの調和部分. この内積$[\ ,\ ]$で$\mathcal{D}^p(X, Y)$を完備にして, Hilbert空間$W_a^p(X)$を作る. これは, 実はL^2の意味でa回微分可能なp次カレント全体の作るソボレフ空間である. 一般に, k回L^2微分可能なp次カレントの作るソボレフ空間を$W_k^p(X)$と書くことにする.

$W_a^p(X)$において外微分演算dを定義し, その定義域を$D(d)$とす. そのadjointをd^*とし, 定義域を$D(d^*)$と書く.

$D(d) \cap D(d^*)$を決定するために, まず, $D(d^*)$をみよう.

<u>定理 2.1</u>

$W_a^{p+1}(X)$のカレントαが, $D(d^*)$に入る必要十分条件は$W_a^p(X)$のカレントγと, Y上のカレント$T \in W^p_{-a-1+\frac{n}{2}}(Y)$が存在して,

(2.2) $$\delta_0\alpha - \gamma = G_0^a(T \otimes \delta_Y) + H_0(T \otimes \delta_Y).$$

が成立すること. このとき$d^*\alpha = \gamma$. そして$\delta' T \in W^{p-1}_{-a-1+\frac{n}{2}}(Y)$.

ここで，δ_0 は通常調和積分論に出て来る δ-作用素．
G_0 は Δ_0 に対するグリーン作用素．（cf. [1]）．
δ' は Y 上の δ-作用素．　また Y 上のカレント T に対し，$T\otimes\delta_Y$ は次のように定義される X 上のカレント．
φ を p-form として

$$\langle \varphi, T\otimes\delta_Y\rangle = \int_Y \varphi|_Y \wedge *'T.$$

但し $*'$ は Y 上の metric に関する $*$ 作用素。

次に空間

(2.3) $$\mathring{V}^{p-1} = \left\{ G_0^{a+1}(T\otimes\delta_Y) \;\middle|\; T\in W^{p}_{-a-1+\frac{n}{2}}(Y),\ \delta' T \in W^{p-1}_{-a-1+\frac{n}{2}}(Y)\right\}$$

を導入しよう。　すると

<u>定理 2.2</u>

次のベクトル空間の系列は，完全列である。

(2.4) $$0 \longrightarrow D(d)\cap D(d^*) \longrightarrow W^p_{a+1}(X) + d_0 V^{p-1} \xrightarrow[r]{} W^p_{a+1-\frac{n}{2}}(Y) \longrightarrow 0$$

r は制限写像。

従って α が $D(d)\cap D(d^*) \ni \alpha$ とすると $\alpha|_Y = 0$ である。

さて一般化された Laplacian，$L = dd^* + d^*d$ を導入して，p 次カレントからなる L の kernel を $\mathrm{Ker}^p L$ と書く。Weyl の直交射影の方法と定理 2.2 を使うと．five-lemma を使って，

<u>定理 2.3</u>

$$\mathrm{Ker}^p L \cong H^p(X, Y).$$

§3 主定理

定理2.3 によれば、$\mathrm{Ker}^q L$ を具体的に書き表せば、我々の仕事は終ることになる。
そのために、Y上のカレントに働く擬微分作用素 P と Q を下式で定義する。

(3.1) $$P : T \longrightarrow G_0^{q+1}(T\otimes\delta_Y)|_Y$$

(3.2) $$Q : T \longrightarrow H_0(T\otimes\delta_Y)|_Y.$$

あきらかに Q は ~~有限~~ of finite rank. また

命題 3.1

P は Y上 $L^2(Y)$ の意味で自己共役で >0、可逆な楕円型作用素、位数 $-2q-2+n$.
よって P は微分作用素でない。

さて

(3.3) $$\delta_1' = P\delta' P^{-1}$$

(3.4) $$\pi = QP^{-1}$$

を定義する。

定理 3.2

方程式 $L\alpha = (dd^*+d^*d)\alpha = f$ は次の方程式系と同値。但し S, T は Y上のカレント.

$$(3.5)\begin{cases} f = \Delta_0 \alpha - d_0 G_0^a(S\otimes\delta_Y) - G_0^a(T\otimes\delta_Y) - H_0(T\otimes\delta_Y) \\ (G_0 f)|_Y = -(H_0\alpha)|_Y - d'PS - PT \\ (\delta_0 G_0 f)|_Y = \pi PS + d'\delta_1' PS - \delta_1' PT. \end{cases}$$

但し d' は Y 上のカレントに働く外微分作用素。

従って とくに

定理 3.3

$\alpha \in \mathrm{Ker}^p L$ なる必要十分条件は、Y 上のカレント S が存在して、

$$(3.6)\begin{cases} \Delta_0 \alpha = d_0 G_0^a(S\otimes\delta_Y) \\ 0 = (H_0\alpha)|_Y + d'PS \\ 0 = d'\delta_1' PS \\ 0 = \pi PS \end{cases}$$

が成立することである。

定理 2.3 と考えあわせて、§1 の主張(A)を次の形で得る。

定理 3.4

$H^p(X,Y)$ のコホモロジー類は (3.6) をみたすカレント α によって一意的に代表される。

13

注意3.5　$W^p_a(X)$ の各カレント α は $X-Y$ 上のカレント γ と次式によって同一視される。

$$\gamma = (\Delta_0^a \alpha + H_0 \alpha)|_{X-Y}.$$

いま α として定理3.4 の α をとると、γ は

$$\Delta_0 \gamma = 0 \qquad \text{on } X-Y.$$

$$|\gamma(x)| = O(r^{1-n})$$ をみたす。

但し r は $x \in X-Y$ から Y までの距離。

従って §1 の主張(B)を得た。

ところで、定理3.4 で得た結論で、長い完全列(1)を説明するには次のことに注意する。

p は Y 上可逆な作用素だから Y 上のカレント中に、内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_Y p^{-1}\alpha \wedge *' \beta$$

によって定義する。通常調和積分論で行う討論を、上の内積をつかって行うと、

定理3.6

Y の de-Rham コホモロジー群 $H^p(Y)$ は Y 上のカレント (p次) で

$$(d'\delta_1' + \delta_1' d')T = 0$$

をみたすもの全体と同型。

長い完全列で $H^p(Y)$ を定理3.6によって解釈すると、定理3.4と3.3が長い完全列(1)に自然な解釈を与えることは極く見易い。

文献.

L (1) De De Rham , Variete differentiables, Hermann , 1955.

(2) Kodaira, K, Harmonic d fields in Riemannian manifolds. Ann. Math. vol 50 (1949) pp. 587-665.

(3) Weyl, H. The method of orthogonal projection in potential theory, Duke mathematical journal vol 7. pp. 411-444. (1940).

さて一般化されたLaplacian $L = dd^* + d^*d$ を導入して、p 次カレントからなる L のkernelを $\mathrm{Ker}^p L$ と書くことにする。Weyl-小平の直交分解定理(cf [ ]) と 定理2.2 を使って

<u>定理 2.3</u>

$$\mathrm{Ker}^p L \cong H^p(X, Y).$$

さて、$\mathrm{Ker}^p L$ を具体的に書きあらわそう。そのためにY上のカレントに働く擬微分作用素 P を次式で定義する。

(2.5) $$P : T \longrightarrow G_0^{a+1}(T \otimes \delta_Y)|_Y .$$

すると、

<u>命題 2.4</u>

P は self-adjoint >0 で可逆な楕円型作用素で位数は $-2a-2+n$。

これを使って、

(2.6) $$\delta_1' = P\delta' P^{-1}.$$

(2.7) $$\Pi = QP^{-1}$$

とおく。但し Q とは Y 上のカレントに働く作用素で $Q : S \longrightarrow H_0(S \otimes \delta_Y)|_Y$.