数理解析研究所講究録
第163巻 1972年 1-12

渦糸の運動 I

東大 宇宙研 橋本 英典

§1 序

流体中に集中した渦運動は大局的に見れば、完全流体中の渦糸と見なすことができる。これはもちろんひとつの理想化であって、実際上は粘性のきく中心部が外側におよぼす影響を特異線としてとらえた outer expansion である。このような渦糸の運動は古来2次元の問題ではよくしられているが、[1)25)] 3次元の運動については一本の渦糸をとって見ても直線渦、渦輪、らせん渦[1)15)]などを除いてはその複雑さのためにほとんどしらべられていないのが現状である。特に前者では渦糸を点と見る抽象化が可能であったのに後者では渦の屈曲、のびなどの現象などのために半径を0とおくことが許されないからである。たゞ渦の半径を次第に小さくして行けば、曲った渦糸の運動にもっとも影響をおよぼすのは、問題の点の近くの渦糸の部分だけであり、循環と曲率に比例し、半径の対数に比例する速度で陪法線の方向に動かされることがわかる。

半径の対数による項は非常に大きいがほとんど一定とみなすことができ、またのびの影響も無視される。これはAmes, Hama[2]に始まる近似であり、Hama[2,3]やTakaki & Yoshizawa[4]はこのベクトル方程式を用いて色々な形の渦糸の運動を数値的に議論している。この近似が少くとも定性的によい近似を与えることは数値的にはHamaによって放物線状渦[2]に対し、渦輪の変形についてはKambe, Takao[5]の煙による実験によって確かめられている。最近著者[6]はこの近似方程式が弾性糸(Elastica)の形をした渦糸の剛体運動に対する厳密解を与えることを見いだしたが、一般的に複雑な運動を論じるには、場合によって渦糸の曲率κと捩率τを支配する方程式(自然方程式)を用いる方が便利である。実際Betchov[7]はこのような方程式を導き、それが負の圧力と非線型のストレスの項を含む1次元假想気体の運動方程式になることを示したが、若干の性質の議論と上述elasticaの中で近似の性格からはみとめられぬ自分自身に交わるloopを持つ解を導いたに過ぎない。著者[8]は最近κを振幅、捩れ角を位相とする複素数ψを支配する方程式を導きその孤立伝播波解として、τの大小によって異なるが直線渦糸に生じるらせん運動あるいはloopが渦糸のらせん変形をおこして、渦糸に沿って一定速度2τで伝わるものを求めた。ψに対する方程式は非線型光学やプラ

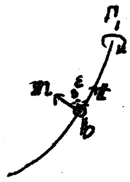
ズマ物理にあらわれる波のModulationを支配する非線型Shrödinger方程式[9-14]の1種である。従ってわれわれはベクトル方程式[2]（Hama−Ames），假想気体方程式[7]（Betchov）および4方程式[6]の三つをそれぞれの特長に応じてつかいわけ、その間の知識の交換をはかることができることになったわけである。さて，κ, τ一定の解はらせん渦をあらわし、波数たくκの微小攪乱に対して不安定といわれているが、それが有限振幅となったときにどうなるかは特に興味のあることである。こゝではBetchovの方程式と4方程式をもとにしてこれを論じ、直線渦，円環渦に対するベクトル方程式による攻撃は次の神部氏にゆずりたい。

§.2. 基礎式

無限に広がった縮まない流体の中での渦糸を$\mathbf{X}(s,t)$（ただしsはそれにそう長さ，tは時間，その強さをΓであらわせば，それによって流体内の点$\mathbf{r}$に誘導される速度$\mathbf{V}_b$はBiot−Savartの法則によって

$$\mathbf{V}_b = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{X})\times d\mathbf{X}}{|\mathbf{r}-\mathbf{X}|^3} \qquad (2.1)$$

で与えられる。$\mathbf{r}$が渦糸上の点$\mathbf{X}$の近傍の距離にあるとすれば，上式は漸近的に[15]



$$V_b = \frac{\Gamma}{2\pi\varepsilon^2}[\mathbf{t}\times(\mathbf{r}-\mathbf{x})] + \frac{\Gamma\kappa}{4\pi}\mathbf{b}\log\frac{1}{\varepsilon} + O(1) \qquad (2.2)$$

であらわされる。ただし($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$)は$\mathbf{x}$での接線、主法線および陪法線方向の互に直交する単位ベクトル、κは曲率である。式(2.2)の第1項は、渦糸のまわりの循環速度であって直線渦糸による2次元運動でもあらわれるものであるが、単一の渦糸の運動に関する限り、渦糸が重ならない限り直接の影響はない。第2項は渦糸の曲ったための影響であり。渦糸が陪法線の方向に曲率と循環に比例する速度で動かされることを示す。ただこの項$\varepsilon=0$としたのでは対数項が無限大となり、半径0の渦糸が許されないという困難を生む。

Ames, Hama[2,3]はεを渦糸の半径程度と等置することによってこの困難を避けた。これによる誤差とεの渦糸に沿って変化が$\log(1/\varepsilon)$におよぼす影響は$O(1)$の程度であるのでこれを無視することができる。

一方、渦糸がのびたり縮んだりする3次元運動における重要な効果は、この近似では無視せざるを得ない。

こうして渦糸の速度は時間の単位を適当にとれば無次元の形で

$$\dot{\mathbf{x}} = \kappa\mathbf{b} \qquad (2.3)$$

あるいは

$$\dot{x} = x' \times x'' \qquad (2.4)$$

と書くことができる。ただし・は時間微分，′ は s についての微分をあらわす。さて渦糸に沿って、接触面が廻転する割合（$b' = -\tau n$）すなわち捩率を τ とすれば，(2.3)から複素変数

$$\psi = \kappa \exp\left[i\int_0^s \tau \, ds\right] \qquad (2.5)$$

が非線型の Schrödinger の方程式

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\left(|\psi|^2 + A\right)\psi \qquad (2.6)$$

が得られる。(8) あるいは数理研講究録125，ただし A は時間だけの関数。また $\rho = \kappa^2$, $u = 2\tau$。従って $\psi = \rho^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{2}\int u\,ds\right]$ とおいて，実部と虚部を分けなければ負圧 $-\frac{1}{2}\rho^2$ を持つ仮想気体の方程式[7]

$$\begin{cases} \dot{u} + uu' = \rho' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{\rho^2} + \frac{\rho''}{\rho}\right)' \\ \dot{\rho} + u\rho' = -\rho u' \end{cases} \qquad (2.7)$$

あるいは

$$\dot{\rho} + (\rho u)' = 0 \quad , \quad \dot{(\rho u)} + \left[\rho u^2 - \frac{1}{2}\rho^2 - \rho(\log\rho)''\right]' = 0$$

を得る。われわれは目的に応じて、(2.3),(2.6),(2.7)を使い分け、お互の間の知識の交換をはかることができよう。

§3. らせん運動の有限攪乱

(2.6), (2.7) は特解として

i) 直線渦糸： $\kappa = \tau = 0$

ii) 渦　輪： $\kappa = \kappa_0 =$ 一定， $\tau = 0$

iii) らせん： $\kappa = \kappa_0$ ， $\tau = \tau_0 =$ 一定

を解として持つが $\delta\rho$, δu を無限小の量として

$$\rho = \kappa_0^2 + \delta\rho \exp i(ks - \omega t), \quad u = 2\tau_0 + \delta u \exp i(ks - \omega t)$$

を代入し、微小項を無視すれば分散関係 $\omega = k[2\tau_0 \pm \sqrt{k^2 - \kappa_0^2}]$ を得る。従って直線渦 $(\tau_0 = \kappa_0 = 0)$ ，渦輪 $(k = N\kappa_0$, N は 2 以上の整数, $\tau_0 = 0)$ は微小攪乱に対して安定であるが、らせん渦の微少攪乱は $k < \kappa_0$ では不安定で渦糸上を $c_0 = 2\tau_0$ の速度で伝播する。以下では $\kappa_0 \neq 0$ のばあいについての有限振幅の攪乱が果してどうなるかをしらべて見よう。 c_0 でらせん上を動く座標系で考え、流れの関数 $\Phi = \kappa_0^2\xi + \phi$, $\xi = s - c\tau_0$:

$$\rho = \kappa_0^2 + \phi' = \partial\Phi/\partial\xi, \quad \rho u = -\dot\phi = -\partial\Phi/\partial t \quad (3.2)$$

を導入すれば

$$L[\phi] = \ddot\phi + \kappa_0^2\phi'' + \phi^{(iv)} = \left[\frac{\dot\phi^2 + \phi''^2}{\kappa_0^2 + \phi'} - \frac{1}{2}\phi'^2\right]' \quad (3.3)$$

を得る。

i) $k > \kappa_0$ (安定)のばあい

$$\phi = k\sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n(k\xi, T), \quad \kappa_0 = \nu k \quad (\nu < 1) \qquad (3.4)$$

$$T = k^2 t(1 + \varepsilon^2\sigma + \cdots), \quad \varepsilon \ll 1$$

とおいてεの各べキを等置すれば

$$L[\phi_1] \equiv \ddot{\phi}_1 + \phi_1^{(IV)} + \nu^2 \phi_1'' = 0, \qquad (3.5)$$

$$L[\phi_2] = \left[\frac{1}{\nu^2} (\dot{\phi}_1^2 + \phi_1''^2) - \frac{1}{2} \phi_1'^2 \right]'$$

$$L[\phi_3] = \{ Q[\phi_1, \phi_2] \}' - 2\sigma \ddot{\phi}_1$$

を得る。こゝではQはϕ_1とϕ_2の2次形式である。

第1近似解

$$\phi_1 = A_+ Z_+ + A_- Z_- + c.c. \qquad (3.6)$$

$$Z_\pm = \exp i(k\xi \pm \omega_0 \tau), \quad \omega_0 = (1-\nu^2)^{1/2}$$

から出発し、第2式から得られる第2近似

$$\phi_2 = \frac{i}{4} \left[A_+^2 Z_+^2 + A_-^2 Z_-^2 + \frac{2}{\nu^2} A_+ A_- Z_+ Z_- \right] \qquad (3.7)$$

と共に第3式の右辺に代入し、Qから出る ~~secular~~ term をOにすれば有限振幅による振動数のずれ

$$\delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0 = \varepsilon^2 \sigma \qquad (3.8)$$

に対して、　$\nu_1 = 1/\nu = k/\kappa_0$ とおけば

Ⓐ 進行波：$\delta\omega/\omega_0 = \varepsilon^2 (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\nu_1^2)|A_+|^2/(1-\nu_1^2)$ (3.9)
$(A_- = 0)$

Ⓑ 停在波：$\delta\omega/\omega_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 (4\nu_1^4 - 2\nu_1^2 - \frac{1}{2}) A^2/(1-\nu_1^2)$ (3.10)
$(|A_+| = |A_-| = A)$

を得る。Ⓐでは $\delta\omega/\omega_0$ が $(k/\kappa_0)^2 = \frac{3}{2}$ で負から正に変り、Ⓑはいつも負である。

ii) $k \sim \kappa$ （$k < \kappa_0$: 不安定）

$$\kappa_0^2/k^2 = 1 + \varepsilon^2 g + \cdots \ (g>0: \text{不安定}), \qquad (3.11)$$

$$\phi = k \sum_1^\infty \varepsilon^n \phi_n(k\xi, \varepsilon k^2 t)$$

とおけば

$$L_0[\phi_1] \equiv \phi_1'' + \phi_1^{(\mathrm{iv})} = 0, \quad L_0[\phi_2] = [\phi_1''^2 - \tfrac{1}{2}\phi_1'^2]', \qquad (3.12)$$

$$L_0[\phi_3] = Q[\phi_1, \phi_2] - \Lambda[\phi_1] \cdots\cdots,$$

ただし $\Lambda[\phi] \equiv \ddot{\phi} + g\phi''$ を得る。

第1,2式の解

$$\phi_1 = a e^{i\zeta} + \bar{a} e^{-i\zeta}, \quad \zeta = k\xi \qquad (3.13)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{4}(a^2 e^{2i\zeta} - c.c.) \qquad (3.14)$$

に対して $L[\phi_3]$ の secular term $= 0$ とすれば $a = A e^{i\varphi}$ に対して

$$\ddot{a} - g a + \tfrac{1}{2}|a|^2 a = 0 \qquad (3.15)$$

or

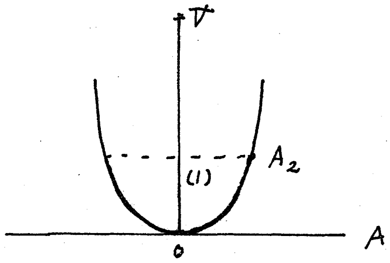
$$A^2\dot{\varphi} = m \ (\text{一定}), \quad \ddot{A} = -V' + A\dot{\varphi}^2 \qquad (3.16)$$

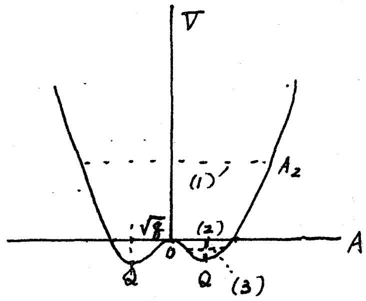
を得る。$V = -\frac{1}{2}gA^2 + \frac{1}{4}A^4$ は中心場の運動ポテンシャル、m は角運動量と解釈できる。

以下では $m = 0$ 従って $\dot{\varphi} = 0$ のばあいと $m \neq 0$ 従って $\dot{\varphi} \neq 0$ のばあいとに分けて考えよう。

Ⓐ $m = 0$

このばあいは V の形と(3.16)の積分定数(全エネルギーに相当)によって(1), (1'), (2), (3)のばあいに大別できる(下図を参照)





	q	A	s
(1)	$q \leqq 0$	$A_2\, cn(\frac{A_2}{2s}t, s)$	$s^2 \leqq \frac{1}{2}$
(2)	$q > 0$	$A_2\, cn(\frac{A_2}{2s}t, s)$	$\frac{1}{2} < s^2 < 1$
(3)	$q > 0$	$2\sqrt{q}\ \mathrm{sech}\sqrt{q}\,t$	$s^2 = 1$
(4)	$q > 0$	$A_2\, dn(\frac{A_2}{2}t, s)$	$s^2 = 1 - A_1^2/A_2^2$

ただし cn, dn は Jacobi の楕円関数, s は modulus である。また(3)は(2)と(4)の特別なばあいである。

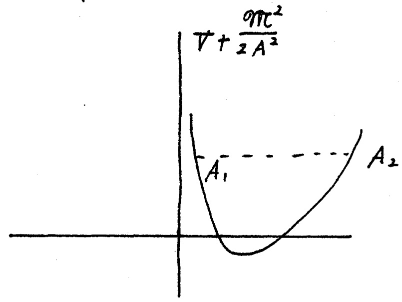
以上の結果は $q<0$ に対しては微小振巾のばあいとわずかなずれを示すに過ぎないが, $q>0$ に対しては新たな平衡状態のまわりの有限振幅の振動に移行する(super-critical な

平衡状態への枝分れ）ことの可能性を示している。特に(3)のばあいは$A=2\sqrt{g}$の状態から$A=0$にもどるには無限の時間を、(4)のばあいは$A=\sqrt{g}$の点のまわりの振動が生じている。実際、このばあいの平衡点は上記の計算で時間変化の項を0とおいて逐次代入を行なえばその高べキの項まで次々に求められるが、よくしらべて見ると、(3.3)の定常厳密解

$$\kappa^2 = \rho^{(0)}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2(s)\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{k}{\pi}K(s)\xi,\ s\right) \qquad (3.17)$$
$$= k^2\left[1+\frac{1}{2}\sum \alpha_n \cos n k\xi\right]^2, \quad \alpha_n = \frac{8q^n}{1+q^{2n}}$$

を微小振幅として展開した結果に他ならないことがわかる。

Ⓑ $\mathfrak{m} \neq 0$



方程式(3.16)の第1式から出る$\varphi = \mathfrak{m}/A^2$を第2式に代入すればAの変化は$V+\mathfrak{m}^2/(2A^2)$のポテンシャルの場での質点の振動と同じで一般に

$$A = A_2\left[1-\epsilon^2\,\mathrm{sn}^2(\Omega t, s)\right]^{1/2}$$

たゞし

$$\epsilon^2 = 1-A_1^2/A_2^2,\quad s^2 = \frac{A_2^2-A_1^2}{A_2^2+\alpha^2} < \epsilon^2$$
$$\Omega = \frac{1}{2}A_2\left[1+\frac{\mathfrak{m}^2}{A_1^2}\right]^{1/2}$$

を得る。このときはAとφが互にからみ合って変化し平衡振動は $m=0$ のときとは異なった速さで移動する

$$\varkappa^2 = \rho^{(0)}(\xi - c_1 t) - \beta^2 k^2, \quad v = c_1 - \mathrm{const}/\rho^{(0)}(\xi - c_1 t)$$

であることがわかる。

References

1) H. Lamb : Hydrodynamics (Cambridge Univ. Press 1932) 202.

2) F. R. Hama : Phys. of Fluids 5 (1962) 1156.

3) F. R. Hama : Phys. of Fluids 6 (1963) 526.

4) R. Takaki & A. Yoshizawa : 数理解析研講究録 125 (1971) 82.

5) T. Kambe & T. Takao : J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 591.

6) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 293.

7) R. Betchov : J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.

8) H. Hasimoto : J. Fluid Mech. 51 (1972) 447.

9) L. P. Pitaevski : Sov. Phys. JETP 13 (1961) 451.

10) E. P. Gross : J. math. Phys. 4 (1963) 195.

11) V. I. Karpman & E. M. Krushkal : Sov. Phys. JETP 28 (1969) 277.

12) T. Taniuti & N. Yajima : J. math. Phys. 10 (1969) 1369.

13) N. Asano, T. Taniuti & N. Yajima : ibid 10 (1969) 2020.

14) V. E. Zakharov : Sov. Phys. JETP 26 (1968) 994.

15) G. K. Batchelor : An Introduction to fluid Dynamics (Cambridge Univ. Press 1967) 509.