数理解析研究所講究録
第163巻 1972年 56-70

非定常回転する円柱のまわりの流れ

東大・工　桑原 真二
東農工大　高木 隆司

§1. まえがき

才1図に示すような，一定の周期で交互にその軸のまわりに回転する円柱によってひきおこされる流れの一種の安定性を考察する。　§2の議論からわかるように，摂動の流れは才2図のようになる。　こゝでは，この摂動の流れの線型安定性を論ずる。　この議論は，種子田等の実験[1]がその動機である。

§2. 基礎方程式

(x, r, φ) を円柱座標，(v_1, v_2, v_3)，$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ をそれに対する速度，渦度成分，p，ρ，ν を圧力，密度，動粘性率とすると，連続およびナヴィエ・ストークスの方程式は

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v\cdot\nabla v_1 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 v_1, \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v\cdot\nabla v_2 - \frac{v_3{}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left\{\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)v_2 - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_3}{\partial\varphi}\right\}, \qquad (2.2b)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v\cdot\nabla v_3 + \frac{v_2 v_3}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left\{\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)v_3 + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_2}{\partial\varphi}\right\}, \qquad (2.2c)$$

となる。こゝに、

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\nabla &= v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_3}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

である。

才1図に示すような基本流：

$$\left.\begin{aligned} \overline{v_1} = \overline{v_2} = 0, \qquad \overline{v_3} &= \mathcal{R}e\ \bar{v}(r)\,e^{-i\sigma t}, \\ \bar{p} &= \mathcal{R}e\ p(r)\,e^{-i\sigma t}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

を仮定する。　境界條件：

$$\left.\begin{aligned} r = a \ &: \quad \overline{v_3} = V\cos(\sigma t - \delta), \\ &\qquad (V:\text{実数},\ \delta\ \text{は数学的簡単さのため導入}) \\ r = \infty \ &: \quad \overline{v_3} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

のもとに、

$$\frac{\partial\overline{v_3}}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\overline{v_3}, \qquad (2.6)$$

を解くと、基本流は

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_3 &= \frac{V}{\sqrt{\mathrm{ker}_1^2\,\alpha a + \mathrm{kei}_1^2\,\alpha a}}\left(\mathrm{ker}_1\,\alpha r - i\,\mathrm{kei}_1\,\alpha r\right), \\ \alpha &= \sqrt{\sigma/\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

であらわされる。

こゝで，物理量を次のように無次元化する。

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
(x,\ r)/a & \longrightarrow & (x,\ r) \\
v/V & \longrightarrow & v \\
w/(V/a) & \longrightarrow & w \\
t/(a/V) & \longrightarrow & t \\
\sigma(a/V) & \longrightarrow & \sigma \\
\sqrt{\sigma/\nu}\ a & \longrightarrow & \alpha
\end{array}
\right\}
\qquad (2.8)
$$

$R = Va/\nu$ ：レイノルズ数.

基礎方程式 (2.1)，(2.2) を v と w だけで書きあらわすと，

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} = 0, \qquad (2.9)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r v_3 - \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}, \qquad (2.10a)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \qquad (2.10b)$$

$$\omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial r}, \qquad (2.10c)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + v\cdot\nabla\,\omega_1 - w\cdot\nabla\, v_1 = \frac{1}{R}\nabla^2\omega_1, \qquad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} + v\cdot\nabla\,\omega_2 - w\cdot\nabla\, v_2 = \frac{1}{R}\left\{\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\omega_2 - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}\right\}, \qquad (2.11b)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + v\cdot\nabla\,\omega_3 - w\cdot\nabla\, v_3 = \frac{1}{R}\left\{\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\omega_3 + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi}\right\}, \qquad (2.11c)$$

となる。

こゝで，流れを基本流と擾動流（擾動量は～をつけて表わす）に分け，

$$v_1 = \tilde{v}_1, \quad v_2 = \tilde{v}_2, \quad v_3 = \overline{v_3} + \tilde{v}_3,$$

$$\omega_1 = \overline{\omega_1} + \tilde{\omega}_1, \quad \omega_2 = \tilde{\omega}_2, \quad \omega_3 = \tilde{\omega}_3, \qquad (2.12)$$

$$\overline{\omega_1} = \mathcal{R}e\, \overline{\omega}(r)\, e^{-i\sigma t}, \quad \overline{\omega} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\overline{v}$$

とおく。 擾動流は，実験の結果からみて，軸（x）方向にkの波数をもつ定立波と考えることができる。 線型化して得られる擾動方程式に対する強制項は（2.2 b,c）の $-v_3^2/r$，$v_2 v_3/r$ の項から生ずると考えられるから，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_2 &\sim e^{\pm ikx} \\ \tilde{v}_3 &\sim e^{\pm ikx - i\sigma t} \end{aligned}\right\} \times (r\text{の関数}) \qquad (2.13)$$

とおくのが合理的である。 こゝで高次の項：$e^{-il\sigma t}$（$l \geq 2$）は省略する。 同様に，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_1 &\sim e^{\pm ikx} \\ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 &\sim e^{\pm ikx - i\sigma t} \\ \tilde{\omega}_3 &\sim e^{\pm ikx} \end{aligned}\right\} \times (r\text{の関数}) \qquad (2.14)$$

とおくことができる。 そこで

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_{1,2} &= \mathcal{R}e\, \hat{v}_{1,2}(r)\, e^{ikx}, \\ \tilde{v}_3 &= \mathcal{R}e\, \hat{v}_3(r)\, e^{-i\sigma t} \cos kx, \\ \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \mathcal{R}e\, \hat{v}_3\, e^{-i\sigma t} \cos kx, \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}_2 &= \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \,\mathrm{Im}\, \hat{v}_3 e^{-i\sigma t} \sin kz, \\ \tilde{\omega}_3 &= \mathrm{Re}\, \hat{\omega}_3(r) e^{-i\sigma t}, \end{aligned}\right\}$$

の形がえられる。

(2.15)を(2.9)～(2.11)に代入し，整理すると，

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k^2\right)\hat{v}_2 = ik\,\hat{\omega}_3, \tag{2.16a}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k^2 + i\alpha^2\right)\hat{v}_3 = R\,\overline{\omega}\,\hat{v}_2, \tag{2.16b}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - k^2\right)\hat{\omega}_3 \\ &\qquad = -\frac{1}{2} ikR(\overline{v}\,\hat{v}_3^{*} + \overline{v}^{*}\hat{v}_3)/r, \end{aligned} \tag{2.16c}$$

をうる。　境界条件は

$$\left.\begin{aligned} r = 1: &\quad \hat{v}_2 = \hat{v}_3 = \frac{d\hat{v}_2}{dr} = 0, \\ r = \infty: &\quad \hat{v}_2 = \hat{v}_3 = \hat{\omega}_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

となる。

§3. 解法および数値計算

我々の流れの安定性の問題は(2.16)を境界条件(2.17)のもとに解き，それから出てくる分散式でσに虚数が出るかどうかを判定して，安定・不安定をきめることになる。

独立変数を，$\xi = \alpha(r-1)$ にとれば，境界条件(2.17)から，$\xi = 0$ の付近で，せいぜい(あるいはもっと高いオーダーで)

$$\hat{v}_2 \sim \xi^2, \quad \hat{v}_3 \sim \xi, \quad \hat{\omega}_3 \sim 1, \tag{3.1}$$

のふるまいをするものと考えられる。 $\hat{v}_2$, $\hat{v}_3$, $\hat{\omega}_3$ が完全直交関数系で展開できるものと仮定し

$$\left.\begin{aligned} \hat{v}_2 &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l \varphi_l^{(1)}(\xi), \\ \hat{v}_3 &= \sum_{l=0}^{\infty} b_l \varphi_l^{(2)}(\xi), \\ \hat{\omega}_3 &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi_l^{(3)}(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

とおき，(3.2) にみあうように，

$$\left.\begin{aligned} \varphi_l^{(1)}(\xi) &= \sqrt{\frac{l!}{(l+4)!}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi^2 L_l^{(4)}(\xi), \\ \varphi_l^{(2)}(\xi) &= \sqrt{\frac{l!}{(l+2)!}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi L_l^{(2)}(\xi), \\ \varphi_l^{(3)}(\xi) &= e^{-\frac{1}{2}\xi^2} L_l(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

を採用することにする。 こゝで，$L_l(\xi)$ は Laguerre の多項式， $L_l^{(2)}(\xi)$, $L_l^{(4)}(\xi)$ は Laguerre の陪多項式である。

(2.16) を書き変えると

$$(\alpha^2 \mathcal{D} - k^2 f)\hat{v}_2 = i k^2 f \hat{\omega}_3, \tag{3.4a}$$

$$(\alpha^2 \mathcal{D} - k^2 + i\alpha^2)\hat{v}_3 = \alpha R g \hat{v}_2, \tag{3.4b}$$

$$(\alpha^2 \mathcal{D} - k^2)\hat{\omega}_3 = -\frac{1}{2} i\alpha k R (h^* \hat{v}_3 + h \hat{v}_3^*), \tag{3.4c}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\alpha^2 + 2\alpha\xi + \xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} + (\alpha+\xi)\frac{d}{d\xi} - 1, \\ f &= \alpha^2 + 2\alpha\xi + \xi^2, \end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
g &= (\alpha+\xi)\left\{(\alpha+\xi)\frac{d\bar{v}}{d\xi}+\bar{v}\right\},\\
h &= (\alpha+\xi)^{-1}\bar{v}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)
$$

となる。

スカラー積を

$$
(\varphi,\psi)=\int_0^\infty \varphi^*(\xi)\psi(\xi)\,d\xi, \qquad (3.6)
$$

で定義する。 (3.4) を Galerkin の方法で解くことを考える。$\hat{v}_2$ などを (3.2), (3.3) で展開すれば境界条件はもはや満足されている。 (3.4) の各々と $\varphi_l^{(1)}$, $\varphi_l^{(2)}$, $\varphi_l^{(3)}$ とのスカラー積をとることによって，我々は展開係数：a_l, b_l, c_l に対する代数方程式をうることができる。 さて

$$
\left.\begin{aligned}
\mathcal{D}_{lm}^{(n)}(\alpha) &= (\varphi_l^{(n)}, \mathcal{D}\varphi_m^{(n)}),\\
f_{lm}^{(p,q)}(\alpha) &= (\varphi_l^{(p)}, f\varphi_m^{(q)})
\end{aligned}\right\} \qquad (3.7)
$$

等とおくと，

$$
(\alpha^2\mathcal{D}_{lm}^{(1)}-k^2f_{lm}^{(1)})a_m+k f_{lm}^{(1,3)}c_m=0, \qquad (3.8a)
$$

$$
\alpha R g_{lm}^{(2,1)}a_m-\{\alpha^2\mathcal{D}_{lm}^{(2)}-(k^2-i\alpha^2)f_{lm}^{(2)}\}b_m=0, \qquad (3.8b)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\alpha k R(h_{lm}^{(3,2)*}b_m+h_{lm}^{(3,2)}b_m^*)\\
&\qquad+(\alpha^2\mathcal{D}_{lm}^{(3)}-k^2f_{lm}^{(3)})c_m=0,
\end{aligned} \qquad (3.8c)
$$

の無限連立一次方程式がえられる。

φ_0, φ_1 だけをとると8行の方程式系となり，8行8列の行列式を0とおいて

$$
D(\alpha, k, R)=0, \qquad (3.9)
$$

がえられる。

実験で不安定が観測されるのは，αが数十の程度で，$\alpha \gg 1$ と考えられるから，Laguerreの多項式の漸近展開を用いることができ，具体的に $\mathcal{Q}_{\ell m}^{(n)}(\alpha)$ 等を計算することができる。　この計算では，α^{-1} について展開し，はじめの3項までをとった。

実際の計算は，まずαとkを与えて，いろいろなRについて(3.9)の$D(\alpha, k, R)$を計算し，Dの符号の変る所から中立曲線をえた。　中立曲線は，基本流を特徴づける2つのパラメター a とσを含む $\alpha\ (=\sigma a^2/\nu)$ が 40, 60, 80, 100 の場合について計算された（オ3～オ6図）。

臨界レイノルズ数 R_{cr} の近似値は

$$\alpha = 40 : \quad R_{cr} = 1{,}600 \quad (k_{cr} = 30),$$

$$\alpha = 60 : \quad R_{cr} = 2{,}700 \quad (k_{cr} = 40),$$

$$\alpha = 80 : \quad R_{cr} = 4{,}300 \quad (k_{cr} = 50),$$

$$\alpha = 100 : \quad R_{cr} = 5{,}800 \quad (k_{cr} = 70),$$

であった。

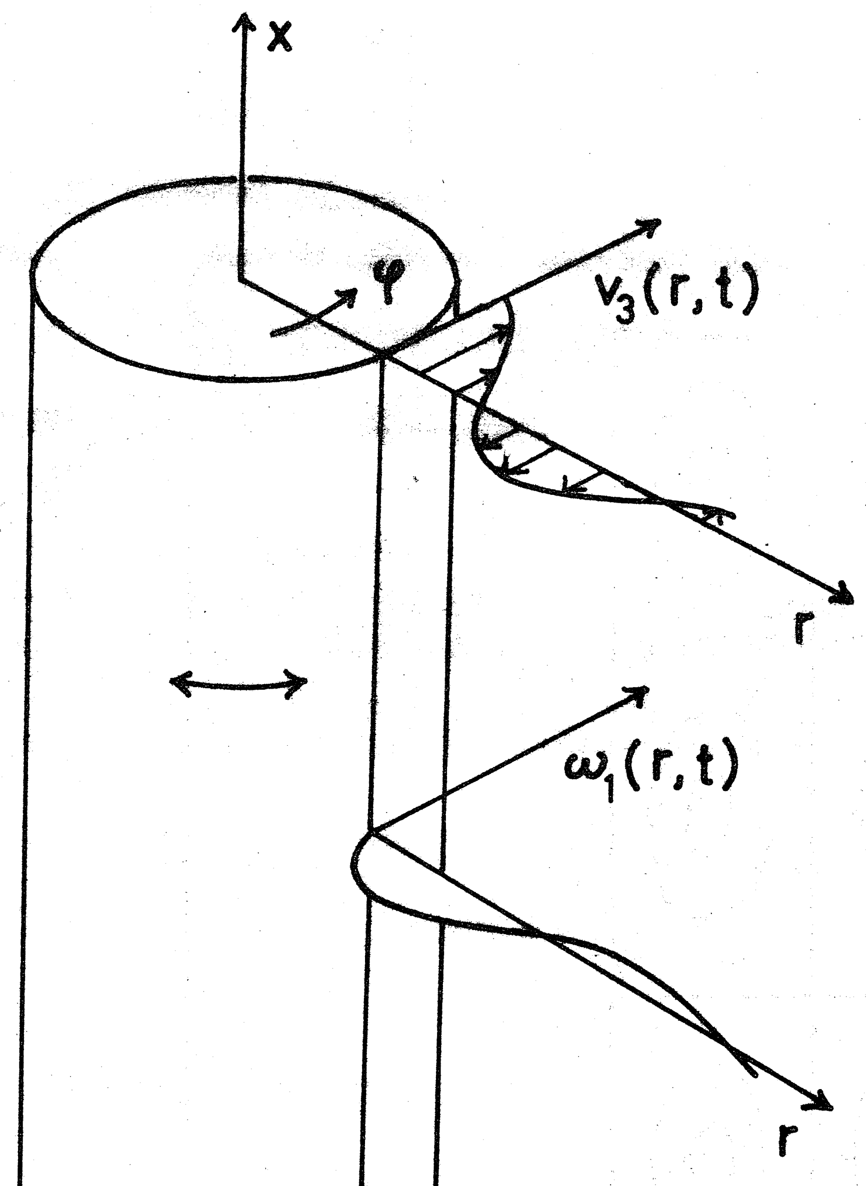
我々は(3.4)を解くために，いわゆるGalerkinの方法を用いた。　すなわち，解を境界条件を満足する完全直交関数系によって展開して，基礎方程式に代入し，個々の直交関数とのスカラー積をとって，展開係数についての代数方程式

に帰着させる方法であった。 直交関数のはじめの数項で近似できるためには，解が十分滑らかであることが必要である。我々の場合には，臨界層（critical layer）のようなものは現れないと予想されるから，解は十分滑らかと想像される。しかし，直交関数を２項でなく，もっとたくさんとって近似を上げ，収束をしらべることは重要な問題であると考えられる。

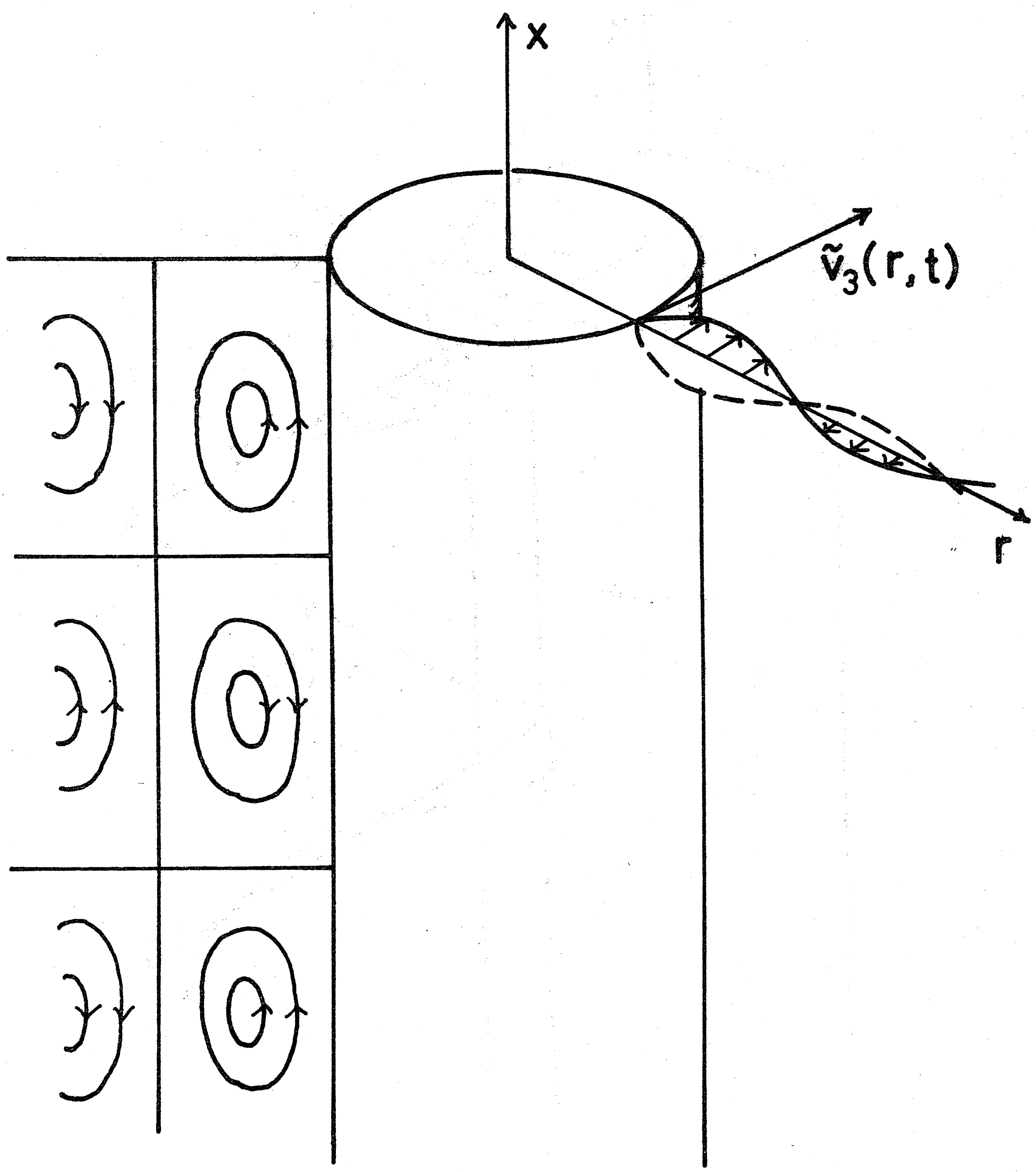
参考文献

1) S. Taneda et al：日本物理学会第25回年会予稿集２巻（1970）91.

2) 桑原真二・高木隆司：数理解析研究所講究録120（1971）28.

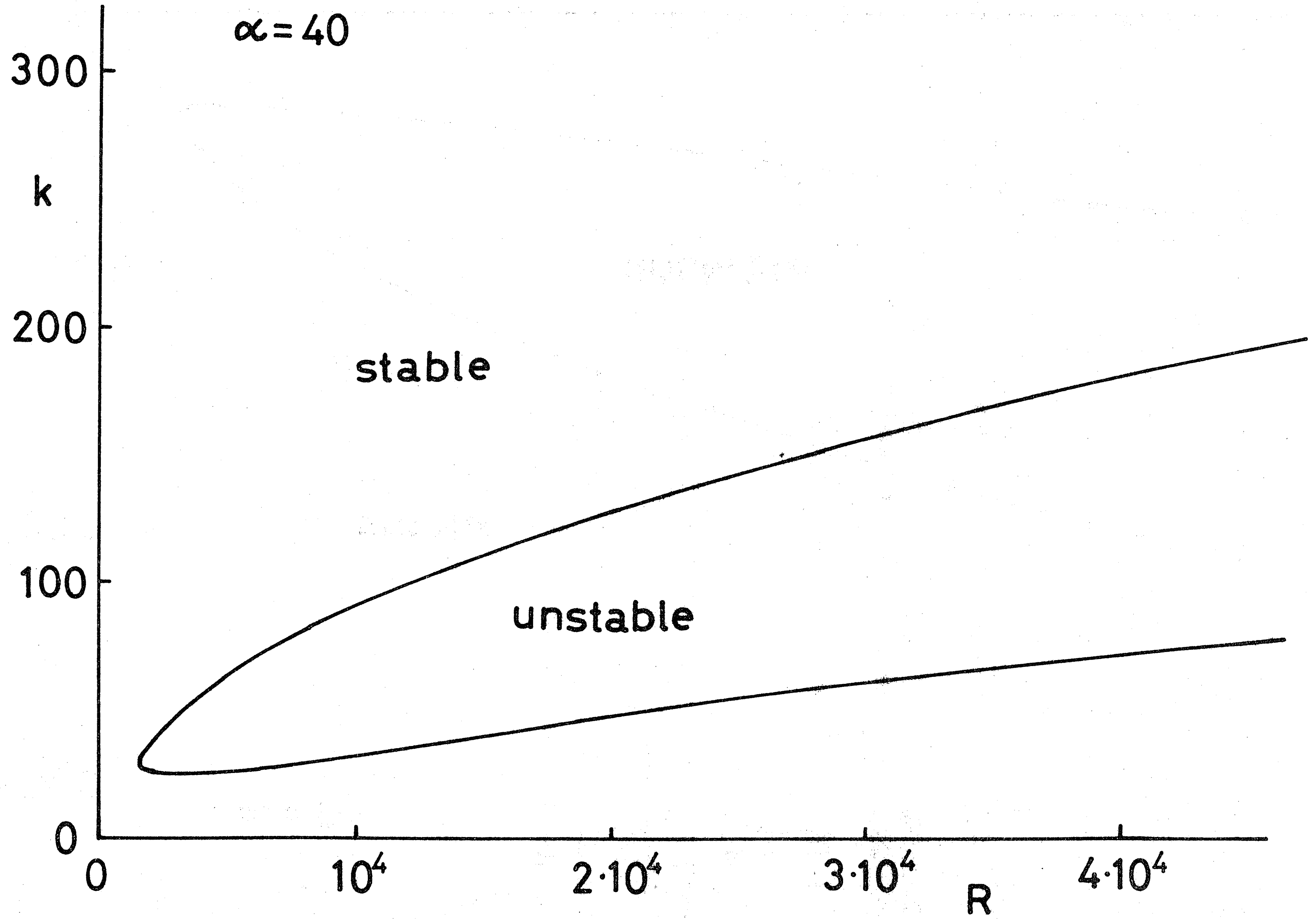


オ1図 基本流

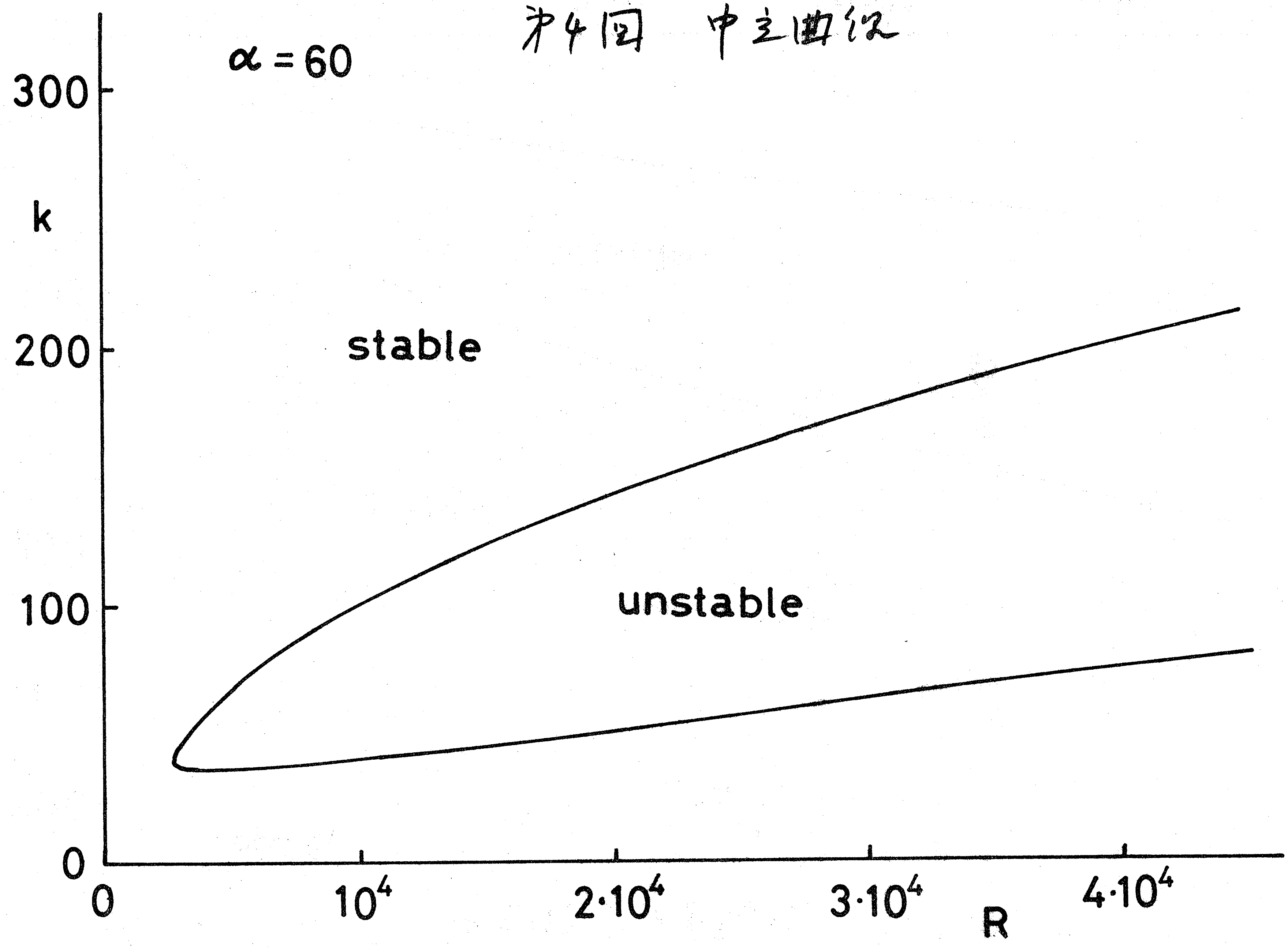


第2図 攝動流

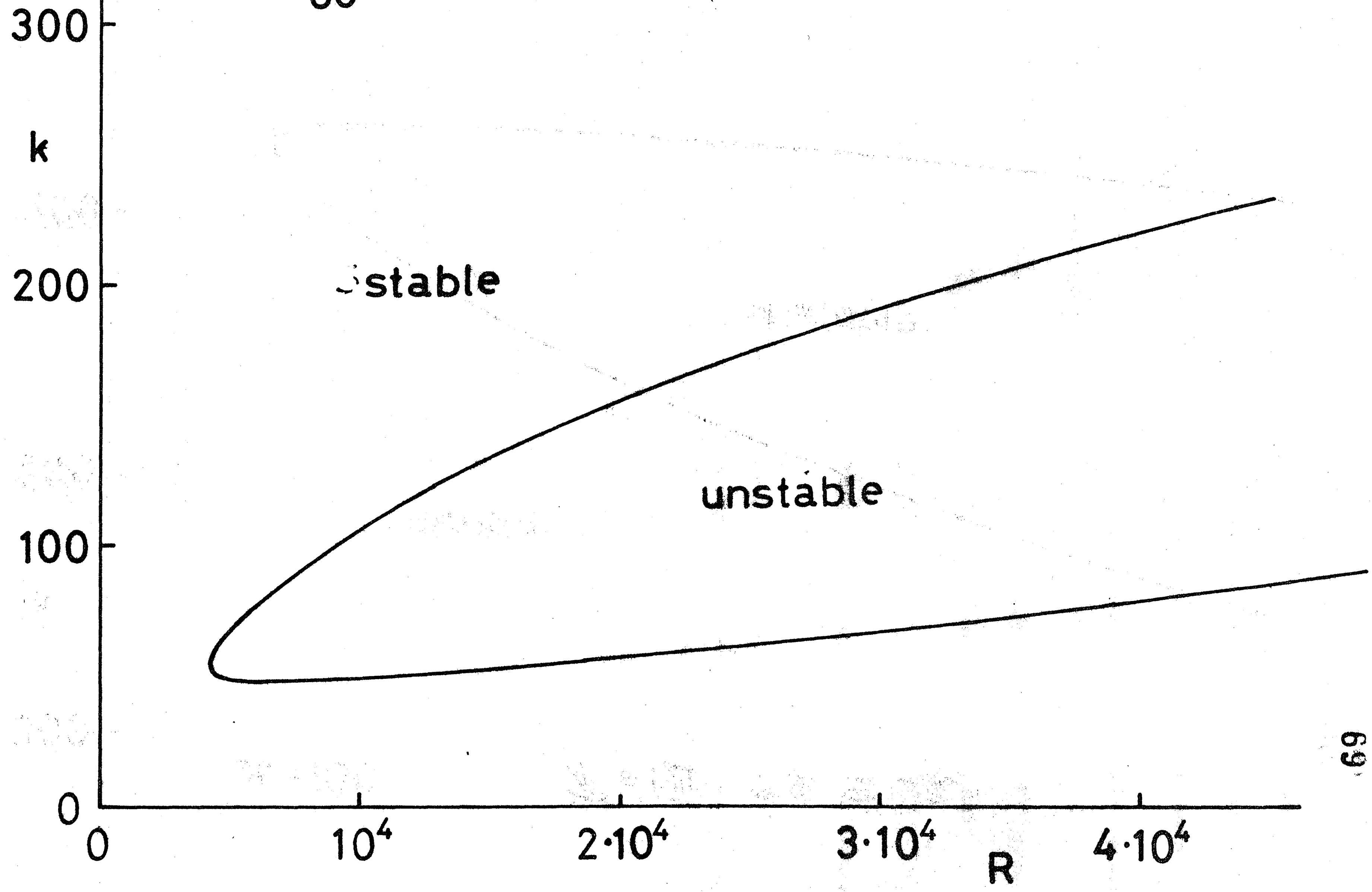
第3図 中立曲線

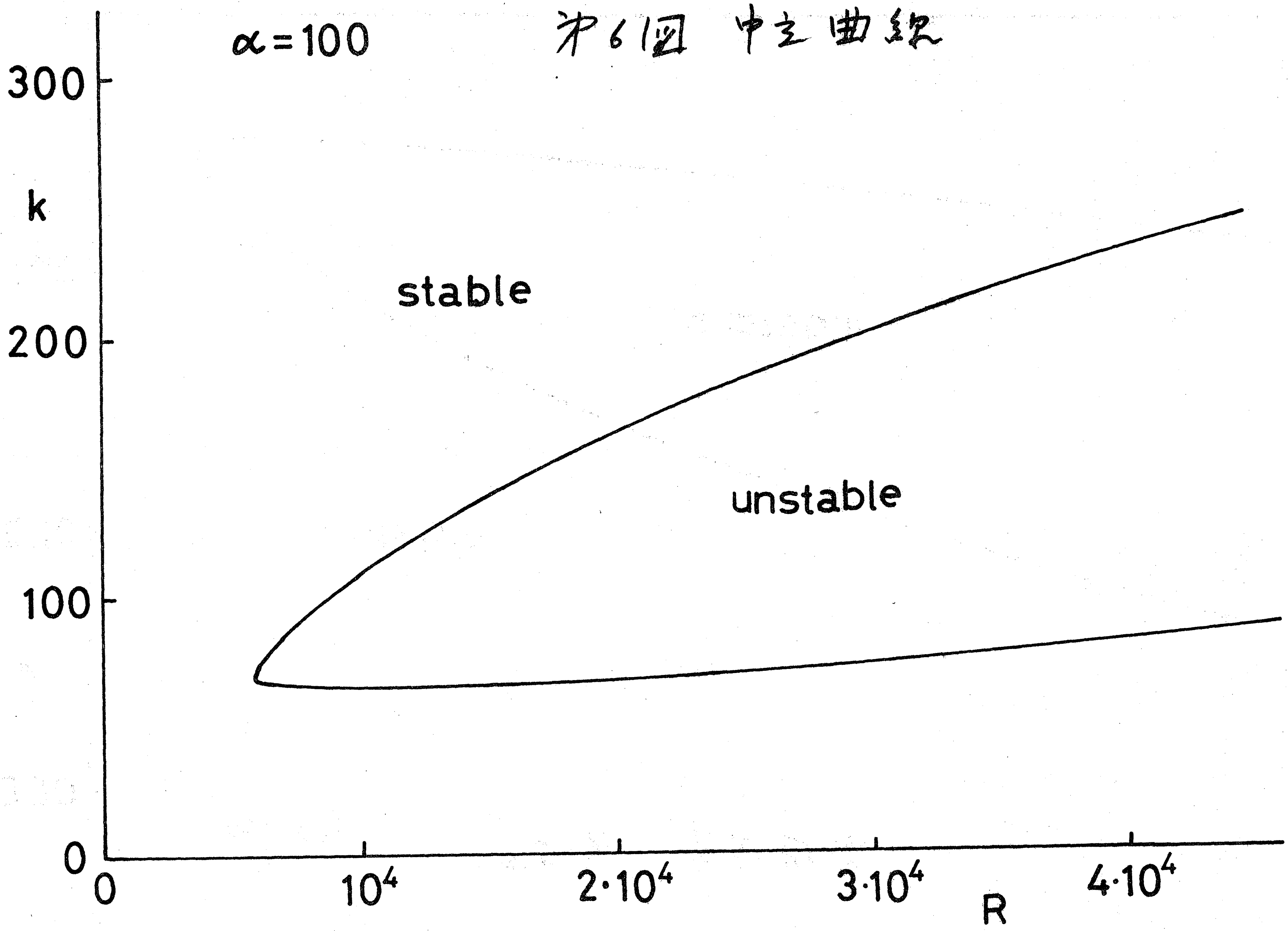


第4図 中立曲線



第5図 中立曲線





第6図 中立曲線