

有限平板を過ぎる高レイノルズ数の流れ

東大 理 吉 沢 敏

§1. 序論

有限平板を過ぎる粘性流の問題は半無限平板の問題と共に多くの関心をひいてきた。それは実際的な興味と共に、幾何学的簡単さが Navier-Stokes 方程式の厳密解を得るという目的に適しているという事情にもよると思われる。半無限平板を過ぎる流れは Imai,¹⁾ Goldstein²⁾ によって境界層型の、Carrier and Lin³⁾ によって Stokes 型の、著者⁴⁾ によって Oseen 型の逐次近似によって研究された。又著者⁵⁾ van de Vooren and Dijkstra,⁶⁾ Botta and Dijkstra⁷⁾ によって数値解が与えられた。更に著者⁸⁾ は Imai, Goldstein の解を potential 流の領域を通して Carrier and Lin の解と結びつける方法を提案して、Carrier and Lin の解に含まれるいくつかの未定定数を評価した。

有限平板の場合もいわゆる Blasius の解が高レイノルズ数

においてはよい結果を与えるが、板の両端においては不正確になる。板の有限性を考えにいれるために、Kuo⁹⁾は境界層型の逐次近似を行い、drag に対して実験とよく合う結果を与えた。しかしながら彼の理論は境界層型の近似に基づいてゐるために、後縁の近傍においては正確な流れの様子を与えることはできない。

Imai¹⁰⁾は高レイノルス数においては、後縁近傍の解は上流側において Blasius の解に接続すべきであるといふ考えに基づいて、新しい近似方法を提案した。この方法は Oseen 近似と類似の方法であり、一様流のかわりに Blasius の解を近似する一様な shear flow を用いてゐる。Stewartson¹¹⁾はこの方法によつて後縁近傍の流れを詳細に調べ、板の上の抵抗係数を求めた。又著者¹²⁾は境界層の中の一様な shear flow の適当な平均速度を用いて調べた。最近、Stewartson¹³⁾は triple-deck structure による方法を提案してゐるが、この方法にも未だ不正確な点が多いように思われる。

この問題に対する数値解としては、Dennis and Dunwoody¹⁴⁾、Dennis and Chang¹⁵⁾による Fourier 展開の方法がある。彼等によつて得られた数値は現在の時点においてはもっとも信用のおけるものと考えられるが、Fourier 展開においてとられ

る項数に対する制限のため、後縁の近傍においては不正確になっているように思われる。

本論文の目的は高レイノルズ数における有限平板を過ぎる粘性流のより正確な解を求めることにある。この目的のため、我々は得られた解が上流側では Blasius の解に、下流側では Goldstein¹⁶⁾ の near wake の解に接続するという条件のもとに Navier-Stokes の方程式を数值的に解いた。得られた解に基づいて作成された数表を用いて、我々は任意の高レイノルズ数における板の上の抵抗係数を知らることができる。

§ 2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮性粘性流体の 2 次元定常運動を支配する Navier-Stokes の方程式は次式で与えられる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

ここで (x, y) はデカルト座標であり、 ψ は流れの函数、 ω は渦度、 ν は動粘性係数である。長さ L の板は x 軸の正の部分にあり、前縁はその原点に一致している。

今、我々は (x, y) を L で、 ψ を UL (U は一様流の速度) で、 ω を U/L で無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここで $R (= UL/\nu)$ はレイノルズ数である。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{at } y = 0, \\ \psi_y &= 0 && \text{at } y = 0, 0 < x < 1, \\ \omega &= 0 && \text{at } y = 0, x > 1 \text{ and } x < 0, \\ \psi &\rightarrow y, \omega \rightarrow 0 && \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

§ 3. 後縁近傍での基礎方程式と境界条件

後縁近傍 ($x \sim 0$, ただし座標原点は後縁に移されている) においては、上流側の Blasius の解は

$$\psi \sim \frac{\gamma}{2} R^{1/2} y^2, \quad \omega \sim -\gamma R^{1/2} \quad (3.1)$$

によって与えられる ($\gamma = 0.33206$)。他方下流側においては、上流側の Blasius の解によって決定される Goldstein¹⁶⁾

near wake の解によって与えられる。

$$\psi_g = R^{-1/2} x^{2/3} f_g(R^{1/2}y/(3x^{1/3})). \quad (3.2)$$

ここで f_g は

$$\left. \begin{aligned} f_g''' + 2f_g f_g'' - f_g'^2 &= 0, \\ f_g(0) = f_g''(0) &= 0, \quad f_g''(\infty) = \gamma. \end{aligned} \right\} (3.3)$$

我々の目的は上流側及び下流側において、それぞれ水の 2 つの解に接続する Navier-Stokes の方程式の解を求めることにある。それ故に、方程式及び境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi, \end{aligned} \right\} (3.4)$$

a. c.

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{at } y=0, \\ \psi_y &= 0 && \text{at } y=0, -1 < x < 0, \\ \omega &= 0 && \text{at } y=0, x < -1 \text{ and } x > 0, \\ \psi &\rightarrow \frac{\gamma}{2} R^{1/2} y^2, \quad \omega \rightarrow -\gamma R^{1/2} && \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, x < 0, \\ \psi &\rightarrow \psi_g, \quad \omega \rightarrow \omega_g && \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, x > 0. \end{aligned} \right\} (3.5)$$

大 $x \sim R$ に対して、(3.4) と (3.5) を解くために、我々

は次のような新しい変数を導入する:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= Y^{1/2} R^{3/4} x, & \hat{y} &= Y^{1/2} R^{3/4} y, \\ \hat{\psi} &= R\psi, & \hat{\omega} &= Y^{-1} R^{-1/2} \omega. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

(3.6) を (3.4), (3.5) に代入して, $R \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{y}} &= \Delta \hat{\omega}, \\ \hat{\omega} &= -\Delta \hat{\psi}, \end{aligned} \right\} (3.7)$$

a. c.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \\ \hat{\psi}_{\hat{y}} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \hat{x} < 0, \\ \hat{\omega} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \hat{x} > 0, \\ \hat{\psi} &\rightarrow \frac{1}{2} \hat{y}^2, \hat{\omega} \rightarrow -1 & \text{as } \hat{x}^2 + \hat{y}^2 &\rightarrow \infty, \hat{x} < 0, \\ \hat{\psi} &\rightarrow \hat{\psi}_g, \hat{\omega} \rightarrow \hat{\omega}_g & \text{as } \hat{x}^2 + \hat{y}^2 &\rightarrow \infty, \hat{x} > 0. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

ここで

$$\hat{\psi}_g = \hat{x}^{2/3} f_g(\hat{y}/(3\hat{x}^{1/3})).$$

(3.7), (3.8) を解析的に解くことは困難であるので, 数値的に解くことを試みる。よく知られてゐるように, 後縁は流

れの特異点になっているために, (3.7), (3.8) に差分近似を施す前に特異点を適当に処理する必要がある。我々は (2,9) のかわりに放物座標 (ξ, η) を用い, 更に著者によって半無限平板の場合に用いられた方法⁵⁾ に基づいてこの問題を解く。詳細に関しては ref. 17 を参照されたい。

§ 4. 結果

板の上の抵抗係数 C_f は $C_f = -p \omega(x, 0) / p U^2$ ($x < 0$) によって定義される。後縁近傍の C_f は次式によって与えられる:

$$C_f = Y R^{-1/2} F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1). \quad (4.1)$$

ここで x_1 は L によって無次元化された後縁からの距離, $F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1) = -\omega(\hat{x}, 0)$ 。現在の計算によって求められた F_s の値は Table 1 に与えられている。他方, 後縁近傍を除いては

$$C_f = Y R^{-1/2} (1 - x_1)^{-1/2}. \quad (4.2)$$

(4.1) と (4.2) に matching rule を適用して

$$C_f = Y R^{-1/2} [(1 - x_1)^{-1/2} + F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1) - 1]. \quad (4.3)$$

(4.3) と Table を用いて, 我々は任意の高レイノルズ数にお

ける C_f の値を知ることもできる。Fig. 1に $R = 100, 1000$ に
 対する C_f の値が plot されてゐる。Dennis and Dunwoody¹⁴⁾
 の結果との比較は $R = 1000$ においてはかなりよく一致して
 ゐることを示してゐる。

Stokes 型の近似的より $F_s(z)$ は次式で与えられる:

$$F_s(z) \sim a z^{-1/2} + b z^{1/2} + \dots \quad \text{as } z \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

ここで $z = \gamma^{1/2} R^{3/4} \bar{z}$. (4.4) と我々の数値解との比較より

$$a = 1.24, \quad b = 0.71 \quad (4.5)$$

これらの結果は Stewartson¹¹⁾ ($a = 1.08, b = 0.42$), 著者¹²⁾
 ($a = 1.13, b = 0.56$) によつて与えられた値にかなり近い
 ことがわかる。

References

- 1) I. Imai: J. Aero. Sci. 24 (1957) 155.
- 2) S. Goldstein: Lectures on Fluid Mechanics (Interscience, New York, 1960).
- 3) G.F. Carrier and C.C. Lin: Quart. appl. Math. 6 (1948) 63.
- 4) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 30 (1971) 1747.
- 5) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 28 (1970) 776.
- 6) A.I. van de Vooren and D. Dijkstra: J. Engineering Math. 4 (1970) 9.
- 7) E.F.F. Botta and D. Dijkstra: Report TW - 80, Math. Department, University of Groningen (1970).
- 8) A. Yoshizawa: to be submitted to J. Phys. Soc. Japan.
- 9) Y.H. Kuo: J. Math. and Phys. 32 (1953) 83.
- 10) I. Imai: Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Math. (Springer, Berlin, 1964) p.663.
- 11) K. Stewartson: Proc. Roy. Soc. A306 (1968) 275.
- 12) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 469.
- 13) K. Stewartson: Mathematika 16 (1969) 106.
- 14) S.C.R. Dennis and J. Dunwoody: J. Fluid Mech. 24 (1966) 577.
- 15) S.C.R. Dennis and G-Z Chang: Phys. of Fluids 12, Suppl. III (1969) 88.
- 16) S. Goldstein: Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1948) 1.
- 17) A. Yoshizawa: to be published in J. Phys. Soc. Japan 31.

Table 1 The values of $F_S(z)$.

z	$F_S(z)$	z	$F_S(z)$	z	$F_S(z)$
0.00	∞	11.52	1.330	62.72	1.051
0.08	4.573	13.52	1.297	72.00	1.036
0.32	2.584	15.68	1.267	81.92	1.025
0.72	2.055	18.00	1.240	92.48	1.019
1.28	1.845	20.48	1.220	103.68	1.013
2.00	1.728	23.12	1.201	115.52	1.009
2.88	1.642	25.92	1.188	128.00	1.003
3.92	1.571	28.88	1.173	141.12	1.001
5.12	1.509	32.00	1.144	154.88	1.000
6.48	1.455	38.72	1.112	169.28	1.000
8.00	1.408	46.08	1.089	184.32	1.000
9.68	1.366	54.08	1.071	200.00	1.000

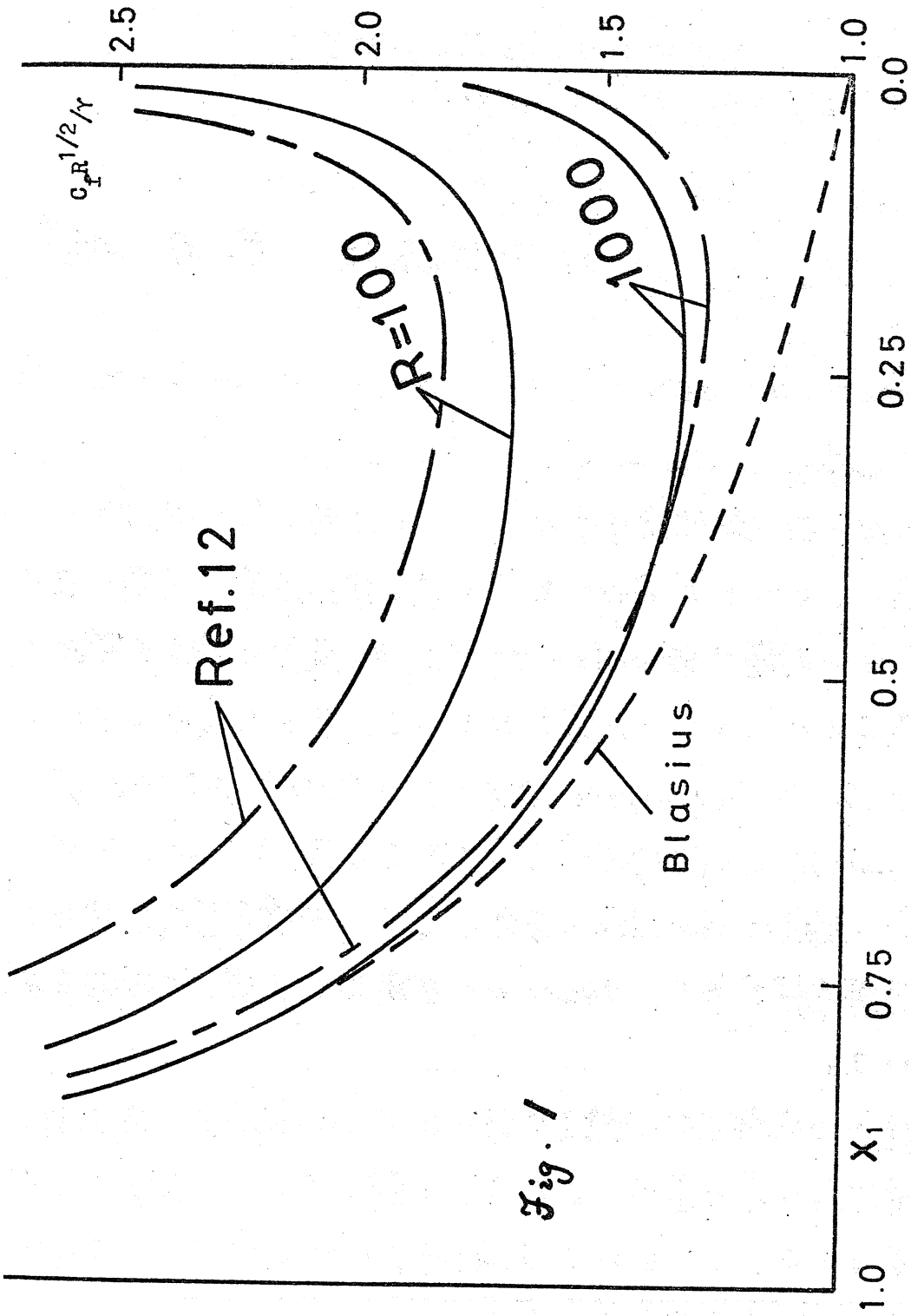


Fig. 1