数理解析研究所講究録
第163巻 1972年 160-171

Weak Shock Waves in a Liquid Containg Gas Bubbles

阪府大 工 数理 三浦宏之

§1. 序

二相流に於ける衝撃波に対しては、二相の間の粘性や熱伝達による緩和効果が本質的である。いま液体中に小さな泡が沢山ある場合を考える。ある点でこの流体に圧縮的変化が起こるとすると、泡の方は液体に比べて慣性が小さいので液体より速く動こうとし速度のずれが生じる。その結果、これを妨げようとする方向に液体からの粘性力が働き、又、泡の加速に対していわゆる加速反作用の力が作用する。一方、圧縮された泡は液体よりも高い温度となり、その温度差に応じて泡から液体への熱伝達が起こる。そしてこれらの効果の均合によって衝撃波が形成される。最近、Crespo[1]が簡単な流体近似のモデルを用いて、泡を含んだ液体中の強い衝撃波を調べているが、こゝではそのモデルを用いて弱い衝撃波の構造を解析的に求める。

§2. 基礎式

はじめ液体中に多くの小さな泡が一様に分布しているとする。簡単のために次のことを仮定する。液体は非圧縮でその温度変化が無視できる程十分に大きな熱容量をもつ。又、泡はすべて同一の大きさの小さな球であり、中の気体は熱的にも熱量的にも完全である。更に気体の密度は液体に比して無視できるものとする。

泡の半径が衝撃波の厚みに比べて十分小さいような弱い衝撃波を考えるので、気体と液体の圧力はほゞ等しいと考えれば、流れの状態を表わす変数は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \text{気体：圧力 } p_1^*(=p_0^*),\ \text{密度 } \rho_1^*,\ \text{温度 } T_1^*,\ \text{速度 } U_1^*, \\ \text{液体：圧力 } p_0^*,\ (\text{密度 } \rho_0^*=const.),\ (\text{温度 } T_s^*=const.),\ \text{速度 } U_0^*, \\ \text{混合比：気体の volume fraction } X, \end{cases}$$

これらによって一次元流れに対する基礎式は以下のように表わすことができる。

液体に対する連続の式：

$$(1) \qquad -\frac{\partial X}{\partial t^*}+\frac{\partial(1-X)U_0^*}{\partial x^*}=0.$$

気体に対する連続の式：

$$(2) \qquad \frac{\partial(X\rho_1^*)}{\partial t^*}+\frac{\partial(X\rho_1^*U_1^*)}{\partial x^*}=0.$$

気体に対する運動方程式：

$$(3) \qquad \frac{\partial p_0^*}{\partial x^*}=\frac{\Gamma}{2}\rho_0^*\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+U_1^*\frac{\partial}{\partial x^*}\right)(U_0^*-U_1^*)+\frac{9\rho_0^*\nu_0^*}{2a^{*2}}(U_0^*-U_1^*).$$

但し、添字 s を静止流体での値を表わすものとして $a^*=a_s^*\left(\frac{\rho_{1s}^*}{\rho_1^*}\right)^{\frac{1}{3}}$ であり、又 μ_0^* は液体の動粘性率である。上式の右辺第一項はいわゆる加速反作用の力であって係数 I は一般に X に依存し、非常に小さな X に対しては 1 に近づくものであるが、簡単のためにこゝでは一定値をとると仮定する。泡に働く抵抗は泡同士の相互作用もあり詳細はわからないが、各々の泡が互いに十分離れているものとして、抵抗が Stokes の法則に従うとした。

混合流体に対する運動方程式：

(4) $$\rho_0^*(1-X)\left(\frac{\partial v_0^*}{\partial t^*}+v_0^*\frac{\partial v_0^*}{\partial x^*}\right)+\frac{\partial p_0^*}{\partial x^*}=0.$$

気体に対するエネルギの式：

(5) $$\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+v_1^*\frac{\partial}{\partial x^*}\right)p_0^*-\gamma_1\frac{p_0^*}{\rho_1^*}\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+v_1^*\frac{\partial}{\partial x^*}\right)\rho_1^*=\frac{3(\gamma_1-1)\sigma_0^*}{a^{*2}}(T_s^*-T_1^*).$$

但し、γ_1 は気体の比熱比であり、σ_0^* は液体の熱伝導率である。二相の間の熱伝達については、一つの簡単なモデルとして、Nusselt 数 $Nu=2$ を仮定している。

気体に対する状態方程式：

(6) $$p_0^*=\rho_1^* R T_1^*.$$

こゝで R は気体定数である。

§3. 定常衝撃波

いま、静止流体中を速度 c^* で伝播する定常な弱い衝撃波を

考える。定常な流れであるからすべての量は次のξ^*だけの関数である。

(7) $\xi^* = x^* - c^* t^*$.

衝撃波の強さを表わすパラメータは、衝撃波通過後の平衡状態にある流体の速度をU^*として次式で与えられる。

(8) $\varepsilon = U^* / C_s^* \ll 1$.

但し、C_s^*は静止流体中の音速であり、次のように未知の定数kを用いて表わすことができる。

(9) $C_s^{*2} = k P_s^* / \rho_0^*$.

こゝですべての従属変数に対し無次元化とを展開を行う。

$$
(10)\quad \begin{cases}
X = X_s(1+\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \cdots), \\
U_0^* = \varepsilon C_s^* (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots), \\
U_1^* = \varepsilon C_s^* (v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots), \\
P_0^* = P_s^* (1+\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \cdots), \\
\rho_1^* = \rho_{1s}^* (1+\varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \cdots), \\
T_1^* = T_s^* (1+\varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots), \\
\text{又、伝播速度 } C^* \text{ についても} \\
C^* = C_s^* (1+\varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \cdots). \qquad (C_i \text{は未知の定数})
\end{cases}
$$

次に独立変数は、L^*を代表的な長さ、即ち衝撃波の厚みを表わすものとして無次元化できる。

(11) $\xi^* = L^* \xi$.

これらにより基礎式(1)〜(6)は次のように展開される。

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
&[X_sX_1+(1-X_s)u_0]+\varepsilon[X_sX_2+X_sC_1X_1+(1-X_s)u_1-X_sX_1u_0]+O(\varepsilon^2)=0,\\
&[v_0-X_1-\rho_1]+\varepsilon[v_1-X_2-\rho_2-X_1\rho_1-C_1X_1-C_1\rho_1+v_0X_1+v_0\rho_1]+O(\varepsilon^2)=0,\\
&\left[\frac{dP_1}{d\xi}+\frac{\Gamma h}{2}\frac{d(u_0-v_0)}{d\xi}\right]+\varepsilon\left[\frac{dP_2}{d\xi}+\frac{\Gamma h}{2}\left\{\frac{d(u_1-v_1)}{d\xi}+(C_1-v_0)\frac{d(u_0-v_0)}{d\xi}\right\}\right]+O(\varepsilon^2)\\
&\quad-\varepsilon\eta h\frac{L^*}{a_s^*}\left[(u_0-v_0)-\varepsilon\left\{(u_1-v_1)+\frac{2}{3}\rho_1(u_0-v_0)\right\}+O(\varepsilon^2)\right]=0,\\
&[P_1-k(1-X_s)u_0]+\varepsilon[P_2+kX_sX_1u_0+k(1-X_s)(u_0-C_1)u_0-k(1-X_s)u_1]+O(\varepsilon^2)=0,\\
&\left[-\frac{dP_1}{d\xi}+\gamma_1\frac{d\rho_1}{d\xi}\right]+\varepsilon\left[-\frac{dP_2}{d\xi}-(v_0-C_1)\frac{dP_1}{d\xi}+\gamma_1\frac{d\rho_2}{d\xi}+\gamma_1(P_1-\rho_1-v_0+C_1)\frac{d\rho_1}{d\xi}\right]\\
&\quad+O(\varepsilon^2)+\varepsilon A\frac{L^*}{a_s^*}\left[T_1+\varepsilon\left(T_2+\frac{2}{3}\rho_1T_1\right)+O(\varepsilon^2)\right]=0,\\
&[P_1-\rho_1-T_1]+\varepsilon[P_2-\rho_2-T_2-\rho_1T_1]+O(\varepsilon^2)=0.
\end{aligned}\right.
$$

但し. η と A は

$$
(13)\quad \eta=\frac{9\nu_0^*}{2v^*a_s^*},\qquad A=\frac{3(\gamma_1-1)\sigma_0^*T_s^*}{v^*a_s^*P_s^*}.
$$

η は泡の半径に基づいた Reynolds 数の逆数に相当して粘性の効果を表わし、又、A は熱伝達の効果を表わすパラメータであって、一般的にこれらは同程度の大きさとみなされる。

もし、上式中の 1st-order の方程式系が線型独立であると上流及び下流無限遠方で一様状態となる衝撃波を表わす解はないので、独立とならぬように未知のパラメータ L^*/a_s^* が求まる。

$$
(14)\quad L^*/a_s^*=\varepsilon^{-2},
$$

こゝで η と A の大きさは $O(1)$ とみなした。というのは、これらがたとえ ε によるような量であっても L^*/a_s^* の適当な選び

方によって同一の結果を得るからである。更に1st-orderの方程式系が独立でなくなるには、次の条件が満たされねばならない。

(15) $k=\{X_S(1-X_S)\}^{-1}$.

次に2nd-orderの方程式系を考えると、これもやはり独立ではないが、1st-orderの量の非同次項を有するので意味のある解を得るには、これらの項の間に次の関係式が満たされねばならない。

$$-D\frac{d\rho_1}{d\xi}+\rho_1^2-C_1\rho_1-\frac{1}{X_S}C_1u_0=0,$$

但し、$D=\dfrac{\gamma_1-1}{A}+\dfrac{X_S(1-X_S)}{\eta}$.

これと1st-orderの式から、結局u_0に対する方程式が得られ、

(16) $-D\dfrac{du_0}{d\xi}+\dfrac{u_0^2}{X_S}-2C_1u_0=0$.

境界条件は

(17) $u_0\to1\ (\xi\to-\infty),\quad u_0\to0\ (\xi\to\infty)$,

であって、未知の定数C_1はこの条件を満たすように定まり

(18) $C_1=(2X_S)^{-1}$.

結局、解は次のように求められる。

(19) $u_0=\left[1+\exp\left(\dfrac{\xi}{DX_S}\right)\right]^{-1}$.

従って、衝撃波の厚さδ^*と伝搬速度C^*は次のように表わされる。

(20) $\left\{\delta^*=\dfrac{1}{\varepsilon^2}a_S^*X_S\left\{\dfrac{\gamma_1-1}{A}+\dfrac{X_S(1-X_S)}{\eta}\right\},\right.$

$$\left\{ C^* = \frac{1}{\sqrt{X_s(1-X_s)}}\sqrt{\frac{p_s^*}{\rho_0^*}}\left\{1+\frac{\varepsilon}{2X_s}+O(\varepsilon^2)\right\}.\right.$$

これから、衝撃波の厚さは、動粘性率、熱伝導率が大きくなると共に小さくなることがわかる。これは、粘性、熱伝導が大きいと速度及び温度のずれは短い遷移域においてならされてしまうからである。又、衝撃波は Crespo の調べた低振動数の音波の速さより少し大きい速さで伝わることがわかる。

§4. 衝撃波の形成

この節では、速さ U^* で突然ピストンを動かした時にどのように定常な衝撃波が形成されるかを調べる。このピストン問題に対する初期条件と境界条件は次のように与えられる。

初期条件:
$$\left.\begin{array}{l} X=X_s,\ U_0^*=U_1^*=0, \\ p_0^*=p_s^*,\ \rho_1^*=\rho_{1s}^*,\ T_1^*=T_s^* \end{array}\right\} \text{for } x^*>0,\ t^*=0.$$

$$U_0^*=U^*, \quad \text{for} \quad t^*>0,\ x^*=U^*t^*.$$

境界条件:
$$\left.\begin{array}{l} X\to X_s,\quad U_0^*,\ U_1^*\to 0, \\ p_0^*\to p_s^*,\ \rho_1^*\to\rho_{1s}^*,\ T_1^*\to T_s^* \end{array}\right\} \text{as } x^*\to\infty.$$

ピストンをゆっくり動かすとしてその時に形成される衝撃波の強さを表わす小さなパラメータ ε' を次のようにとる。

(21) $\varepsilon' = U^*/C_0^*, \qquad C_0^{*2} = p_s^*/\rho_0^*.$

前節と同様に従属変数に対して無次元化と ε' 展開を行う。

$$\left\{ X = X_s(1+\varepsilon' X_1+\cdots),\right.$$

$$
(22)\quad
\begin{cases}
v_0^* = \varepsilon' C_0^*(u_0 + \varepsilon' u_1 + \cdots), \\
v_1^* = \varepsilon' C_0^*(v_0 + \varepsilon' v_1 + \cdots), \\
p_0^* = p_s^*(1 + \varepsilon' P_1 + \cdots), \\
\rho_1^* = \rho_{1s}^*(1 + \varepsilon' \rho_1 + \cdots), \\
T_1^* = T_s^*(1 + \varepsilon' T_1 + \cdots).
\end{cases}
$$

更に独立変数はl^*を現象の代表長として次のように無次元化される。

$$(23)\quad x^* = l^* x, \qquad t^* = \frac{l^*}{C_0^*} t.$$

定常な衝撃波の形成前の状態を調べるために、基礎式(1)〜(6)の基づく仮定が破れないようにl^*として次の値をとる。

$$(24)\quad l^* = a_s^*/\varepsilon'.$$

(22)式によって基礎式を線型化し、時間についてLaplace変換、例えば

$$\overline{u}_0(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u_0(x,t)\,dt,$$

を作用させるとこれから$\overline{u}_0$に対する方程式が次のように得られる。

$$(25)\quad \frac{\partial^2 \overline{u}_0}{\partial x^2} - \lambda^2 \overline{u}_0 = 0, \qquad \lambda = p\left[\frac{\dfrac{p+A}{\gamma_1 p + A}(1-X_s)}{\dfrac{1-X_s}{X_s} + \dfrac{\{(1-X_s)+\frac{1}{2}\Gamma\}p+\eta}{\frac{1}{2}\Gamma p + \eta}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

満たされるべき境界条件は

$$(26)\quad \overline{u}_0 = p^{-1} \ \text{for}\ x=0, \qquad \overline{u}_0 \to 0 \ \text{as}\ x \to \infty,$$

であり、従って解は次のようになる。

(27) $\bar{u}_0 = p^{-1} e^{-\lambda x}$.

時間が小さい間の解の近似的な性質は、上式を大きな p に対して展開することにより調べられる。Laplace 逆変換を施すことにより初期の間の解は次のように表わされる。

$$(28)\begin{cases} u_0 = H\left(t - \dfrac{x}{c'}\right) e^{-\frac{D'}{c'}x}, & v_0 = \dfrac{\{(1-X_S) + \Gamma/2\}}{\Gamma/2} u_0, \\ X_1 = -\dfrac{1-X_S}{c' X_S} u_0, & \rho_1 = \dfrac{(1-X_S) c'}{\gamma_1} u_0, \\ P_1 = \gamma_1 \rho_1, & T_1 = (\gamma_1 - 1)\rho_1. \end{cases}$$

但し、$H(x)$ は Heaviside の関数であり、c', D' は

$$c' = \left[\frac{\gamma_1\{\frac{1}{2}\Gamma + X_S(1-X_S)\}}{\frac{1}{2}\Gamma X_S(1-X_S)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad D' = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} A + \frac{X_S(1-X_S)}{\frac{1}{2}\Gamma\{\frac{1}{2}\Gamma + X_S(1-X_S)\}} \eta\right].$$

これから、はじめ波は Crespo の調べた高振動数の音波の速さで伝わり、粘性と熱伝達により減衰しはじめることがわかる。又、気体は等エントロピー的な変化をし、泡は液体より速く動いている。他方、時間が十分経過した時の解のふるまいは (27)式を小さな p に対して展開し、更に最急降下法を用いることにより次のように得られる。

$$(29)\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x - ct}{\sqrt{2c^2 D t}}\right), \quad v_0 = u_0, \\ X_1 = -\dfrac{1-X_S}{c X_S} u_0, \quad \rho_1 = c(1-X_S) u_0, \quad P_1 = \rho_1, \quad T_1 = 0, \end{cases}$$

但し、$c = \{X_S(1-X_S)\}^{-\frac{1}{2}}$, $\quad D = \dfrac{\gamma_1 - 1}{A} + \dfrac{X_S(1-X_S)}{\eta}$.

故に波は滑らかになり、その伝搬速度は定常な衝撃波のものに近づく。又、泡は等温的な変化をする。しかし、衝撃波の

厚さ $\delta^{*\prime} = a_s^* \sqrt{2c^2 D t} / \varepsilon'$ は、時間と共に広がり続ける。これは線型化の効果であって同様のことは、Moran と Shen[2] が調べた通常の気体中の衝撃波の場合にもみられる。そこで考えられたように $\delta^{*\prime}$ が定常な衝撃波の厚さ δ^* に近づいた時、即ち、$t = O(\varepsilon'^{-2})$ の時に、この線型化解が成り立たなくなりはじめると考える。これから先は、波面に注目してどのように波が変化していくかをみるために次のような新しい座標を導入する。

(30) $\tau = \varepsilon'^2 t, \qquad \xi = \varepsilon'(x - ct).$

この座標により基礎式は、記号 tilde をこの新しい領域における量を表わすものとして次のように展開される。

$$
(31)\quad \begin{cases}
\left[X_s c \dfrac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \xi} + (1-X_s)\dfrac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi}\right] + \varepsilon'\left[-X_s \dfrac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \tau} + X_s c \dfrac{\partial \tilde{X}_2}{\partial \xi} + (1-X_s)\dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} - X_s \dfrac{\partial \tilde{X}_1 \tilde{u}_0}{\partial \xi}\right] + \cdots = 0, \\
\left[-c\dfrac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial \xi} - c\dfrac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \xi}\right] + \varepsilon'\left[\dfrac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial \tilde{\rho}_2}{\partial \xi} - c\dfrac{\partial \tilde{X}_1 \tilde{\rho}_1}{\partial \xi} - c\dfrac{\partial \tilde{X}_2}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi} \right. \\
\qquad \left. + \dfrac{\partial \tilde{v}_0 \tilde{X}_1}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \tilde{v}_0 \tilde{\rho}_1}{\partial \xi}\right] + \cdots = 0, \\
\left[\eta(\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0)\right] + \varepsilon'\left[\dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \xi} + \dfrac{\Gamma}{2} c \dfrac{\partial(\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0)}{\partial \xi} + \eta\left(\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1 + \dfrac{2}{3}\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_0 - \dfrac{2}{3}\tilde{\rho}_1 \tilde{v}_0\right)\right] + \cdots = 0, \\
\left[-(1-X_s)c\dfrac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \xi}\right] + \varepsilon'\left[(1-X_s)\dfrac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tau} - (1-X_s)c\dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} + X_s c \tilde{X}_1 \dfrac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi} \right. \\
\qquad \left. + (1-X_s)\tilde{u}_0 \dfrac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \tilde{P}_2}{\partial \xi}\right] + \cdots = 0, \\
\left[A\tilde{T}_1\right] + \varepsilon'\left[-c\dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \xi} + \gamma_1 c \dfrac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial \xi} + A\left(\tilde{T}_2 + \dfrac{2}{3}\tilde{\rho}_1 \tilde{T}_1\right)\right] + \cdots = 0, \\
\left[\tilde{P}_1 - \tilde{\rho}_1 - \tilde{T}_1\right] + \varepsilon'\left[\tilde{P}_2 - \tilde{\rho}_2 - \tilde{T}_2 - \tilde{\rho}_1 \tilde{T}_1\right] + \cdots = 0.
\end{cases}
$$

この 1st-order の方程式は互いに独立ではなく線型化解(29)と全く同じ、各々の量の間の関係式を得る。2nd-order の方程式系も

やはり独立ではないが，非同次であるので意味のある解とするのにこれらの非同次項の間にある関係式が成り立たねばならない。その結果，$\widehat{u}_0$に対する方程式が得られ，

$$\frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \tau} + \frac{1}{X_s}\widehat{u}_0 \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \xi} = \frac{D}{2X_s(1-X_s)}\frac{\partial^2 \widehat{u}_0}{\partial \xi^2}, \tag{32}$$

即ち，時間が十分経過した時の解は，Burgers' eq.によって支配される。Moran と Shen に従って線型化解(29)と接続する解を求めると

$$\widehat{u}_0 = \left[1 + \exp\left\{\frac{1-X_s}{D}\left(\xi - \frac{\tau}{2X_s}\right)\right\} \frac{\operatorname{erfc}\left\{\dfrac{-\xi}{\sqrt{\dfrac{2D}{X_s(1-X_s)}\tau}}\right\}}{\operatorname{erfc}\left\{\dfrac{\xi - \dfrac{\tau}{X_s}}{\sqrt{\dfrac{2D}{X_s(1-X_s)}\tau}}\right\}} \right]^{-1}, \tag{33}$$

となり，これは$\tau \to \infty$の時に，前節で求めた定常解を与えることは容易に確かめられる。

§5. まとめ

多くの小さな泡を含んだ液体中の弱い衝撃波の定常及び非定常問題を Crespo の用いた簡単なモデルにより解析した。

定常な衝撃波の構造を求めるにあたって基礎式を衝撃波の強さを表わす小さなパラメータεのべきで展開したが，非線型効果を導入するために 1st-order の方程式系が独立でなくなるように，はじめ未知であった音速と衝撃波の厚さが定められた。遷移域の巾は，二相の間の粘性，熱伝達の効果を表わすパラメータの逆数の和に比例しており，これらの効果が大

きければ巾は小さくなる。又、泡の半径に基づくReynolds数が$O(1)$だとすると衝撃波の厚さは、泡の半径のε^{-2}倍の程度である。

一方、非定常問題については、ピストンを急に動かした場合はじめは急激な変化のため、泡は液体より速く動き、又、熱伝達がほとんど行われないために泡は等エントロピー的に変化をするが、粘性と熱伝達により波は減衰しはじめている。時間が経つと粘性と熱伝達の効果で、波は十分滑らかで泡はほゞ液体と共に動くようになり、中の気体は等温的な変化をする。波の伝搬速度も定常衝撃波のものに近づくが、線型効果のために波の巾は時間と共に広がり続ける。そこでこれが定常衝撃波の巾に近づいた時に線型化が成り立たなくなるとして新しい領域を考えた結果、波はBurgers' eq. を通して定常な衝撃波に発展することが示された。

文献

1) A. Crespo : Phys. Fluids 12 (1969) 2274

2) J.P. Moran & S.F. Shen : J. Fluid Mech. 25 (1966) 705