数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 56-106



# 輸送方程式の作用素論的取扱い

京大 教養　浅野 潔
京大 工　鵜飼 正二
奈良女大理　静田 靖

いわゆる中性子の輸送方程式として考察されているいくつかの方程式ー初期値境界値問題ーを，作用素論的な方法で取扱うことがここでの目標である。方法を要約すれば，かなり特殊な条件をみたす作用素の半群に対して，ある種の摂動を与えたときに得られる作用素の半群の性質を調べる，ということになるが，この過程をいくらか抽象的に行なうことによって，これまでに知られている結果よりも，いくらかよい結果を多少見通しよく得ることができるように思われる。

始めに輸送方程式の例をあげておこう。

(I)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u(t,x,\mu')\,d\mu' & t>0,\ |x|\le a \\ u = u(t,x,\mu) \in L^2_{(x,\mu)} = L^2_x(-a,a)\otimes L^2_\mu(-1,1) & \\ u(0,x,\mu) = u_0(x,\mu) & \text{初期条件} \\ \left.\begin{array}{ll} u(t,-a,\mu) = \alpha\, u(t,a,\mu), & \mu>0 \\ u(t,a,\mu) = \alpha\, u(t,-a,\mu), & \mu<0 \end{array}\right\} & \text{境界条件} \end{cases}$$

ただし $-1 \leq \alpha \leq 1$ であるが，通常は $\alpha = 0\ (\pm 1)$ の場合のみを考えることになっている。

(Ⅱ)
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = -s\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} - \sigma(s)u \\
\qquad\qquad + \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^\infty K(s,s')\, u(t,x,s',\mu')\, ds' \\
u = u(t,x,s,\mu) \in L^2_{(x,s,\mu)}\left((-a,a)\times(0,\infty)\times(-1,1)\right) \\
u(0,x,s,\mu) = u_0(x,s,\mu) \cdots\cdots \text{初期条件} \\
\left.\begin{array}{l} u(t,-a,s,\mu) = 0, \quad \mu > 0 \\ u(t,a,s,\mu) = 0, \quad \mu < 0 \end{array}\right\} \text{境界条件},
\end{cases}
$$

(Ⅲ)
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = -(\omega\cdot\nabla_x)u + \dfrac{\kappa}{4\pi}\displaystyle\int_{S^2} K(x,\omega,\omega')\, u(t,x,\omega')\, dS_{\omega'} \\
\qquad x \in \Omega\ (\text{有界凸領域} \subset \mathbb{R}^3),\ S^2 = \text{単位球面} \\
u = u(t,x,\omega) \in L^2_{(x,\omega)}(\Omega \times S^2) \\
u(0,x,\omega) = u_0(x,\omega) \cdots\cdots \text{初期条件} \\
u(t,y,\omega) = 0, \quad y \in \partial\Omega,\ (n_y,\omega) < 0 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \text{境界条件}.
\end{cases}
$$

上の問題はいずれも，もう少し複雑な方程式になんらかの単純化を行なって得られるのであるが，ここではそうした議論には立入らない。またこの小論では，問題(Ⅰ)のみを取扱うことにするが，われわれの方法は，問題(Ⅱ)，(Ⅲ)に対しても適用可能である。問題(Ⅰ)を抽象的（作用素論的）な枠組

に移す手順は，次のとおりである。

$$\begin{cases} \mathcal{H} = L^2(-a, a) \\ \mathcal{D}(L) = \{ u \in \mathcal{H} ;\ -\frac{d}{dx}u \in \mathcal{H},\ u(-a) = \alpha u(a) \} \\ L = -\frac{d}{dx} \end{cases}$$

とおく。$L$は$\mathcal{H}$において maximal dissipative な作用素になり，従って縮小半群を生成するが，さらに次の評価

$$\| e^{tL} \| \leq \alpha^{\left[\frac{t}{2a}\right]}$$

をもつ。とくに$\alpha = 0$のときは

$$e^{tL} = 0, \quad t \geq 2a.$$

さらに

$$\mathcal{G} = L^2_\mu((-1,1) ; \mathcal{H}) = L^2_\mu((-1,1)) \otimes \mathcal{H}$$

$$A(\mu) = \begin{cases} \mu L, & 0 \leq \mu \leq 1 \\ -\mu L^*, & -1 < \mu < 0 \end{cases}$$

とおくと，$A(\mu)$も$\mathcal{H}$における maximal dissipative な作用素であって，$A(-\mu) = A(\mu)^*$をみたす。$\mathcal{G}$における作用素$A$を次のように定義する：

(1) $$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{ u = u(\mu) \in \mathcal{G} ;\ \underbrace{A(\mu) u(\mu) \in \mathcal{G}}_{(u(\mu) \in \mathcal{D}(A(\mu)) \text{ for a.e. } \mu \text{ かつ})} \}, \\ (Au)(\mu) = A(\mu) u(\mu). \end{cases}$$

$A$は$\mathcal{G}$における maximal dissipative な作用素になる。摂動項は次のように考える。ある条件をみたす scalar 関数 $k(\mu)$

（条件は後述，(I) の場合は $h(\mu)\equiv 1/\sqrt{2}$ ）に対して，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}$ への有界作用素 $H^*$ を，次のように定義する：

(2) $$H^*:\ \mathcal{G}\ni u(\mu)\longmapsto H^*u=\int_{-1}^{1}\overline{h(\mu)}u(\mu)\,d\mu\in\mathcal{H}.$$

$(H^*)^*=H$ とかくことにすると

(2)′ $$H:\ \mathcal{H}\ni v\longmapsto (Hv)(\mu)=h(\mu)v\ \in\mathcal{G}.$$

$\kappa HH^*$ は $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への有界作用素となるが，これを摂動項として

(3) $$B=A+\kappa HH^*\quad(\kappa>0),\quad \mathcal{D}(B)=\mathcal{D}(A)$$

とおけば，(I) は次のような発展方程式の形にかける：

(I)′ $$\frac{d}{dt}u=Bu\ ,\quad u(0)=u_0\ .$$

$B$ が $\mathcal{G}$ において作用素の半群を生成することは明らかであるから，問題 (I) は関数解析的な枠組によって，ひとまず解けている。われわれの目標は，$B$ の spectre 的な性質，および (I)′ の解 $e^{tB}u_0$ の漸近的な挙動を調べることである。

## §1　問題の設定

いくらか一般的に問題を設定しなおしてみよう。$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間，$\mathcal{H}$ におけるノルムを $\|\ \|$，内積を $(\ ,\ )$ とする。$L$ は $\mathcal{H}$ における（閉）作用素（定義域 $\mathcal{D}(L)$ ）で，次の条件をみたすものとしよう：

(L.1)　　$L$ は maximal dissipative，

(L.2)　　$L$の生成する半群 $U(t)=e^{tL}$ は次の評価式をみたす：

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad (\alpha>0) \quad \text{または}$$
$$U(t)=0 \quad (t \geq a>0),$$

(L.3)　　ある $\lambda_0$ に対して $(\lambda_0-L)^{-1}$ が compact 作用素,

(L.4)　　$\mathrm{Re}\,L^{-1}=\dfrac{L^{-1}+L^{-1*}}{2}=N$ は finite rank.

ときには，条件 (L.2) の代わりに，次の条件

(L.2′)　　$U(t)=e^{tL}$ は unitary 群 (i.e. $L$ = skew self-adj.)

をおくこともあるが，以下では一応，条件 (L.1)－(L.4) の下で考えることにする。

次に $\mathcal{M}=[-1,1]$, $\mathfrak{Y}=L^2(\mathcal{M};\mathcal{H})=L^2(\mathcal{M})\otimes\mathcal{H}$ とおき，$\mathfrak{Y}$ における作用素 $A=(A(\mu))$ を (1) と同様に定義すると，$A$ は $\mathfrak{Y}$ において maximal dissipative である。$\mathfrak{Y}$ から $\mathcal{H}$ への作用素 H は，(2) によって定義するが，ここで関数 $h(\mu)$ に関する条件を述べておこう：

(H.1)　　$|h(\mu)|=|h(-\mu)|$, $\int_{-1}^{1}|h(\mu)|^2d\mu=1$,

(H.2)　　$|h(\mu)|$ は 区間 $[0,1]$ で単調減少,

(H.3)　　$|h(0)|^2-|h(\mu)|^2=O(\mu^{\varepsilon_0})$, $\underbrace{(\mu\to 0 \text{ のとき})}_{(0<\varepsilon_0<1)}$,

(H.4)　　$h(\mu)\in C^0(\mathcal{M})$.

われわれの問題は，(3) によって定義される $\mathfrak{Y}$ の作用素 B (ただし $K>0$ とする) のスペクトルおよび半群 $e^{tB}$ の性質

を調べるという問題になる。念のため，Bの形を書くと，

$$B = A + \kappa H H^* \quad (\kappa > 0), \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$$

または

$$(Bu)(\mu) = A(\mu)u(\mu) + \kappa h(\mu)\int_{-1}^{1} \overline{h(\mu')}\, u(\mu')\, d\mu' .$$

上の問題を，少し違った枠組によって解くことを考えてみよう。まず次の定理を用意する。

定理　$\mathcal{H}$をヒルベルト空間，$L$を$\mathcal{H}$における maximal dissipative な閉作用素とすると，

(i)　自己共役作用素の族 $\{F(\lambda)\}_{\lambda=-\infty}^{\infty}$ で，次の性質をみたすものが存在する：

$$\begin{cases} F(\lambda) \text{ は単調増加 i.e. } \lambda < \lambda' \Rightarrow F(\lambda) \leq F(\lambda') \\ F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1 \\ (iL - z)^{-1} = \int \dfrac{1}{\lambda - z}\, dF(\lambda) \quad (\mathrm{Im}\, z > 0) \text{ (弱収束).} \end{cases}$$

(ii)　上のような$\mathcal{H}$，$\{F(\lambda)\}$に対して，$\mathcal{H}$を含む（最小の）ヒルベルト空間$\mathcal{H}_0$と，$\mathcal{H}_0$におけるスペクトル分解$\{F_0(\lambda)\}$とが存在して，$\mathcal{H}_0$から$\mathcal{H}$への正射影を$J$とすると，

$$F(\lambda) = J F_0(\lambda) J^* .$$

上の定理によって存在が保証された$\mathcal{H}_0$と$F_0(\lambda)$を用いて

$$\mathfrak{H}_0 = L^2(\mathcal{M};\mathcal{H}_0) = L^2(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{H}_0 \overset{J}{\supset} \mathfrak{H}$$

$$iL_0 = \int s\, dF_0(s)$$

$$A_0 = (A_0(\mu)), \quad A_0(\mu) = \mu L_0 \quad (\mu \in \mathcal{M})$$

とおき，$\mathfrak{F}_0$ から $\mathcal{H}_0$ への作用素 $H_0^*$（摂動項）を

(2)。 $$H_0^* : \mathfrak{F}_0 \ni u(\mu) \longmapsto H_0^* u = \int_{-1}^{1} \overline{h(\mu)}\, u(\mu)\, d\mu \in \mathcal{H}_0$$

によって定義しよう（$(H_0^*)^* = H_0$ とする）。

(3)。 $$B_0 = A_0 + \kappa H_0 J^* J H_0^* \qquad (\kappa > 0)$$

$$= A_0 + \kappa \tilde{J}^* H H^* \tilde{J}, \qquad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_0)$$

によって定義される（$\mathfrak{F}_0$ の）作用素 $B_0$ のスペクトルや $B_0$ の生成する作用素の群 $e^{tB_0}$ の性質を調べること，$A_0$ と $B_0$ の間の（非自己共役的）散乱などが，この枠組で考えられる問題である。

作用素 $A$ と $A_0$，$B$ と $B_0$ の関係について，次のことに注意する。まず

$$(\lambda - L)^{-1} = J(\lambda - L_0)^{-1} J^* \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0),$$

$$(\lambda - L^*)^{-1} = J(\lambda + L_0)^{-1} J^* \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0),$$

$$e^{tL} = J e^{tL_0} J^* \quad (t \geq 0),$$

$$e^{tL^*} = J e^{-tL_0} J^* \quad (t \geq 0)$$

は明らかに成り立つ。これから

(4) $$e^{tA} = \hat{J} e^{tA_0} \hat{J}^*, \quad e^{tA^*} = \hat{J} e^{-tA_0} \hat{J}^* \quad (t \geq 0),$$

(5) $$(\lambda - A)^{-1} = \hat{J}(\lambda - A_0)^{-1} \hat{J}^* = \int \frac{1}{\lambda + i\mu s}\, dF(s) \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0).$$

さらに

$$(6)_0 \qquad (\lambda - B_0)^{-1} = (\lambda - A_0)^{-1} + \kappa(\lambda - A_0)^{-1}\tilde{J}^* H H^* \tilde{J}(\lambda - B_0)^{-1},$$

$$(6) \qquad (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} + \kappa(\lambda - A)^{-1} H H^* (\lambda - B)^{-1}$$

より

$$(7)_0 \qquad G_0(\lambda) = H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}\tilde{J}^* H \quad (\mathrm{Re}\,\lambda \gtrsim 0),$$

$$(7) \qquad G(\lambda) = H^*(\lambda - A)^{-1} H \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$$

とおくと

$$(8) \qquad G_0(\lambda) = G(\lambda) \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0),$$

$$\{1 - \kappa G_0(\lambda)\} H^*\tilde{J}(\lambda - B_0)^{-1} = H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1},$$

$$\{1 - \kappa G(\lambda)\} H^*(\lambda - B)^{-1} = H^*(\lambda - A)^{-1}.$$

以上より

$$(9)_0 \qquad (\lambda - B_0)^{-1} = (\lambda - A_0)^{-1} + \kappa(\lambda - A_0)^{-1}\tilde{J}^* H \{1 - \kappa G_0(\lambda)\}^{-1} H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1},$$

$$(9) \qquad (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} + \kappa(\lambda - A)^{-1} H \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^*(\lambda - A)^{-1}$$

が示されるので，次の関係も成り立つ：

$$(10) \qquad (\lambda - B)^{-1} = \tilde{J}(\lambda - B_0)^{-1}\tilde{J}^* \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0).$$

これまでの議論から，次の定理は明らかであろう：

定理 1. $B_0$ は $\mathfrak{H}_0$ において作用素の群 $e^{tB_0}$ を生成し，$B$ は $\mathfrak{H}$ において作用素の半群 $e^{tB}$ を生成する。さらに

$$(11) \qquad e^{tB} = \tilde{J} e^{tB_0} \tilde{J}^* \quad (t \geq 0),$$

$$e^{tB^*} = \tilde{J} e^{tB_0^*} \tilde{J}^* \quad (t \geq 0).$$

## §2　$G_0(\lambda)$ と $G(\lambda)$ の性質

作用素 B や $B_0$ の性質を知るために，$G(\lambda)$ や $G_0(\lambda)$ の性質を知ることが重要であろうことは，前節(9)，$(9)_0$ などからも明らかである。そこで $G_0(\lambda)$ および $G(\lambda)$ の性質を調べてみよう。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における有界作用素の全体を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$，compact 作用素の全体を $\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ で表わす。いずれも作用素のノルムによってバナッハ空間となる。

補助定理 1（$G_0(\lambda)$ と $G(\lambda)$ の性質）

(i)　$G_0(\lambda)$ は $\mathbb{C}_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,\lambda \gtrless 0\}$ において $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の値をとる解析関数で，$G_0(-\bar{\lambda}) = -G_0(\lambda)^*$ をみたす。また $G(\lambda)$ は $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ で $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の値をとる解析関数で，$G_0(\lambda) = G(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C}_+)$ をみたす。

(ii)　$\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ に対して，$(\lambda - B_0)^{-1} \in \mathbb{B}(\mathfrak{H}_0)$ が存在する必要十分条件は $(1 - \kappa G_0(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在すること。$\lambda \in \mathbb{C}_+$ に対して，$(\lambda - B)^{-1} \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ が存在する必要十分条件は $(1 - \kappa G(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在すること。

(iii)　$0 < \mathrm{Re}\,G(\lambda) = \frac{1}{2}\{G(\lambda) + G(\lambda)^*\} < \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$，かつ $\mathrm{Im}\,\lambda \gtreqless 0$ に従って $\mathrm{Im}\,G(\lambda) = \frac{1}{2i}\{G(\lambda) - G(\lambda)^*\} \lesseqgtr 0$.

(iv)　$0 < \beta < \beta'$ に対して $G(\beta) > G(\beta') > G(+\infty) = 0$. $u \neq 0$，$\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ に対して $\mathrm{Im}\,(G(\lambda)u, u) \neq 0$.

(v)　$G(\lambda)$ は compact 作用素。

(vi) $\lambda \in \mathbb{C}_+ - \mathbb{R}_+$ （$\mathbb{R}_+$ = 正の実数の全体） に対して $(1-\kappa G(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。また $\mathbb{R}_+$ の高々 discrete な有界集合の点 $\beta$ を除き，$(1-\kappa G(\beta))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。

(vii) $G(\lambda)$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ のノルムで $\overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}$ で連続，かつ

$$(12) \qquad 0 \leq \mathrm{Re}\, G(\beta+i\gamma) \leq \frac{1}{|\gamma|}(1+2\pi|h(0)|^2),$$

$$\mathrm{Im}\, G(\beta+i\gamma) \gtrless 0 \quad (\gamma \gtrless 0,\ \beta \geq 0 \text{ のとき}).$$

(viii) $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して $(1-\kappa G(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。任意の $\delta > 0$ に対して，$C_{\kappa,\delta} > 0$ が存在して

$$(12)' \qquad \|(1-\kappa G(\lambda))^{-1}\| \leq C_{\kappa,\delta}, \quad |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq \delta .$$

証明. (i), (ii) は明らか。(iii) については (5) より

$$(13) \qquad G(\lambda) = H^*(\lambda-A)^{-1}H = \int_{-\infty}^{\infty} dF(s) \int_{-1}^{1} \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda+i\mu s}\, d\mu$$

であり，$\lambda = \beta + i\gamma$ $(\in \mathbb{C}_+)$ とおくと，(H.1) より

$$\mathrm{Re} \int_{-1}^{1} \frac{|h(\mu)|^2}{\lambda+i\mu s}\, d\mu = \int_{-1}^{1} \frac{\beta\, |h(\mu)|^2}{\beta^2+(\gamma+\mu s)^2}\, d\mu \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$$

であるから

$$0 < \mathrm{Re}\, G(\lambda) < \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} .$$

(13) より

$$\mathrm{Im}\, G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(s) \int_{-1}^{1} \frac{-(\gamma+\mu s)|h(\mu)|^2}{\beta^2+(\gamma+\mu s)^2}\, d\mu ,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\gamma+\mu s)|h(\mu)|^2}{\beta^2+(\gamma+\mu s)^2}\, d\mu = \int_{-|s|}^{|s|} \frac{\gamma+\mu}{\beta^2+(\gamma+\mu)^2} \left|h\left(\frac{\mu}{|s|}\right)\right|^2 \frac{d\mu}{|s|}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mu}{\beta^2+\mu^2} \left\{ \left|h\left(\gamma-\frac{\mu}{|s|}\right)\right|^2 - \left|h\left(\gamma+\frac{\mu}{|s|}\right)\right|^2 \right\} \frac{d\mu}{|s|} ,$$

ただし (H.1)：$|h(\mu)| = |h(-\mu)|$ を用い，$h(\mu) = 0$ $(|\mu| > 1)$ とした。蛇足だが $\left|h\left(\frac{\mu}{|s|}\right)\right|^2 \frac{d\mu}{|s|} \longrightarrow \delta(0)$ $(|s| \to 0)$ だから，上の

変形は $s=0$ まで有効である。(H.2) : $|h(\mu)|$ は $[0,1]$ で単調減少より, $\gamma \gtrless 0$ に従って $\{\qquad\} \gtrless 0$ であるから, (iii)の後半は示された。(iii) と関数論的議論を合わせて, (iv)を得る。(vi) は (iv) と (v) から, (viii) は (vii) と (v) から得られるので, (v) と (vii) とを示せばよい。(v) は次の補助定理2から得られる。

補助定理2. $\varphi(s)$ を $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ で定義された有界連続関数で $\varphi(s)>0$ とする。$\Phi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,dF(s)\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ (compact 作用素) とする。このとき, $\mathbb{R}$で定義された複素数値有界 Borel 可測関数 $\psi(s)$ が, $\lim_{|s|\to\infty}\psi(s)=0$ をみたすならば, $\Psi=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\,dF(s)\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$.

(v) の証明. (L.3) より任意の $\lambda$ ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) に対して $(\lambda-L)^{-1}\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$. 故に $\beta>0$ に対して

$$\mathrm{Re}\,(\beta-L)^{-1}=\int\frac{\beta}{\beta^2+s^2}\,dF(s)\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

(13) において $\int_{-1}^{1}\frac{|h(\mu)|^2}{\lambda+i\mu s}\,d\mu$ は, $s$ につき連続, かつ $\longrightarrow 0$ ($|s|\to\infty$ のとき) であるから, 補助定理2より

$$G(\lambda)=\int dF(s)\int_{-1}^{1}\frac{|h(\mu)|^2}{\lambda+i\mu s}\,d\mu\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

(vii) を示すために, $G(\lambda)$の表示式をいくらか変形しよう:

$$\int_{-1}^{1}\frac{|h(\mu)|^2}{\lambda+i\mu s}\,d\mu=\int_{-|s|}^{|s|}\frac{|h(\frac{\mu}{s})|^2}{\lambda+i\mu}\,\frac{d\mu}{|s|}$$

であるから（ $F(\Lambda)$ が $\Lambda=0$ の近傍で絶対連続ならば）

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\Lambda)\int_{-|\Lambda|}^{|\Lambda|} \frac{|h(\frac{\mu}{\Lambda})|^2}{\lambda+i\mu}\,\frac{d\mu}{|\Lambda|}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\lambda+i\mu}\int_{|\Lambda|\geq|\mu|} |h(\tfrac{\mu}{\Lambda})|^2\frac{1}{|\Lambda|}\,dF(\Lambda)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda+i\mu}\,g(\mu)\,d\mu ,$$
$$g(\mu) = \int_{|\Lambda|\geq|\mu|} |h(\tfrac{\mu}{\Lambda})|^2\frac{1}{|\Lambda|}\,dF(\Lambda) = g(-\mu) .$$

上で定義した $g(\mu)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$（実は $\in\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$）は，自己共役作用素であるが，明らかに次の性質をもつ：

(14)
$$\begin{cases} 0 \leq g(\mu) = g(-\mu) \leq \dfrac{1}{|\mu|}|h(0)|^2 , \\ g(\mu)\ \text{は}\ (0,\infty)\ \text{で単調減少}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\mu)\,d\mu = 1 \quad (\mathcal{H}\ \text{の弱位相で}). \end{cases}$$

これから，たとえば $\gamma>0$ とすると，

$$\mathrm{Re}\,G(\beta+i\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{\beta^2+(\gamma+\mu)^2}\,g(\mu)\,d\mu$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}\gamma}+\int_{-\frac{1}{2}\gamma}^{\infty}\right)\frac{\beta}{\beta^2+(\gamma+\mu)^2}\,g(\mu)\,d\mu + \int_{-\frac{3}{2}\gamma}^{-\frac{1}{2}\gamma}\cdots$$
$$\leq \int \frac{1}{2}\frac{2}{\gamma}\,g(\mu)\,d\mu + \int\frac{\beta}{\beta^2+(\gamma+\mu)^2}\,g(-\tfrac{\gamma}{2})\,d\mu$$
$$\leq \frac{1}{\gamma} + \pi g(-\tfrac{\gamma}{2}) \leq \frac{1}{\gamma}(1+2\pi|h(0)|^2) .$$

同様に

$$\mathrm{Im}\,G(\beta+i\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(\gamma+\mu)}{\beta^2+(\gamma+\mu)^2}\,g(\mu)\,d\mu$$
$$= \int_{0}^{\infty}\frac{-\mu}{\beta^2+\mu^2}\{g(\gamma-\mu)-g(\gamma+\mu)\}\,d\mu$$

であるから，ある $\gamma>0$ に対して $\mathrm{Im}\,G(+0+i\gamma)$ が存在して，$g(\mu)$ が $\gamma$ で連続ならば，

$$\mathrm{Im}\,G(+0+i\gamma) = \mathrm{v.p.}\int_{0}^{\infty}\frac{-1}{\mu}\{g(\gamma-\mu)-g(\gamma+\mu)\}\,d\mu .$$

いま $\{g(\gamma-\mu)-g(\gamma+\mu)\}\geq 0$ は (14) より明らかであるが，ある $v\in\mathcal{H}$ に対して $(\{g(\gamma-\mu)-g(\gamma+\mu)\}v, v)\equiv 0$ とすると，(14) より $(g(\mu)v,v)\equiv 0$。$(v,v)=\int(g(\mu)v,v)\,d\mu=0$ となる。故に $v\neq 0$ ならば $(I_m G(+0+i\gamma)v,v)<0$。

以上の議論から，$G(\lambda)$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の位相で $\overline{C}_+-\{0\}$ に連続的に延長されることを示せば，(vii) の証明は完成することがわかる。そのために $G(\lambda)$ をもう少し書きかえてみよう。

$$G(\lambda) = H^*(\lambda-A)^{-1}H\ ,$$

$$(\lambda-A)^{-1} = \begin{cases}(\lambda-\mu L)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}-L\right)^{-1} & (\mu>0),\\ (\lambda+\mu L^*)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+L^*\right)^{-1} & (\mu<0)\end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_0^1 \frac{|h(\mu)|^2}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}-L\right)^{-1}d\mu + \int_{-1}^0\frac{|h(\mu)|^2}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+L^*\right)^{-1}d\mu\\ &= \int_0^1\frac{|h(\mu)|^2}{\mu}\left\{\left(\frac{\lambda}{\mu}-L\right)^{-1}+\left(\frac{\lambda}{\mu}-L^*\right)^{-1}\right\}d\mu\\ &= \int_0^\infty\{e^{tL}+e^{tL^*}\}dt\int_0^1\frac{|h(\mu)|^2}{\mu}e^{-\frac{\lambda}{\mu}t}\,d\mu. \end{aligned}$$

ただし $\left(\frac{\lambda}{\mu}-L\right)^{-1}=\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{\mu}t}e^{tL}\,dt$ などを用いた。

$$\begin{aligned}\hat{E}(z) &= \int_0^1\frac{|h(\mu)|^2}{\mu}e^{-\frac{z}{\mu}}\,d\mu \quad (\mathrm{Re}\, z>0)\\ &= |h(0)|^2\int_0^1\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu}d\mu - \int_0^1\{|h(\mu)|^2-|h(0)|^2\}\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu}d\mu\\ &= |h(0)|^2\{E(z)-E_1(z)\}\end{aligned}$$

とおくと，$E(z)$ はいわゆる exponential integral で

$$E(z) = \int_1^{\infty}\frac{e^{-z\mu}}{\mu}d\mu = -\log z - C + E_0(z).$$

ここに $b$ は Euler の定数。$E_0(z)$ は $z$ の整数で，$E_0(0)=0$，$|E_0(z)| \le e^{|z|}$ である。さらに，$z, z' \in \overline{\mathbb{C}}_+$ に対しては

$$(15)\qquad \begin{cases} |E_0(z)| \le 3\log(1+|z|), \\ |E_0(z)-E_0(z')| \le 3|z-z'|. \end{cases}$$

次に $|h(\mu)|^2-|h(0)|^2=-|h(0)|^2\mu^{\varepsilon_0}\varphi(\mu)$ $(\mu\ge 0)$ とおくと，$0\le\varphi(\mu)\le b_1$ であるから

$$(16)\qquad \begin{aligned} E_1(z) &= \int_0^1 \mu^{\varepsilon_0}\varphi(\mu)\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}}{\mu}d\mu = \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{e^{-z\mu}}{\mu^{\varepsilon_0+1}}d\mu, \\ |E_1(z)| &\le \int_0^1 b_1\mu^{\varepsilon_0-1}d\mu = \frac{b_1}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

すなわち $E_1(z)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+$ で有界連続である。さらに

$$|e^{-s}-e^{-s'}| \le \frac{3|s-s'|}{1+|s-s'|} \qquad (s, s' \in \overline{\mathbb{C}}_+)$$

より $E_1(z)$ の $\overline{\mathbb{C}}_+$ における一様 Hölder 連続性が導かれる：

$$(17)\qquad \begin{aligned} |E_1(z)-E_1(z')| &\le \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{|e^{-z\mu}-e^{-z'\mu}|}{\mu^{\varepsilon_0+1}}d\mu \\ &\le b_1\int_1^\infty \frac{1}{\mu^{\varepsilon_0+1}}\frac{3\mu|z-z'|}{1+\mu|z-z'|}d\mu \\ &= 3b_1\int_{|z-z'|}^\infty |z-z'|^{\varepsilon_0}\frac{1}{\mu^{\varepsilon_0}(1+\mu)}d\mu \le \frac{6b_1}{\varepsilon_0}|z-z'|^{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

以上の計算から

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_0^\infty \{e^{tL}+e^{tL^*}\}\widetilde{E}(\lambda t)\,dt \\ &= \int_0^\infty 2\,\mathrm{Re}\,e^{tL}|h(0)|^2\{-\log(\lambda t)-b+E_0(\lambda t)-E_1(\lambda t)\}dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= 2|h(0)|^2\int_0^\infty \mathrm{Re}\,e^{tL}\{-\log(\lambda t)-b-E_1(0)\}dt \\ &= -2|h(0)|^2\{\log\lambda+b+E_1(0)\}N-2|h(0)|^2\int_0^\infty \mathrm{Re}\,e^{tL}\log t\,dt \end{aligned}$$

$\left(N=\mathrm{Re}\,L^{-1}=\dfrac{L^{-1}+L^{*-1}}{2}=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{Re}\,e^{tL}dt \ : \text{finite rank}\right)$,

$$G_0(\lambda) = 2|h(0)|^2\int_0^\infty \mathrm{Re}\,e^{tL}E_0(\lambda t)\,dt,$$

$$G_1(\lambda) = -2|h(0)|^2 \int_0^\infty \mathrm{Re}\, e^{tL} \{E_1(\lambda t) - E_1(0)\}\, dt$$

とおくと，(L.2)，(15) および (16) から，$K(\lambda)$，$G_0(\lambda)$ および $G_1(\lambda)$ における被積分関数の作用素のノルムが可積分となり，積分は $\mathcal{H}$ で強収束する。$K(\lambda)$ は $\mathbb{C}-\overline{\mathbb{R}}_-$ で（$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の値をとる）解析関数となり，$G_0(\lambda)$ および $G_1(\lambda)$ は，$\overline{\mathbb{C}}_+$ で定義され，$\mathbb{C}_+$ で解析的な（$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の値をとる）関数である。さらに，(L.2)，(15) および (17) から，$G_0(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+$ で $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の位相で Lipschitz 連続，$G_1(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+$ で $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の位相で $\varepsilon_0$-Hölder 連続であることがわかる：

$$\|G_0(\lambda) - G_0(\lambda')\| \le c_0 |\lambda - \lambda'|,$$

$$\|G_0(\lambda)\| \le c_0 |\lambda|, \le c_0' \log(1+|\lambda|),$$

$$\|G_1(\lambda) - G_1(\lambda')\| \le c_1 |\lambda - \lambda'|^{\varepsilon_0},$$

$$\|G_1(\lambda)\| \le c_1 |\lambda|^{\varepsilon_0}.$$

これで $G(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}$ において $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の位相で連続な関数（実は $\varepsilon_0$-Hölder 連続）となることがわかったので，(vii) の証明は完了した．（$\mathrm{Re}\, G(+0+i\gamma) = \pi g(-\gamma)$ に注意）。

$G(\lambda)$ についてもう少し調べてみよう。次のようにおく：

$$h^* = 2|h(0)|^2 \quad (\ge \tfrac{1}{2}),$$

$$K = K(1) = -h^*(\gamma + E_1(0))N - h^* \int_0^\infty \mathrm{Re}\, e^{tL} \log t\, dt,$$

$$K(\lambda) = -h^* \log\lambda\, N + K, \quad (N = \mathrm{Re}\, L^{-1} \ge 0),$$

$$H(\lambda) = \lambda^{-\varepsilon_0}\{G_0(\lambda) + G_1(\lambda)\}, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}.$$

ただし $\lambda^{\varepsilon_0}$ は $\lambda > 0$ のとき $\lambda^{\varepsilon_0} > 0$ となる分枝をとる。

$$(18) \qquad \begin{cases} G(\lambda) = K(\lambda) + \lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda), \\ \|H(\lambda)\| \leq c_2, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\} \end{cases}$$

などが成り立つ。さらに次のことがいえる：

補助定理3. $G(\lambda)$ の分解 (18) において

(i) $K, K(\lambda), H(\lambda) \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}$,

(ii) $\lambda > 0$ のとき $K(\lambda), H(\lambda)$ は自己共役作用素,

(iii) $\varepsilon_0$ は有理数としても一般性を失わない。

証明. (ii), (iii) は明らか。(i) を示すためには,

$$K_\infty = \int_0^\infty \mathrm{Re}\, e^{tL} \log t \, dt \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$$

を示せばよい。

$$K_n = \int_0^n \mathrm{Re}\, e^{tL} \log t \, dt$$

とおくと, (L.2) より $n \to \infty$ のとき

$$\|K_\infty - K_n\| \leq \int_n^\infty \|\mathrm{Re}\, e^{tL}\| |\log t| \, dt \longrightarrow 0$$

であるから, $K_n \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ を示せばよい。これは次の補助定理4からただちにわかる。

補助定理4. $\varphi(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ とすると

$$\hat{\Phi} = \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{tL} \, dt \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}).$$

証明. $e^{tL} = J e^{tL^0} J^* = J \int_{-\infty}^\infty e^{-its} dF_0(s) J^* =$
$= \int_{-\infty}^\infty e^{-its} dF(s)$ であるから, $\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-its} \varphi(t) \, dt$ として,

$$\hat{\Phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dF(s) \int_0^{\infty} e^{-its} \varphi(t)\, dt = \int \hat{\varphi}(s)\, dF(s).$$

$\hat{\varphi}(s)$ は $(-\infty, \infty)$ で有界連続，$|s| \to \infty$ のとき $\hat{\varphi}(s) \to 0$ であるから，補助定理2より，$\hat{\Phi} \in \mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$．（証明了）

最後に $G(\lambda)$ のスペクトル（固有値）について述べる。

補助定理5．compact 自己共役作用素 K の（正の）固有値に大きさの順に番号をつけて，$\rho_1(K) \geq \rho_2(K) \geq \cdots \geq \rho_n(K) \geq \cdots (>0)$ などとする。$\beta$ が $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ を動くとき

(i) $\rho_n(G(\beta))$ は狭義単調減少，$\lim_{\beta \to \infty} \rho_n(G(\beta)) = 0$．

(ii) $\rho_n(K(\beta))$ も単調減少，$|\rho_n(G(\beta)) - \rho_n(K(\beta))| \leq c_2 \beta^{\varepsilon_0}$．

(iii) $r = \mathrm{rank}\, N$ とすると

$$\lim_{\beta \to +0} \rho_n(K(\beta)) = \infty, \quad 1 \leq n \leq r,$$
$$\lim_{\beta \to +0} \rho_n(K(\beta)) = \rho_n^* \in [\rho_n(K), \rho_{n-r}(K)], \quad r < n,$$

(iv) $\{\rho_n(G(\beta))\}$ の番号を適当につけかえて $\{\rho_n(\beta)\}$ とし，次の条件をみたすようにすることができる：

$$\begin{cases} \rho_n(\beta) \text{ は } (0, \infty) \text{ で}\overset{\text{狭義}}{\text{単調減少}}\text{，実解析的，} \\ \rho_n(\beta) \uparrow \infty \quad (\beta \downarrow 0), \quad 1 \leq n \leq r, \\ \rho_n(\beta) \uparrow \rho_n^* \equiv \rho_n(0) \quad (\beta \downarrow 0), \quad r < n, \\ \rho_n(\beta) \downarrow 0 \quad (\beta \uparrow \infty), \end{cases}$$

(v) $\{\rho_n(K(\beta))\}$ の番号も適当につけかえて $\{\tilde{\rho}_n(\beta)\}$ とし，次の条件をみたすようにできる：

$\tilde{\rho}_n(\beta)$ は $(0, \infty)$ で単調減少，実解析的，

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_n(\beta) \uparrow \infty \quad (\beta \downarrow 0), & 1 \le n \le r, \\ \tilde{\rho}_n(\beta) \uparrow \rho_n^* \quad (\beta \downarrow 0), & r < n, \\ \tilde{\rho}_n(\beta) \text{ は 狭義単調減少，または } \tilde{\rho}_n(\beta) \equiv \rho_n^*. \end{cases}$$

証明．(i)－(iii) は min－max 原理から得られる。(iv)，(v) は固有値の（解析的）摂動に関して知られている結果である（たとえば文献［3］）。

注意1．$\rho_n'(\beta) < 0$ $(n=1,2,\cdots)$ が示される。

注意2．$K$ を $\mathcal{R}(N)^\perp$（＝ $N$ の range の直交補空間）に制限した作用素は正定値である。

注意3．$\tilde{\rho}_n(\beta) \equiv \rho_n^*$ のとき，$\rho_n^*$ は $K$ の固有値であり，また $-h^*K_\infty$ の固有値でもある。

$\Lambda = \{\rho_n^*;\ n=1,2,\cdots\}$（ただし $1 \le n \le r$ に対しては $\rho_n^* = \infty$ とする），$\Lambda_e = \{\rho_n^*;\ \tilde{\rho}_n(\beta) \equiv \rho_n^*\}$ とおく。さらに，$\kappa > 0$ に対して，$N(\kappa)$ ＝"$\kappa\rho_n^* > 1$ となる $\rho_n^*$ の個数" i.e. $\kappa\rho_n^* > 1$ $(n=1,\cdots,N(\kappa))$，$\kappa\rho_n^* \le 1$ $(n > N(\kappa))$ とする。次の補助定理は明らかであろう。

補助定理6．(i) $\kappa > 0$，$\kappa\rho_n(\beta) = 1$ の根を $\beta_n (>0)$ とする $(n=1,\cdots,N(\kappa))$ と，$\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - \{0, \beta_1, \cdots, \beta_{N(\kappa)}\}$ に対して $(1-\kappa G(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。$\beta_n$ $(1 \le n \le N(\kappa))$ は，$(1-\kappa G(\lambda))^{-1}$ の simple pole であり，そこでの residue は

$-\dfrac{1}{\kappa \rho_n'(\beta_n)} P_n(\beta_n)$, $P_n(\beta_n)$ は $G(\beta_n)$ の固有値 $\rho_n(\beta_n)$ に属する固有空間への正射影，となる。$\beta_n = \beta_n(\kappa)$ とかくと，$\beta_n(\kappa)$ は $\left(\dfrac{1}{\rho_n^*}, \infty\right)$ で $\kappa$ につき狭義単調増加，実解析的となる。

(ii) $\kappa > 0$, $\kappa^{-1} \in \Lambda_e$ ならば $(1-\kappa K(\lambda))^{-1}$ は，すべての $\lambda$ に対して存在しない。$\kappa^{-1} \notin \Lambda_e$ ならば，$\kappa \tilde{\rho}_n(\beta) = 1$ の根を $\tilde{\beta}_n$ $(1 \leq n \leq N(\kappa)$，ただし根が存在する — $\tilde{\rho}_n(\beta) \equiv \rho_n^*$ でない — とき）とすると，$\lambda \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}}_- \cup \{\tilde{\beta}_n\}$ に対して，$(1-\kappa K(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。$\tilde{\beta}_n$ は simple pole である。

§3　作用素 B のスペクトル

前節の結果から，作用素 B のスペクトルについて，ある程度のことがわかる。B の $\kappa$ に関する依存を明示したいときは，B を $B(\kappa)$ とかく

$$B = B(\kappa) = A + \kappa H H^*.$$

定理 2. (i) $B(\kappa)$ は(多重度もこめて)固有値 $\{\beta_1(\kappa), \cdots, \beta_{N(\kappa)}(\kappa)\}$ をもつ。$\mathbb{C}_+ - \{\beta_1(\kappa), \cdots, \beta_{N(\kappa)}(\kappa)\}$ は $B(\kappa)$ の resolvent set に属する。$(\lambda - B(\kappa))^{-1}$ は $\beta_n(\kappa)$ において simple pole をもつ。$B(\kappa)$ は虚軸上に固有値をもたない。

(ii) 条件 (L.2) で $e^{tL}=0$ $(t\geq a)$ が成り立つとき，$\overline{\mathbb{C}}_-$ は $B(\kappa)$ の連続スペクトルに属する。

証明. (i) は (9) と補助定理5から得られる。$B(\kappa)$ が虚軸上に固有値をもたないことを示そう。$\gamma>0$ として，ある $u=u(\mu)\in\mathcal{G}$ に対して

$$B(\kappa)u = i\gamma u,$$

$$\text{i.e.}\quad A(\mu)u(\mu)+\kappa HH^*u(\mu) = i\gamma u(\mu)$$

が成立するとする。

$$v = H^*u \in \mathcal{H}$$

とおくと，$\lambda=\varepsilon+i\gamma$ $(\varepsilon>0)$ として

$$(\lambda-A(\mu))u(\mu) = \kappa Hv + (\lambda-i\gamma)u(\mu),$$

$$\therefore\quad u(\mu) = \kappa(\lambda-A(\mu))^{-1}Hv + \varepsilon(\lambda-A(\mu))^{-1}u(\mu),$$

$$\therefore\quad v = H^*u$$

$$= \kappa H^*(\lambda-A)^{-1}Hv + \varepsilon H^*(\lambda-A)^{-1}u,$$

$$\therefore\quad v = \kappa G(\lambda)v + \varepsilon H^*(\lambda-A)^{-1}u.$$

ところが $\mathrm{Re}\,\lambda=\varepsilon$ と $(i\gamma-A(\mu))^{-1}$ の存在 ($\Leftarrow$ (L.2)) とから

$$\|\varepsilon(\lambda-A(\mu))^{-1}u(\mu)\| \leq \|u(\mu)\| \in L^2(\mathcal{M}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon(\varepsilon+i\gamma-A(\mu))^{-1}u(\mu)\| = 0 \quad (\text{a.e. }\mu),$$

$$\therefore\quad \varepsilon(\lambda-A)^{-1}u \to 0 \quad \text{in } \mathcal{G} \quad (\varepsilon\to 0).$$

従って $\varepsilon\to 0$ として

$$v = \kappa G(+0+i\gamma)v,$$

$$(1-\kappa G(+0+i\gamma))v=0 \qquad \therefore\ v=0$$

（補助定理1（Vii）より）を得る。$H^*u=v=0$ より

$$A(\mu)u(\mu)=i\gamma u(\mu),$$

$$\therefore\ (i\gamma-A(\mu))u(\mu)=0, \qquad \therefore\ u(\mu)=0\ (a.e.\ \mu).$$

故に $i\gamma$ は $B(\kappa)$ の固有値ではない。次に

$$B(\kappa)u=0,$$

$$\text{i.e.}\ A(\mu)u(\mu)+\kappa H\,H^*u(\mu)=0$$

とする。$H^*u=v$ とおくと（（L.2）より $L^{-1}\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$）

$$\begin{cases}+\mu L\,u(\mu)+\kappa\,h(\mu)\,v=0 & (\mu>0),\\ -\mu L^*u(\mu)+\kappa\,h(\mu)\,v=0 & (\mu<0).\end{cases}$$

$$\text{i.e.}\quad u(\mu)=\begin{cases}-\kappa\dfrac{h(\mu)}{\mu}L^{-1}v & (\mu>0),\\ \kappa\dfrac{h(\mu)}{\mu}L^{*-1}v & (\mu<0).\end{cases}$$

$u(\mu)\in\mathcal{G}$ であるためには，$L^{-1}v=L^{*-1}v=0$ でなければならないから，$u(\mu)=0$ （a.e. $\mu$）となる。

（ii）を示すために，まず $\mathbb{C}_-$ は $A$ の連続スペクトルに属することをいう。$A$ および $A^*$ が $\mathbb{C}_-$ に固有値（実スペクトル）をもたないことは明らかである。従って，$\lambda\in\mathbb{C}_-$ が $A$ の essential spectrum に属することを示せばよい。そのために

$$\int_1^\infty\|(\lambda t-L)^{-1}v\|\,dt=+\infty$$

なる $v\in\mathcal{H}$ をとると，（実は $v\neq0$ ならよい）次のような単調増加数列 $\{R_n\}$ が存在する：

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} \|(\lambda t - L)^{-1} v\|^2 dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \infty .$$

$$a_n(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in [\frac{1}{R_{n+1}}, \frac{1}{R_n}], \\ 0, & \mu \notin [\frac{1}{R_{n+1}}, \frac{1}{R_n}], \end{cases}$$

$$\varphi_n(\mu) = a_n(\mu)(\lambda - \mu L)^{-1} v \quad \in \mathcal{D}(A) \subset \mathfrak{H}$$

とおくと，$\{\varphi_n\}$ が $A$ の $\lambda$ に対する singular sequence になることが，次のようにしてわかる：

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{R_{n+1}^{-1}}^{R_n^{-1}} \|(\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} v\|^2 \frac{1}{\mu^2} d\mu = \int_{R_n}^{R_{n+1}} \|(\lambda t - L)^{-1} v\|^2 dt$$
$$= 1,$$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad (n \neq m),$$

$$\|(\lambda - A)\varphi_n\|^2 = \int_{R_{n+1}^{-1}}^{R_n^{-1}} \|(\lambda - \mu L)\varphi_n(\mu)\|^2 d\mu = \int_{R_{n+1}^{-1}}^{R_n^{-1}} \|v\|^2 d\mu$$
$$= (R_n^{-1} - R_{n+1}^{-1})\|v\|^2 \to 0,$$

$$\varphi_n \to 0 \quad (\mathfrak{H}\text{の弱位相で}) \quad (n \to \infty).$$

あとで $HH^*(\lambda - A)^{-1} \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$ を示すので，$A$ と $B$ との essential spectrum は同一である。そこで $B$ と $B^*$ が $\mathbb{C}_-$ に固有値をもたないことを示せば，$\mathbb{C}_-$ は $B$ の連続スペクトルに属することがわかる。$\lambda \in \mathbb{C}_-$ と $u \in \mathfrak{H}$ に対して

$$Bu = \lambda u$$

$$\text{i.e.} \quad A(\mu)u(\mu) + \kappa HH^* u(\mu) = \lambda u(\mu)$$

とする。$\kappa H^* u = v \ (\in \mathcal{H})$ とおくと

$$(\lambda - A(\mu))u(\mu) = h(\mu) v,$$

$$\therefore (\lambda - \mu L) u(\mu) = h(\mu) v, \quad \mu > 0,$$

$$\therefore\ u(\mu) = h(\mu)(\lambda - \mu L)^{-1} v \quad \in L^2([0,1);\mathcal{H})$$

ある区間 $[0,\eta]$ で $|h(\mu)| \geq |h(\eta)| > 0$ であるから

$$w(\mu) = (\lambda - \mu L)^{-1} v \quad \in L^2((0,1);\mathcal{H}).$$

なぜならば, $\|w(\mu)\| \in L^2(0,\eta)$ は明らかであるし, 他方 $w(\mu) = \frac{1}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu} - L)^{-1} v$ は $[\eta, 1]$ で連続であるから。いま

$$F(z) = (\lambda z - L)^{-1} v$$

とおく。$F(z)$ は $z$ の整関数で, かつ exponential order 1 である ( $(\lambda z - L)^{-1} = \int_0^a e^{-\lambda z t} e^{tL} dt$ より)。また

$$s F(s) = s(\lambda s - L)^{-1} v = w(\tfrac{1}{s}),$$

$$\therefore\ \int_1^\infty \|F(s)\|^2 ds = \int_0^1 \|F(\tfrac{1}{\mu})\|^2 \frac{1}{\mu^2} d\mu = \int_0^1 \|w(\mu)\|^2 d\mu$$

$$< \infty,$$

$$\therefore\ \int_0^\infty \|F(s)\|^2 ds = M < \infty$$

である。$-\lambda = \rho e^{i\sigma}$, $|\sigma| < \frac{\pi}{2}$, $z = re^{i\theta}$ とおき,

$$\cos(\theta + \sigma) < 0$$

となるように $\theta$ を固定する (後に $\theta = \pi - \frac{\sigma}{2} \pm \frac{\pi}{4} \equiv \theta_\pm$ にとる)。

このとき $-\lambda z \in \mathbb{C}_-$, i.e. $\lambda z \in \mathbb{C}_+$, であるから

$$\|F(re^{i\theta})\| \leq \|(\lambda r e^{i\theta} - L)^{-1}\|\|v\| \leq M_\theta\ (<\infty).$$

ここで

$$z Q(z) = \int_0^z F(\zeta)^2 d\zeta$$

とおくと, $s > 0$ のとき

$$s\|Q(s)\| \leq \int_0^s \|F(t)\|^2 dt \leq \int_0^\infty \|F(t)\|^2 dt = M,$$

$$\therefore\ Q(s) \longrightarrow 0 \quad (s \to +\infty) .$$

また $z = re^{i\theta}$ に対しては

$$re^{i\theta} Q(re^{i\theta}) = \int_0^r F(\tau e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\tau ,$$

$$\therefore\ r \| Q(re^{i\theta}) \| \le \int_0^r \| F(\tau e^{i\theta}) \|^2 d\tau \le M_\theta^2 r ,$$

$$\therefore\ \| Q(re^{i\theta}) \| \le M_\theta^2 .$$

ここで $\theta$ を前述の $\theta_\pm$ にとると，Phragmén-Lindelöf の定理を適用することができて，$Q(z)$ は有界な整関数となり，結局 $Q(z) \equiv 0$ であることがわかる。従って，$F(z) \equiv 0$ となり，$v = 0$ を得る。故に $u(\mu) = 0$ (a.e. $\mu$) となり，$\lambda$ は $B$ の固有値ではない。$B^*$ が $\mathbb{C}_-$ に固有値をもたないことも同様にして示される。

$H H^*(\lambda - A)^{-1} \in \mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$ は次の補助定理を利用すれば，容易に示すことができる。

補助定理 7. $I$ を有界閉区间，$S \in \mathbb{C}_\infty(L^2(I))$，$T \in \mathbb{B}(L^2(I;\mathcal{H}))$ (以下 $\mathfrak{H} = L^2(I;\mathcal{H})$ とする) とする。$S$ は自然に $\mathfrak{H}$ の作用素に拡張されるので，それを $\tilde{S} \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ とする ($\|S\| = \|\tilde{S}\|$ である)。また $T$ は，$I$ から $\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ への ($\mathbb{B}(\mathcal{H})$ のノルムで) 区分的に連続な関数 $T(\mu)$ によって，

$$\mathfrak{H} \ni u(\mu) \longmapsto (Tu)(\mu) = T(\mu)\, u(\mu) \in \mathfrak{H}$$

とかけるものとする。このとき，$\tilde{S} T,\ T \tilde{S} \in \mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$.

証明. $S \in \mathbb{B}(L^2(I))$，$T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ とし，それぞれの

$\mathfrak{H}$の作用素への自然な拡張を$\widetilde{S}$, $\widetilde{T}$とするとき, $\widetilde{S}\widetilde{T}=\widetilde{T}\widetilde{S}$を$S\otimes T$ともかくことにする。$\|S\otimes T\|=\|S\|\|T\|$である。また$\|\ \|_2$によって, 作用素のHilbert-Schmidt normを表わすとき, $\|S\otimes T\|_2=\|S\|_2\|T\|_2$も成り立つ。これらのことから(適当な近似によって), $S\in\mathbb{C}_\infty(L^2(I))$, $T\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H})$ならば, $S\otimes T\in\mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$となることがわかる。

関数$T(\mu)$は階段関数$T_n(\mu)$によって($\mathbb{B}(\mathcal{H})$のノルムで)$I$上一様に近似できる。このとき作用素$T_n\in\mathbb{B}(\mathfrak{H})$は$\mathbb{B}(\mathfrak{H})$のノルムで$T$を近似するので, $\widetilde{S}T_n\in\mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$ならば, $\widetilde{S}T_n\to\widetilde{S}T$ (in $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$)より, $\widetilde{S}T\in\mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$がわかる。従って, $T(\mu)$が階段関数の場合に証明できればよい。

$$T(\mu)=\sum_{j=1}^{n}T_j\,\varphi_j(\mu),\quad T_j\in\mathbb{C}_\infty(\mathcal{H}),$$

$\varphi_j(\mu)$は$I$の部分区間の特性関数

とする。$L^2(I)$の作用素$\Phi_j$を次のように定義する:

$$L^2(I)\ni u(\mu)\longmapsto(\Phi_j u)(\mu)=\varphi_j(\mu)\,u(\mu).$$

明らかに$\Phi_j\in\mathbb{B}(L^2(I))$, かつ

$$T=\sum\Phi_j\otimes T_j\ .$$

$$\therefore\ \widetilde{S}T=\sum_{j=1}^{n}(S\Phi_j)\otimes T_j\ \in\ \mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H}).$$

ここで$S\Phi_j\in\mathbb{C}_\infty(L^2(I))$を用いた。同様にして

$$T\widetilde{S}=\sum_{j=1}^{n}(\Phi_j S)\otimes T_j\ \in\ \mathbb{C}_\infty(\mathfrak{H})$$

などより, 証明了。

## §4 $e^{tB}$ の漸近的挙動

$B(\kappa)$ のスペクトルの右端が $\beta_1(\kappa)$ であるから, $\sigma > \beta_n(\kappa)$ $((1 \le n \le N(\kappa)))$,

$u \in \mathcal{D}(B(\kappa)) = \mathcal{D}(A)$ とすると, $t > 0$ のとき

$$e^{tB(\kappa)}u = s\text{-}\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t}\,(\lambda - B(\kappa))^{-1}u\,d\lambda.$$

$B(\kappa)$ の固有値 $\beta_n(\kappa)$ に属する固有空間への射影を $Q_n(\kappa)$ とする。$Q_n(\kappa)$ は必ずしも連続ではないが,

$$Q_n(\kappa)\,Q_m(\kappa) = Q_m(\kappa)\,Q_n(\kappa) = \delta_{nm}\,Q_m(\kappa)$$

をみたすようにできる。あるいは

$$Q_n(\kappa) = (\,\cdot\,, \psi_n(\kappa))\,\varphi_n(\kappa)\ ,$$

$$(\varphi_n(\kappa), \psi_m(\kappa)) = \delta_{nm}\ ,$$

$$B(\kappa)\,\varphi_n(\kappa) = \beta_n(\kappa)\,\varphi_n(\kappa)\ ,$$

$$B(\kappa)^*\psi_n(\kappa) = \beta_n(\kappa)\,\psi_n(\kappa)\ .$$

いま

$$Q = Q(\kappa) = \sum_{n=1}^{N(\kappa)} Q_n(\kappa)\ ,$$

$$Q' = Q'(\kappa) = 1 - Q(\kappa)\ ,$$

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'(\kappa) = Q'(\kappa)\,\mathfrak{h}\,,$$

$$B' = B'(\kappa) = B(\kappa)\,Q'(\kappa) = Q'(\kappa)\,B(\kappa)\,Q'(\kappa)$$

とおくと, $B'$ は $\mathfrak{h}$ において作用素の半群 $e^{tB'}$ を生成し

$$e^{tB'} = e^{tB}Q' + Q = Q'e^{tB}Q' + Q\ ,$$

$$\mathcal{D}(B'(\kappa)) = \mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{h}'(\kappa) \dotplus Q(\kappa)\,\mathfrak{h}\ ,$$

ただし $B'(\kappa)|_{Q(\kappa)\mathfrak{h}} = 0$ .

あとの便利のために，次の記号を定義しておく：

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\kappa) = \mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{H}'(\kappa)$$
$$= \{ u \in \mathcal{D}(A)\,;\ (u, \psi_n(\kappa)) = 0,\ 1 \le n \le N(\kappa) \}.$$

明らかに

$$(19) \qquad e^{tB(\kappa)} u = e^{tB(\kappa)} (Q'(\kappa) + Q(\kappa)) u$$
$$= e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa) u.$$

右辺第1項を調べよう。$u \in \mathcal{D}(B(\kappa)) = \mathcal{D}(A)$ のとき，$Q'(\kappa) u \in \mathcal{D}'(\kappa)$ であるから，$u' \in \mathcal{D}'(\kappa)$ に対して

$$e^{tB(\kappa)} u' = e^{tB'(\kappa)} u'$$

の挙動を調べればよい。$B'(\kappa)$ のスペクトルは $\mathbb{C}_+$ にはないので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$M_\varepsilon = M_\varepsilon(\kappa)$ が存在して

$$\| e^{tB'(\kappa)} \| \le M_\varepsilon e^{\varepsilon t} \quad (t \ge 0),$$
$$\| (\lambda - B'(\kappa))^{-1} \| \le M_\varepsilon \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - \varepsilon} \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > \varepsilon).$$

従って，任意の $\sigma > 0$（実際は $0 < \sigma < \min \beta_n(\kappa)$）に対して

$$e^{tB'(\kappa)} u' = s\text{-}\lim_{\gamma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\gamma}^{\sigma + i\gamma} e^{\lambda t} (\lambda - B'(\kappa))^{-1} u' \, d\lambda,$$

または $(\lambda - B)^{-1} Q' = (\lambda - B')^{-1} Q'$ より

$$e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) = s\text{-}\lim_{\gamma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\gamma}^{\sigma + i\gamma} e^{\lambda t} (\lambda - B(\kappa))^{-1} Q'(\kappa) \, d\lambda.$$

いま

$$(20) \qquad \begin{cases} e^{tB} = e^{tB} Q' + \sum e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n \\ \quad\;\; = e^{tA} Q' + Z(t) + \sum e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n, \\ Z(t) = (e^{tB} - e^{tA}) Q' \end{cases}$$

とおく。$u \in \mathcal{D}(A)$ のとき，$Q'u \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(A)$ だから

(21) $$\begin{aligned} Z(t)u &= s\text{-}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t}\{(\lambda-B)^{-1}-(\lambda-A)^{-1}\}Q'u\,d\lambda \\ &= s\text{-}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t}\,\zeta(\lambda)\,Q'u\,d\lambda . \end{aligned}$$

(9) より

(22) $$\begin{aligned} \zeta(\lambda) &= (\lambda-B)^{-1}-(\lambda-A)^{-1} \\ &= \kappa(\lambda-A)^{-1}H\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^{*}(\lambda-A)^{-1} \end{aligned}$$

である。$\zeta(\sigma+is)Q'u \in L^1_s((-\infty,\infty);\mathfrak{H}) = \mathcal{L}$ $(0<\sigma)$，かつ $\zeta(\sigma+is)Q'u \longrightarrow \tilde{\zeta}(s)$ in $\mathcal{L}$ $(\sigma\to 0)$ であれば，Riemann-Lebesgue の定理により $Z(t)u \longrightarrow 0$ (in $\mathfrak{H}$ as $t\to\infty$) となる。われわれは，これより少し弱い結果を証明する。そのためには，$\{1-\kappa G(\sigma+is)\}^{-1}$ の評価と，$H^{*}(\sigma+is-A)^{-1}u$ の評価が必要である。

補助定理 8. $\kappa>0$, $\kappa^{-1}\in\Lambda_e$ とする。

(i) $(1-\kappa K(\lambda))^{-1}$ の正の pole の個数を $n(\kappa)$ とする。$n(\kappa)>0$ のとき，最小の pole を $\tilde{\beta}_0=\tilde{\beta}_0(\kappa)$，$n(\kappa)=0$ のとき，$\tilde{\beta}_0=\tilde{\beta}_0(\kappa)=\infty$ とする。このとき，ある定数 $\tilde{C}_\kappa>0$ により，任意の $\lambda\in\tilde{D}_{\frac{\tilde{\beta}_0}{2}}=\{\lambda\in\mathbb{C}-\overline{\mathbb{R}}_-\,;\,|\lambda|\le\frac{\tilde{\beta}_0}{2}\}$ に対して

$$\|(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\| \le \tilde{C}_\kappa(1+|\log|\lambda||)^{2r-1-n(\kappa)} .$$

(ii) $\beta_0=\beta_0(\kappa)=\min_{1\le n\le N(\kappa)}\beta_n(\kappa)$ とする。ある定数 $C_\kappa>0$ により，任意の $\lambda\in D_{\frac{\beta_0}{2}}=\{\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+-\{0\}\,;\,|\lambda|\le\frac{\beta_0}{2}\}$ に対して

(23) $$\|(1-\kappa G(\lambda))^{-1}\| \le C_\kappa(1+|\log|\lambda||)^{2r-1-n(\kappa)} .$$

証明。 $\lambda_0 = \frac{\tilde{\beta}_0}{2} > 0$ とおくと，$(1-\kappa K(\lambda_0))^{-1} = T = T(\kappa) \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ が存在する。 $\lambda = z\lambda_0$ とおくと，$\lambda \in \tilde{D}_{\frac{\beta_0}{2}}$ と $z \in \tilde{D}_1$ とは同値であり，また $K(\lambda) = -h^* \log(z\lambda_0) N + K =$
$= -h^* \log z N + K(\lambda_0)$ となる。

$$\begin{aligned} 1-\kappa K(\lambda) &= 1-\kappa h^* \log z N - \kappa K(\lambda_0) \\ &= \{1-\kappa h^* \log z N(1-\kappa K(\lambda_0))^{-1}\}(1-\kappa K(\lambda_0)) \\ &= (1-\kappa h^* \log z NT(\kappa))(1-\kappa K(\lambda_0)) \end{aligned}$$

より，$(1-\kappa K(\lambda))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ の存在と $(1-\kappa h^* \log z NT(\kappa))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ の存在とは同値である。ここで

$$w = \kappa h^* \log z,$$
$$S(w) = 1 - wNT$$

とおく。ところで，$n$ 次元 Hilbert 空間における（線型）作用素 $S$ が invertible なとき，$S^*S$ の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ を用いることにより

$$\|(S^*S)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \frac{\|S^*S\|^{n-1}}{\det(S^*S)},$$
$$\therefore \|S^{-1}\| \leq \frac{\|S\|^{n-1}}{|\det S|}$$

である。

$$\mathrm{rank}(NT) = \mathrm{rank}((NT)^*) = \mathrm{rank}(N) = r$$

であるから，

$$\mathcal{R}(NT) + \mathcal{R}((NT)^*) = \mathcal{H}(\kappa) \quad (\text{ベクトル空間の和})$$

とおくと，

$$\dim \mathcal{R}(NT) \cap \mathcal{R}((NT)^*)$$

$$= NT\text{の }0\text{ でない固有値の個数} = n(\kappa)$$

に注意して(これは後に証明する),

$$\dim \mathcal{H}(\kappa) = 2r - n(\kappa) \leq 2r.$$

$\mathcal{H}(\kappa)$ および $\mathcal{H}(\kappa)^{\perp}$ は, $NT(\kappa)$ 従って $S(w)$ で不変であるから, 有限次元空間における作用素に関する先の注意より

$$\|S(w)^{-1}\| \leq \max\left\{1, \frac{\|S(w)\|^{2r-n(\kappa)-1}}{|\det S(w)|}\right\}.$$

$\|S(w)\|$ は次のように評価される:

$$\begin{aligned}\|S(w)\| &\leq 1 + |w|\,\|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* |\log z|\,\|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* \left|\log \tfrac{\lambda}{\lambda_0}\right|\,\|NT\| \\ &= 1 + \kappa h^* \{|\log|\lambda|| + |\arg \lambda| + |\log|\lambda_0||\}\,\|NT\| \\ &\leq 1 + \kappa h^* \{|\log|\lambda|| + \pi + |\log|\lambda_0||\}\,\|NT\|.\end{aligned}$$

次に $N \geq 0$ に注意すると

$$\det S(w) = \det(1 - wNT) = \det(1 - wN^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}})$$

である。$T = (1 - \kappa K(\lambda_0))^{-1}$ は自己共役だから, $N^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}}$ も自己共役となり, 固有値は実数である。$N^{\frac{1}{2}}TN^{\frac{1}{2}}$ の $0$ でない固有値を $\sigma_1(\kappa), \ldots, \sigma_k(\kappa)$ とすると $(\because k \leq r)$, これらは $NT$ の $0$ でない固有値の全体と一致する。(固有値の重複度もこめて)。

$$\det S(w) = \prod_{j=1}^{k} (1 - w\sigma_j(\kappa))$$

より, $S(w)^{-1} = (1 - wNT)^{-1}$ が存在しない $w$ は

$$w\,\sigma_j(\kappa) = 1$$

$$\text{i.e.}\quad w = w_j = \frac{1}{\sigma_j} \qquad (j=1,\cdots,k)$$

である。$w_j$ はすべて実数であるから

$$w_j = \kappa h^* \log z_j = \kappa h^* \log \frac{\lambda_j}{\lambda_0}$$

によって定まる $\lambda_j > 0$ において $(1-\kappa K(\lambda))^{-1}$ が pole をもつことになる。これから $k = n(\kappa)$ を得る。

また $\lambda = |\lambda| e^{i\theta} \in \widetilde{D}_{\lambda_0}$ のとき

$$\begin{aligned} |\det S(w)| &= \left| \prod (1 - \kappa h^* \log z\, \sigma_j(\kappa)) \right| \\ &= \left| \prod \left(1 - \kappa h^* \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \sigma_j(\kappa)\right) \right| \\ &= \prod \left| 1 - \kappa h^* \left\{ \log \frac{|\lambda|}{\lambda_0} + i\theta \right\} \sigma_j(\kappa) \right|, \end{aligned}$$

$$\kappa h^* \log \frac{\lambda_j}{\lambda_0} = w_j = \frac{1}{\sigma_j}$$

$$\therefore\ \kappa h^* \sigma_j = \left(\log \frac{\lambda_j}{\lambda_0}\right)^{-1},$$

などから

$$\begin{aligned} |\det S(w)| &\geq \prod_{j=1}^{n(\kappa)} \left| 1 - \frac{\log|\lambda| - \log \lambda_0}{\log \lambda_j - \log \lambda_0} \right| \\ &\geq (\log 2)^{-n(\kappa)} (\log \beta_0 - \log|\lambda|)^{n(\kappa)}. \end{aligned}$$

以上を合わせて

$$\| S(w)^{-1} \| \leq \begin{cases} C'_\kappa (1 + |\log|\lambda||)^{2r-1-2n(\kappa)}, & n(\kappa) < r, \\ C'_\kappa, & n(\kappa) = r. \end{cases}$$

これで(i)は示された。(ii) は (18) と (i) の結果，および補助定理定理6 (i) から導びかれる。$0 < \delta \leq \frac{\beta_0}{2}$ なる $\delta$ を

$$\kappa c_2 \widetilde{C}_\kappa (1 + |\log \eta|)^{2r-1-n(\kappa)} \eta^{\varepsilon_0} \leq \frac{1}{2} \qquad (0 < \eta \leq \delta)$$

となるよう十分小さくとる。$\lambda \in D_\delta \subset \tilde{D}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ に対して

$$1-\kappa G(\lambda) = 1-\kappa K(\lambda) - \kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)$$
$$= \{1-\kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\}(1-\kappa K(\lambda)),$$
$$\therefore (1-\kappa G(\lambda))^{-1} = (1-\kappa K(\lambda))^{-1}\{1-\kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1}$$

となるが，$\lambda \in D_\delta$ ($\Rightarrow |\lambda| \le \delta$) に対しては

$$\|\kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\| \le \frac{1}{2}$$

だから，$\{1-\kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は存在して，

$$\|\{1-\kappa\lambda^{\varepsilon_0} H(\lambda)(1-\kappa K(\lambda))^{-1}\}^{-1}\| \le 2 .$$

$\lambda \in D_{\frac{\varepsilon_0}{2}} - D_\delta$ に対しては，$(1-\kappa G(\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は存在して，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のノルムで連続である。（証明了）

$\mathbb{C}_+$ における Hardy class $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})$, $1<p<\infty$, を導入しよう。$\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}) \ni f(\lambda) = f(\sigma+i\tau)$ は，$\mathbb{C}_+$ において $\mathcal{H}$ の値をとる解析関数であり，かつ

$$\sup_{\sigma>0}\int_{-\infty}^{\infty}\|f(\sigma+i\tau)\|^p d\tau < \infty$$

をみたす。さらに，$f(\sigma+i\tau)$ は $L^p_\tau((-\infty,\infty);\mathcal{H})$ の値をとる $\sigma$ の関数として，$0\le\sigma<\infty$ で連続である。従って $\sigma\to 0$ のとき，$f(\sigma+i\tau)\to f(0+i\tau)$ (in $L^p((-\infty,\infty);\mathcal{H})$) となるが，また $f(\sigma+i\tau)\to f(0+i\tau)$ (in $\mathcal{H}$, a.e. $\sigma$ に対して) でもある。$\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})$ は次のノルムによって Banach 空間（$p=2$ のときは Hilbert 空間）となる：

$$(24)\qquad \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|f(0+i\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

次の不等式に注意しておこう：

$$(25)\qquad \|f(\sigma+i\cdot)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|f(\sigma+i\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leq N_p\|f\|_p .$$

$\mathfrak{H}_0$において skew self-adjoint な $A_0$ のスペクトル分解を $A_0 = \int -is\,dE_0(s)$ とし，$E(s) = \tilde{J}E_0(s)\tilde{J}^*$ とおく。（この記号を §2 の exponential integral と混同するおそれはないであろう。）$F(s)$ が $s=0$ の近傍で絶対連続ならば，$F_0(s)$ もそうであり，そのとき $E_0(s)$，$E(s)$ は絶対連続となるが，条件 (L.2) の下では，$F(s)$ は実は解析的なので，上の条件は文句なくみたされている。明らかに

$$(\lambda - A_0)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda + is}\,dE_0(s),$$
$$(\lambda - A)^{-1} = \tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}\tilde{J}^* = \int \frac{1}{\lambda + is}\,dE(s).$$

当分の間，$I_1 = [-1,1]$，$I_2 = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ と表わすことにする。$H^*(\lambda - A)^{-1}u$ の評価については，次の補助定理が成り立つ：

補助定理 9. (i) $u \in \mathfrak{H}_0$ とすると

$$H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}u = \hat{u}(\lambda) = \hat{u}_1(\lambda) + \hat{u}_2(\lambda),$$
$$\hat{u}_1(\lambda) = H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}E_0(I_1)u \in \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})\quad (1<p<2),$$
$$\hat{u}_2(\lambda) = H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}E_0(I_2)u \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}),$$

$$(26)\qquad \left\{\ \|\hat{u}_1\|_p \leq a_p|k(0)|\,\|E_0(I_1)u\|\right.$$

$$\left\{ \|\hat{u}_2\|_2 \leq a_2 |h(0)| \|E_0(I_2)u\| .\right.$$

(ii) $v \in \mathcal{H}$ に対して

$$\tilde{v}(\lambda;\mu) = (\lambda - A(\mu))^{-1} v$$

とおくと，$\tilde{v}(\lambda;\mu)$ は $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})$ $(2 \leq p < \infty)$ の値をとる $\mu \in \mathcal{M} - \{0\}$ の連続関数である。かつ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ として

(27) $$\|\tilde{v}(\cdot;\mu)\|_p \leq M_p |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|v\| .$$

(iii) $u \in \mathcal{G}$ に対して

$$\tilde{u}(\lambda;\mu) = (\lambda - A(\mu))^{-1} u(\mu)$$

とおくと，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{u}(\lambda;\mu) \in L^2(\mathcal{M} - (-\varepsilon,\varepsilon);$ $\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}))$ .

(iv) $x(\mu)$ は(有界)可測関数で，$\int |x(\mu)|^2 |\mu|^{-\frac{2}{p_0'}} d\mu = \overbrace{C}^{(<\infty)}$ とする。$\mathcal{G}$ における作用素 $X$ を

$$\mathcal{G} \ni u(\mu) \longmapsto (Xu)(\mu) = x(\mu)u(\mu) \in \mathcal{G}$$

によって定義すると（$X$の定義を適当に拡張して），

$$\widetilde{Xu}(\lambda;\mu) = X\tilde{u}(\lambda;\mu) = x(\mu)\tilde{u}(\lambda;\mu)$$
$$\in L^1_\mu(\mathcal{M};\mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})) ,$$

(28) $$\int \|\widetilde{Xu}(\cdot;\mu)\|_p \, d\mu \leq \sqrt{C}\, M_p \|u\|_{\mathcal{G}} \quad (2 \leq p \leq p_0)$$

従って（作用素 $H^*$の意味を適当に解釈して）

$$H^*(\lambda - A)^{-1}Xu = H^*\widetilde{Xu}(\lambda) \in \mathcal{H}^p(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}) ,$$

(29) $$\|H^*(\lambda - A)^{-1}Xu\|_p \leq |h(0)|\sqrt{C}\, M_p \|u\|_{\mathcal{G}} \quad (2 \leq p \leq p_0).$$

証明. (i)を示そう。

$$H^*\tilde{J}(\lambda - A_0)^{-1}u = \int \frac{1}{\lambda + is}\, d(H^*\tilde{J}E_0(s)u)$$

において，$H^*\tilde{J}E_0(s)u$ は有界変動，従って（$E_0(s)$ の絶対連続性より）絶対連続である。なぜなら，有限個の区間 $\Delta_j$ をとり，$\sum \Delta_j = \Delta$ とすると

$$\sum \|H^*\tilde{J}E_0(\Delta_j)u\| \le \sum \|H^*\tilde{J}E_0(\Delta_j)\|\,\|E_0(\Delta_j)u\|$$

$$\le \left(\sum \|H^*\tilde{J}E_0(\Delta_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum \|E_0(\Delta_j)u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum \|H^*\tilde{J}E_0(\Delta_j)\tilde{J}^*H\|\right)^{\frac{1}{2}}\|E(\Delta)u\|$$

$$= \left(\sum \|H^*E(\Delta_j)H\|\right)^{\frac{1}{2}}\|E(\Delta)u\|$$

$$= \left(\sum \left\|\int_{\Delta_j} g(s)\,ds\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\|E(\Delta)u\|$$

$$\le \left(\int_\Delta \|g(s)\|\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|.$$

ここで (14) と $g(s) = g(-s) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,G(+0+is)$ より，

$$\begin{cases} 0 \le g(s) = g(-s) \le \dfrac{1}{|s|}|h(0)|^2, \\ 0 \le g(s) \le \mathrm{const.}\,(1 + |\log|s||)\,|h(0)|^2 \end{cases}$$

に注意すれば，$\|g(s)\|$ の（局所）可積分性がわかる。

$$\frac{d}{ds}(H^*\tilde{J}E_0(s)u) = u(s),$$

$$\frac{d}{ds}(H^*\tilde{J}E_0(s)E_0(I_j)u) = u_j(s) \quad (j = 1, 2)$$

とおくと，$u(s) = u_1(s) + u_2(s)$。$u_j(s) = 0$ $(s \notin I_j)$ で

(30) $$\hat{u}_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + is}\, u_j(s)\, ds.$$

ただし $\hat{u}_2(\lambda)$ の積分は，任意の有限区間で通常の Bochner 積分の意味であるが，$|s|$ の大きい所では弱位相による積分とする。Kato [1] にならって $S(\lambda) = \left\{\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,(\lambda - A_0)^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}} = \cdots$

$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \}^{\frac{1}{2}} \geq 0$ とおく。$\lambda = \sigma + i\tau$ $\in \mathbb{C}_+$ のとき，$-\bar{\lambda} = -\sigma + i\tau$ に注意する。

$$\| \hat{u}_2(\lambda) - \hat{u}_2(-\bar{\lambda}) \|^2 = \| \overset{*}{H} \hat{J} \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u \|^2$$
$$= 4\pi^2 \| \overset{*}{H} \hat{J} S(\lambda)^2 E_0(I_2) u \|^2$$
$$\leq 4\pi^2 \| \overset{*}{H} \hat{J} S(\lambda) \|^2 \| S(\lambda) E_0(I_2) u \|^2$$
$$= 4\pi^2 \| \overset{*}{H} \hat{J} S(\lambda)^2 \hat{J}^* H \| \, ( S(\lambda)^2 E_0(I_2) u, E_0(I_2) u )$$
$$\overset{2}{=} \| \overset{*}{H} \hat{J} \, \mathrm{Re}\, (\lambda - A_0)^{-1} \hat{J}^* H \|$$
$$\times ( \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u, E_0(I_2) u )$$
$$\overset{2}{=} \| \mathrm{Re}\, G(\lambda) \| ( \{ (\lambda - A_0)^{-1} - (-\bar{\lambda} - A_0)^{-1} \} E_0(I_2) u, E_0(I_2) u )$$

であるから，$I_n = (-n, -1) \cup (1, n)$ に対して

$$\int_{I_n} \| \hat{u}_2(\sigma + i\tau) - \hat{u}_2(-\sigma + i\tau) \|^2 d\tau$$
$$\leq 2 \sup_{\tau \in I_n} \| \mathrm{Re}\, G(\sigma + i\tau) \| \int_{I_n} d\tau \int \frac{2\sigma}{\sigma^2 + (\tau + s)^2} d \| E_0(s) E_0(I_2) u \|^2$$
$$\leq 2 \sup \| \mathrm{Re}\, G(\sigma + i\tau) \| \cdot 2\pi \| E_0(I_2) u \|^2 .$$

他方 $\hat{u}_2(\sigma + i\tau) - \hat{u}_2(-\sigma + i\tau) \longrightarrow 2\pi u_2(-\tau)$ (in $\mathfrak{H}_0$ as $\sigma \downarrow 0$) が a.e. $\tau$ に対して成りたつので，Fatou の定理によって

$$\int_{I_n} 4\pi^2 \| u_2(-\tau) \|^2 d\tau \leq 2\pi | h(0) |^2 \cdot 2\pi \| E_0(I_2) u \|^2 .$$

$u_2(\tau) = 0$ ，$\tau \in (-1, 1)$，であるから，$n \to \infty$ として

(31) $$\int_{-\infty}^{\infty} \| u_2(s) \|^2 ds \leq | h(0) |^2 \| E_0(I_2) u \|^2 .$$

同様の計算を $\hat{u}_1(\lambda)$ について実行すると，$1 < p < 2$ のとき

(32) $$\int_{-1}^{1} \| u_1(s) \|^p ds \leq \left( \int_{-1}^{1} \| g(s) \|^{g_1} \right)^{\frac{1}{g_2}} \| E_0(I_1) u \|^p ,$$

ただし $q_1 = \frac{p}{2-p} = \frac{2}{2-p} - 1 > 1$, $q_2 = \frac{2}{2-p}$. ($\|g(s)\|^{q_1}$ は $(-\infty,\infty)$ で可積分であるから，実は $u(s) \in L^p((-\infty,\infty);\mathfrak{X})$.)

(30), (31) および (32) から，(i) の結論は明らかである。

(ii) から (iii), (iii) から (iv) を導くことは容易なので，(ii) を示そう。

$$\begin{aligned}\hat{v}(\lambda;\mu) &= (\lambda - A(\mu))^{-1} v \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA(\mu)} v \, dt\end{aligned}$$

であるが，次のようにおく：

(33) $$v(t;\mu) = e^{tA(\mu)} v =: \begin{cases} e^{-t\mu L} v, & \mu > 0, \\ e^{t\mu L^*} v, & \mu < 0. \end{cases}$$

$v(t;\mu)$ は $\mu \neq 0$ において $L^1_t((0,\infty);\mathcal{H}) \cap L^2_t((0,\infty);\mathcal{H})$ の値をとる連続関数であり，$1 \le p' \le 2$ に対して

(34) $$\begin{aligned}\int_0^\infty \|v(t;\mu)\|^{p'} dt &\le \int_0^\infty \|e^{tA(\mu)}\|^{p'} dt \, \|v\|^{p'} \\ &\le M^{p'} \frac{1}{p'\alpha|\mu|} \|v\|^{p'} \le \frac{M^{p'}}{\alpha} \frac{1}{|\mu|} \|v\|^{p'}.\end{aligned}$$

(ただし条件 (L.2) を用いた.) $\hat{v}(\lambda;\mu)$ は $v(t;\mu)$ の Laplace 変換であるから，$\mu \neq 0$ において $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}) \cap \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})$ の値をとる連続関数，かつ interpolation により

(35) $$\begin{aligned}\|\hat{v}(\sigma + i\cdot;\mu)\|_p &\le (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \|v(t;\mu)\|^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le M_p |\mu|^{-\frac{1}{p'}} \|v\| \quad (0 \le \sigma < \infty),\end{aligned}$$

ただし $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ より $p \ge 2$ を定めた。 (証明了)

補助定理9から $Z(t)$ の性質を導びいてみよう。(21), (22) より

$$Z_\eta(t)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\eta}^{\sigma+i\eta} e^{\lambda t}\zeta(\lambda)Q'u\,d\lambda \quad (u\in\mathcal{D}(A)),$$
$$\zeta(\lambda) = \kappa(\lambda-A)^{-1}H\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*(\lambda-A)^{-1}$$

とすると，$\eta\to\infty$ のとき

$$Z_\eta(t)u \longrightarrow Z(t)u \quad (\text{in } \mathcal{G} = L^2(\mathcal{M};\mathcal{H})).$$

従って，適当な数列 $\eta_n\uparrow\infty$ に対して

$$Z_{\eta_n}(t)u(\mu) \longrightarrow Z(t)u(\mu) \qquad (a.e.\ \mu).$$

故に，任意の $v\in\mathcal{H}$ に対して

$$(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\eta_n}^{\sigma+i\eta_n} e^{\lambda t}(\zeta(\lambda)Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}}\,d\lambda.$$

$$\begin{aligned}
&(\zeta(\lambda)Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}}\\
&= \kappa\,(H\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*(\lambda-A)^{-1}Q'u_\cdot, (\bar\lambda-A(\mu)^*)^{-1}v)_{\mathcal{H}}\\
&= \kappa h(\mu)\,(\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*\tilde J(\lambda-A_0)^{-1}\tilde J^* \overset{Q'}{u}, \tilde v^*(\bar\lambda;\mu))_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

$$\tilde v^*(\lambda;\mu) = (\lambda-A(\mu)^*)^{-1}v \in \mathcal{H}^p\underbrace{(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})}_{\text{for } \mu\neq 0}\ (2\le p),$$

$$\begin{aligned}
&H^*\tilde J(\lambda-A_0)^{-1}\tilde J^*Q'u\\
&= H^*\tilde J(\lambda-A_0)^{-1}E_0(I_1)\tilde J^*Q'u + H^*\tilde J(\lambda-A_0)^{-1}E_0(I_2)\tilde J^*Q'u\\
&= \hat w_1(\lambda) + \hat w_2(\lambda),
\end{aligned}$$

$$\hat w_1(\lambda)\in\mathcal{H}^q(\mathbb{C}_+;\mathcal{H}) \quad (1<q<2),$$
$$\hat w_2(\lambda)\in\mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+;\mathcal{H})$$

などと，補助定理 1 (viii) と 8 (ii) からの評価：

(36) $$\|\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}\| \le \begin{cases} C_{\kappa,\frac{\beta_0}{4}}, & |\mathrm{Im}\,\lambda| \ge \frac{\beta_0}{4}\\ C_\kappa(1+|\log|\lambda||)^{2r-1}, & \lambda\in D_{\frac{\beta_0}{2}}\end{cases}$$

を合わせることにより

$$
\begin{aligned}
&(\zeta(\sigma+i\gamma)Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}} \\
&= \kappa h(\mu)\left(\{1-\kappa G(\sigma+i\gamma)\}^{-1}\{\hat{w}_1(\sigma+i\gamma)+\hat{w}_2(\sigma+i\gamma)\}, \tilde{v}^*(\sigma-i\gamma;\mu)\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \kappa h(\mu)\left(\{1-\kappa G(\sigma+i\gamma)\}^{-1}\hat{w}_1(\sigma+i\gamma), \tilde{v}^*(\sigma-i\gamma;\mu)\right)_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \kappa h(\mu)\left(\{1-\kappa G(\sigma+i\gamma)\}^{-1}\hat{w}_1(\sigma+i\gamma), \hat{v}^*(\sigma-i\gamma;\mu)\right)_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

は，$L^1_\gamma(-\infty,\infty)$ の値をとる $(\sigma,\mu)$ の連続関数となる（ただし $0\leq\sigma<\frac{\beta_0}{2}$, $\mu\neq 0$）。従って $(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}}$ を表わす Laplace 逆変換は絶対収束し，かつ $\sigma\to 0$ とすることができる：

$$
\begin{aligned}
(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma t}(\zeta(+0+i\gamma)Q'u(\mu), v)_{\mathcal{H}}\,d\gamma \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma t}\kappa h(\mu)\left(\{1-\kappa G(0+i\gamma)\}^{-1}\{\hat{w}_1(0+i\gamma)+\hat{w}_2(0+i\gamma)\}, \tilde{v}^*(0-i\gamma;\mu)\right)_{\mathcal{H}}d\gamma.
\end{aligned}
$$

ここで $p>2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1<q<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{s}=1$ として

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{|\gamma|\geq 1}\right| \leq \kappa|h(0)|C_{\kappa,1}\left(\|\hat{w}_1\|_{p'}\|\tilde{v}^*(\cdot;\mu)\|_p+\|\hat{w}_2\|_2\|\tilde{v}^*(\cdot;\mu)\|_2\right), \\
&\left|\int_{|\gamma|\leq 1}\right| \leq \kappa|h(0)|C'_{\kappa,1}\left(\|\hat{w}_1\|_q\|\tilde{v}^*(\cdot;\mu)\|_p+\|\hat{w}_2\|_2\|\tilde{v}^*(\cdot;\mu)\|_p\right), \\
&C'_{\kappa,1} = \left(\int_{-1}^{1}\|(1-\kappa G(0+i\gamma))^{-1}\|^s d\gamma\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}
$$

に補助定理 9 (i), (ii) を適用して

$$
\begin{aligned}
&|(Z(t)u(\mu), v)_{\mathcal{H}}| \leq \kappa M_p(\kappa)|h(0)|^2|\mu|^{-\frac{1}{p'}}\|u\|_{\mathfrak{G}}\|v\|_{\mathcal{H}}, \\
&\therefore \|(Z(t)u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa M_p(\kappa)|h(0)|^2|\mu|^{-\frac{1}{p'}}\|u\|_{\mathfrak{G}} \quad (u\in\mathcal{D}(A)).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{D}(A)$ は $\mathfrak{G}$ で dense であるから，$\mathfrak{G}$ から $\mathcal{H}$ への作用素：

$$
\mathfrak{G}\ni u \longmapsto Z(t;\mu)u = (Z(t)u)(\mu)\in\mathcal{H}
$$

は有界作用素となり，かつ $\mathfrak{G}$ から $\mathcal{H}$ への作用素としてのノルムは

(37) $$\|Z(t;\mu)\| \leq \kappa M_p(\kappa)|h(0)|^2|\mu|^{-\frac{1}{p'}} \quad (1<p'<2).$$

また，$p>2$ を固定し，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ なる $p'$ に対して

(38) $$\int_{-1}^{1} |x(\mu)|^2 |\mu|^{-\frac{2}{p'}} d\mu = C^2 < \infty$$

をみたす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると

$$\| X \Sigma(t) u \|_{\mathcal{G}} = \left( \int |x(\mu)|^2 \| (\Sigma(t) u)(\mu) \|_{\mathcal{H}}^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \kappa M_p(\kappa)\, C\, |h(0)|^2 \|u\|_{\mathcal{G}},$$

(39) $$\therefore \| X \Sigma(t) \| \leq \kappa M_p(\kappa)\, C\, |h(0)|^2 .$$

定理3. ($\kappa > 0$, $\kappa^{-1} \notin \Lambda_e$ とする.) 半群 $e^{tB(\kappa)}$ は次のように'分解'される:

(20) $$\begin{cases} e^{tB(\kappa)} = e^{tA} Q'(\kappa) + \Sigma(t, \kappa) + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa) \\ \Sigma(t; \kappa) = (e^{tB(\kappa)} - e^{tA}) Q'(\kappa), \end{cases}$$

(i) $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}$ への作用素 $\Sigma(t, \kappa; \mu)$:

$$\mathcal{G} \ni u \longmapsto \Sigma(t, \kappa; \mu) u = (\Sigma(t, \kappa) u)(\mu) \in \mathcal{H}$$

は有界作用素となり, そのノルムは (37) で評価される,

(ii) $1 < p' < 2$ に対して, (38)をみたす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると, $\mathcal{G}$ における作用素 $X \Sigma(t, \kappa)$ のノルムは (39) で評価され, $t$ に関して一様有界である。

(iii) 任意の $u \in \mathcal{G}$ に対して, $t \to \infty$ のとき

$$\Sigma(t, \kappa; \mu) u \longrightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H},\ \mu \neq 0)$$

$$X \Sigma(t, \kappa) u \longrightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{G}).$$

証明. (iii) のみ示す。$u \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{H}$ に対して ($t > 0$)

(40) $$(\Sigma(t; \mu) u, v)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma t} (\zeta(0 + i\gamma) Q' u(\mu), v)_{\mathcal{H}} d\gamma,$$

ただし $(\zeta(0+i\gamma) Q' u, v)_{\mathcal{H}}$ は便宜的な記法である。

また補助定理 9 (iv) より，定理 3 の $\chi(\mu)$ をとると，$u$, $w \in \mathcal{G}$ に対して，$t > 0$ のとき

(41) $$(X Z(t) u, w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma t} (\zeta(0+i\gamma) Q' u, w)_{\mathcal{G}}\, d\gamma .$$

われわれの目標は，$t \to \infty$ のとき $Z(t;\mu) u \longrightarrow 0$ (in $\mathcal{H}$ for a.e. $\mu$) および $X Z(t) u \longrightarrow 0$ (in $\mathcal{G}$) であるから，Laplace 逆変換の性質をもう少し調べてみることにする。積分範囲を $I_1 = [-1, 1]$ と $I_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ にわけて考えよう。まず $I_1$ では定理 3 の証明と同様にして

$$\zeta(\lambda) Q' u(\mu) = \kappa (\lambda - A)^{-1} H \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* (\lambda - A)^{-1} u(\mu)$$
$$= \kappa (\lambda - A(\mu))^{-1} h(\mu) \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} H^* \tilde{J} (\lambda - A_0)^{-1} \tilde{J} u$$
$$= \kappa\, h(\mu) (\lambda - A(\mu))^{-1} \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} \{\hat{w}_1(\lambda) + \hat{w}_2(\lambda)\},$$
$$\hat{w}_1(\lambda) \in \mathcal{H}^q(\mathbb{C}_+ ; \mathcal{H}) \quad (1 < q < 2),$$
$$\hat{w}_2(\lambda) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+ ; \mathcal{H})$$

であり，$\{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1}$ の評価 (36) と合わせて

$$v(\lambda) = \{1 - \kappa G(\lambda)\}^{-1} \{\hat{w}_1(\lambda) + \hat{w}_2(\lambda)\}, \quad \lambda = \sigma + i\gamma$$

は，$L^1_\gamma(I_1 ; \mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数である。また，たとえば $\mu > 0$ を固定すると

$$(\lambda - A(\mu))^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\mu L}\, dt$$

は，$\overline{\mathbb{C}}_+$ で解析的であり，かつ $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ のとき有界である。従って $\mu \neq 0$ のとき

$$\zeta(\sigma + i\gamma) Q' u(\mu) = \kappa\, h(\mu) (\sigma + i\gamma - A(\mu))^{-1} v(\sigma + i\gamma)$$

は $L^1_\gamma(I_1;\mathcal{H})$ の値をとる $\sigma\geq 0$ の連続関数となり，特に

$$\zeta(0+i\gamma)Q'u(\mu)=\kappa h(\mu)(i\gamma-A(\mu))^{-1}v(0+i\gamma)$$

は $L^1_\gamma(I_1;\mathcal{H})$ に属する。故に，(40) における積分は，$I_1$ に関しては Bochner 積分の意味にとることができ，かつ

$$\int_{I_1} e^{i\gamma t}\zeta(0+i\gamma)Q'u(\mu)\,d\gamma \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$$

となる（Riemann Lebesgue の定理）。

次に $u\in\mathcal{D}(A)$ として，$I_2$ で考えよう。$Q'u\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$ であるから（かつ $BQ'u=Q'Bu$），$\lambda(\lambda-B)^{-1}-B(\lambda-B)^{-1}=1$ を用いて

$$(\lambda-B)^{-1}Q'u=\frac{1}{\lambda}Q'u+\frac{1}{\lambda}(\lambda-B)^{-1}BQ'u.$$

(8) より $\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*(\lambda-A)^{-1}=H^*(\lambda-B)^{-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\zeta(\lambda)Q'u &= \kappa(\lambda-A)^{-1}HH^*(\lambda-B)^{-1}Q'u\\ &=\frac{\kappa}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}HH^*\{Q'u+(\lambda-B)^{-1}Q'Bu\}\\ &=\frac{\kappa}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}HH^*Q'u\\ &\quad+\frac{\kappa}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}H\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*(\lambda-A)^{-1}Q'Bu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\zeta(\lambda)Q'u(\mu)\\ &=\frac{\kappa}{\lambda}h(\mu)(\lambda-A(\mu))^{-1}H^*Q'u\\ &\quad+\frac{\kappa}{\lambda}h(\mu)(\lambda-A(\mu))^{-1}\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}H^*(\lambda-A)^{-1}Q'Bu\\ &=\zeta_1(\lambda)Q'u(\mu)+\frac{1}{\lambda}\zeta(\lambda)Q'Bu(\mu).\end{aligned}$$

$H^*(\lambda-A)^{-1}BQ'u=H^*J(\lambda-A_0)^{-1}J^*BQ'u$ に補助定理 9 (i) を適用し，$\{1-\kappa G(\lambda)\}^{-1}$ の評価 (36) を用い，さらに前述の $(\lambda-A(\mu))^{-1}$ の性質に注意すると，$\frac{1}{\sigma+i\gamma}\zeta(\sigma+i\gamma)Q'Bu(\mu)$ は

$\mu \neq 0$ のとき
$L^1_\gamma(I_2;\mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数となることがわかる。特に $\sigma = 0$ とおけば，$\frac{1}{i\gamma}\zeta(0+i\gamma)Q'Bu(\mu) \in L^1_\gamma(I_2;\mathcal{H})$ であり，(40) の $I_2$ における積分のうち，$e^{i\gamma t}\frac{1}{i\gamma}\zeta(0+i\gamma)Q'Bu(\mu)$ に関する部分は，Bochner 積分の意味にとることができ，

$$\int_{I_2} e^{i\gamma t}\frac{1}{i\gamma}\zeta(0+i\gamma)Q'Bu(\mu)\,d\gamma \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty).$$

$\zeta_1(\lambda)Q'u(\mu) = \frac{k}{\lambda}h(\mu)(\lambda - A(\mu))^{-1}H^*Q'u$ の評価を出すためには，作用素の分数巾の理論が必要である。これについていくらかの事実を述べておこう。

補助定理10.（Kato [2]） $L$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ における maximal dissipative な作用素とする。

(i) $0<\alpha<\frac{1}{2}$ のとき，$(-L)^\alpha$ と $(-L^*)^\alpha$ とは comparable:

$$\text{i.e.}\begin{cases}\mathcal{D}((-L)^\alpha) = \mathcal{D}((-L^*)^\alpha) = \mathcal{D}_\alpha \supset \mathcal{D}(L),\\ d_\alpha^{-1}\|(-L)^\alpha v\| \leq \|(-L^*)^\alpha v\| \leq d_\alpha\|(-L)^\alpha v\|.\end{cases}$$

(ii) $L^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在するならば，$0<\beta<1$ に対して

$$\|(-L)^{-\beta}v\| \leq b_\beta\|L^{-1}v\|^\beta\|v\|^{1-\beta} \quad (v\in\mathcal{H}).$$

(iii) $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+$ に対して $(\lambda-L)^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\|(\lambda-L)^{-1}\| \leq C \quad (\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+)$$

が成り立つならば，$0<\beta<1$ に対して（$v\in\mathcal{D}((-L)^\beta)$ のとき）

$$\|(\lambda-L)^{-1}v\| \leq b_\beta|\lambda|^{-\beta}(\|L^{-1}\|+C)\|(-L)^\beta v\|.$$

証明. (i) は Kato [2] による。$L^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在するとき，$(-L)^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ は次のように表わされる：

$$(-L)^{-\alpha}v = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(s-L)^{-1}v\,ds.$$

故に $v\in\mathcal{D}(L)$ のとき

$$(-L)^{1-\alpha}v = (-L)^{-\alpha}(-L)v$$
$$= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^\eta + \int_\eta^\infty\right) s^{-\alpha}(s-L)^{-1}(-L)v\,ds.$$

$L$ は maximal dissipative であるから

$$\|(s-L)^{-1}(-L)v\| \leq s^{-1}\|Lv\|,$$

$$\|L(s-L)^{-1}\| = \|s(s-L)^{-1}-1\| \leq 1,$$

$$\therefore \left\|\int_0^\eta\quad\right\| \leq \int_0^\eta s^{-\alpha}ds\,\|v\| = \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\|v\|,$$

$$\left\|\int_\eta^\infty\quad\right\| \leq \int_\eta^\infty s^{-(\alpha+1)}ds\,\|Lv\| = \frac{\eta^{-\alpha}}{\alpha}\|Lv\|.$$

$\eta = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\|Lv\|}{\|v\|}$ とおいて，$\sin\pi\alpha = \sin\pi(1-\alpha)$ より

$$\|(-L)^{1-\alpha}v\| \leq \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot 2\alpha^{-(1-\alpha)}(1-\alpha)^{-\alpha}\|v\|^\alpha\|Lv\|^{1-\alpha}$$
$$\leq 2\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right)^\alpha\|v\|^\alpha\|Lv\|^{1-\alpha}$$
$$= b_\alpha\|v\|^\alpha\|Lv\|^{1-\alpha}, \quad b_\alpha \leq 2,$$

$$\therefore \|(-L)^{-\beta}v\| = \|(-L)^{1-\beta}\cdot(-L)^{-1}v\|$$
$$\leq b_\beta\|L^{-1}v\|^\beta\|v\|^{1-\beta}.$$

これで (ii) は示された。 (iii) は

$$\|L^{-1}(\lambda-L)^{-1}\| = \left\|\frac{1}{\lambda}L^{-1} + \frac{1}{\lambda}(\lambda-L)^{-1}\right\|$$
$$\leq \frac{1}{|\lambda|}(\|L^{-1}\| + C)$$

に注意して，(ii) を適用すると

$$\|(-L)^{-\beta}(\lambda-L)^{-1}v\| \leq b_\beta\|L^{-1}(\lambda-L)^{-1}v\|^\beta\|(\lambda-L)^{-1}v\|^{1-\beta}$$
$$\leq b_\beta\frac{1}{|\lambda|^\beta}(\|L^{-1}\|+C)^\beta C^{1-\beta}\|v\|,$$

$$\therefore \|(\lambda-L)^{-1}v\| = \|(-L)^{-\beta}(\lambda-L)^{-1}(-L)^{\beta}v\|$$
$$\leq b_\beta|\lambda|^{-\beta}(\|L^{-1}\|+C)\|(-L)^{\beta}v\| .$$

さて，われわれの問題にもどると

$$(-A)^{\alpha} = ((-A(\mu))^{\alpha}), \quad (-A(\mu))^{\alpha} = \begin{cases} \mu^{\alpha}(-L)^{\alpha}, & \mu>0 \\ (-\mu)^{\alpha}(-L^*)^{\alpha}, & \mu<0 \end{cases}$$

であるから，容易に

$$\mathcal{D}((-A)^{\alpha}) \supset \mathcal{D}(A),$$
$$\|(-A)^{\alpha}u\| \leq b_\alpha\|Au\|^{\alpha}\|u\|^{1-\alpha} \quad (0<\alpha<1)$$

がわかる。次の補助定理が成り立つ：

補助定理 11．　ある $\beta$，$0<\beta<\frac{1}{2}$，に対して $u\in\mathcal{D}((-A)^{\beta})$ とすると，$H^*u \in \mathcal{D}((-L)^{\beta}) = \mathcal{D}((-L^*)^{\beta}) = \mathcal{D}_\beta$，かつ

$$\|(-L)^{\beta}H^*u\| \leq \frac{1+d_\beta}{1-2\beta}|h(0)|\,\|(-A)^{\beta}u\|,$$
$$\|(-L^*)^{\beta}H^*u\| \leq \frac{1+d_\beta}{1-2\beta}|h(0)|\,\|(-A)^{\beta}u\|.$$

証明．　次の計算を適当に正当化すればよい：

$$(-L)^{\beta}\int_0^1 \overline{h(\mu)}\,u(\mu)\,d\mu = \int_0^1 \overline{h(\mu)}\,(-L)^{\beta}u(\mu)\,d\mu$$
$$= \int_0^1 \overline{h(\mu)}\,\mu^{-\beta}(-A(\mu))^{\beta}u(\mu)\,d\mu,$$
$$\|(-L)^{\beta}\int_0^1 \overline{h(\mu)}\,u(\mu)\,d\mu\| \leq |h(0)|\int_0^1 \mu^{-\beta}\|(-A(\mu))^{\beta}u(\mu)\|\,d\mu$$
$$\leq |h(0)|\left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\|(-A)^{\beta}u\|,$$
$$(-L^*)^{\beta}\int_{-1}^0 \overline{h(\mu)}\,u(\mu)\,d\mu = \int_{-1}^0 \overline{h(\mu)}\,(-\mu)^{-\beta}(-A(\mu))^{\beta}u(\mu)\,d\mu,$$
$$\|(-L^*)^{\beta}\int_{-1}^0 \overline{h(\mu)}\,u(\mu)\,d\mu\| \leq |h(0)|\left(\frac{1}{1-2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\|(-A)^{\beta}u\|.$$

上の計算に補助定理10(i)を適用すれば，証明了。

補助定理11 を利用して $\zeta_1(\lambda)Q'u(\mu)$ が入る積分を処理することができる。

$$\zeta_1(\lambda)Q'u(\mu) = \frac{\kappa}{\lambda} h(\mu)(\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u$$

において，$Q'u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}((-A)^\beta)$ $(0<\beta<\frac{1}{2})$ だから，

たとえば $\mu>0$ のとき

$$(\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u = (\lambda - \mu L)^{-1} H^* Q'u$$
$$= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu} - L\right)^{-1} H^* Q'u,$$

$$\|(\lambda - A(\mu))^{-1} H^* Q'u\| = \frac{1}{\mu}\left\|\left(\frac{\lambda}{\mu} - L\right)^{-1} H^* Q'u\right\|$$
$$\leq \frac{1}{\mu} b_\beta \left(\frac{|\lambda|}{\mu}\right)^{-\beta} (\|L^{-1}\| + C_0) \|(-L)^\beta H^* Q'u\|$$
$$\leq b_\beta (\|L^{-1}\| + C_0) |\lambda|^{-\beta} \mu^{\beta-1} \cdot \frac{1+d_\beta}{1-2\beta} |h(0)| \|(-A)^\beta Q'u\|,$$

(ただし $\|(\lambda - L)^{-1}\| \leq C_0$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, とする).

これより $\lambda \in \mathbb{C}_+$ のとき

$$\|\zeta_1(\lambda)Q'u(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq \text{const.} \times |\mu|^{\beta-1} |\lambda|^{-1-\beta} |h(0)|^2$$
$$\times \|(-A)^\beta u\|_{\mathcal{G}}$$

であり，$\zeta_1(\lambda)$ は $\overline{\mathbb{C}}_+ - \{0\}$ で解析的であるから，$\zeta_1(\sigma + i\gamma)Q'u$ は $L^1_\gamma(I_2;\mathcal{H})$ の値をとる $\sigma \geq 0$ の連続関数となる。従って前と同様の議論により，$t \to \infty$ のとき $(\mu \neq 0$ として$)$

$$\int_{I_2} e^{i\gamma t} \zeta_1(0 + i\gamma) Q'u(\mu)\, d\gamma \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

以上の結果をあわせると，$\mu \neq 0$，$u \in \mathcal{D}(A)$ に対して

$$Z(t;\mu)u \longrightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H} \text{ as } t \to \infty)$$

が得られる。定理3より $Z(t;\mu)$ は $t$ について一様有界，$\mathcal{D}(A)$ は $\mathfrak{K}$ で dense であるから，任意の $u \in \mathfrak{K}$ に対して，$\mu \neq 0$ のとき

$$Z(t;\mu)u \longrightarrow 0 \quad (\text{in } \mathcal{H} \text{ as } t \to \infty).$$

を得る。

また (38) をみたす有界可測関数 $x(\mu)$ をとると，$u \in \mathfrak{K}$ に対して

$$(XZ(t)u)(\mu) = x(\mu)\, Z(t;\mu)u$$

$$\therefore \|(XZ(t)u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq K M_p(\kappa) |h(0)|^2 |x(\mu)|\, |\mu|^{-\frac{1}{p}} \in L^2(\mathcal{M}),$$

$$(XZ(t)u)(\mu) = x(\mu)\, Z(t;\mu)u \longrightarrow 0 \quad (\text{a.e. } \mu)$$

が成り立つので，Lebesgue の収束定理によって

$$XZ(t)u \longrightarrow 0 \quad (\text{in } \mathfrak{K} \text{ as } t \to \infty)$$

を得る。（定理3の証明了.）

半群 $e^{tA}$ の次の性質は明らかであろう：

$$(e^{tA}u)(\mu) = e^{tA(\mu)}u(\mu) \quad (\text{a.e. } \mu),$$

$$\|(e^{tA}u)(\mu)\|_{\mathcal{H}} \leq \|u(\mu)\| \in L^2_\mu(\mathcal{M}),$$

$t \to \infty$ のとき $\|e^{tA(\mu)}u(\mu)\|_{\mathcal{H}}$

$$\leq M e^{-\alpha|\mu|t} \|u(\mu)\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad (\text{a.e. } \mu).$$

従ってまた Lebesgue の収束定理より

$$t \to \infty \text{ のとき } \|e^{tA} u\|_{\mathfrak{H}} \to 0 .$$

以上のことと，定理3とから次の定理は明らかである：

定理4. $\kappa > 0$，$\kappa^{-1} \in \Lambda_e$ とする。$e^{tB(\kappa)}$ の分解：

$$\begin{cases} e^{tB(\kappa)} = e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) + \sum_{n=1}^{N(\kappa)} e^{t\beta_n(\kappa)} Q_n(\kappa), \\ Q'(\kappa) = 1 - \sum Q_n(\kappa) \end{cases}$$

において，$e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa)$ は次の性質をもつ：

(i) 任意の $u \in \mathfrak{H}$ に対して，$t \to \infty$ のとき

$$(e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u)(\mu) \to 0 \quad \text{in } \mathcal{H} \quad (a.e.\ \mu),$$

(ii) $1 < p' < 2$ に対して (38) をみたす有界可測関数 $\chi(\mu)$ をとると，任意の $u \in \mathfrak{H}$ に対して，$t \to \infty$ のとき

$$X e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u \to 0 \quad \text{in } \mathfrak{H},$$

(iii) $\mathfrak{H}$ の作用素 $X$ として，とくに次の $X_\varepsilon$ をとると，

$$\mathfrak{H} \ni u \longmapsto (X_\varepsilon u)(\mu) = \begin{cases} u(\mu), & |\mu| > \varepsilon \\ 0, & |\mu| \le \varepsilon, \end{cases}$$

$t \to \infty$ のとき

$$X_\varepsilon e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u \to 0 \quad \text{in } \mathfrak{H},$$

$$\text{i.e. } \int_{|\mu| > \varepsilon} \|(e^{tB(\kappa)} Q'(\kappa) u)(\mu)\|_{\mathcal{H}}^2 \, d\mu \to 0 .$$

## §4 補足

論じ残した問題がいくらかあるので，若干の comment をつけ加えておく。

1. $B(\kappa)$ の parameter $\kappa$ に関する解析性は，かなり面白い（数学的には）問題であると思われる。ここでは，$e^{tB(\kappa)}$, $Q'(\kappa)$ などが，区間 $\left(\frac{1}{\rho_n^*}, \frac{1}{\rho_{n+1}^*}\right)$ で実解析的であることのみを指摘しておく。

2. ①関数 $h(\mu)$ の条件をゆるめる，あるいは②摂動 $HH^*$ は本質的には'1次元の摂動'であったが，これを'$n$次元の摂動'にする，さらには③ $L$ の条件を変更する（たとえば (L.2) を (L.2') に）などの方向の一般化は当然考えられる。それぞれの場合に，定理 2, 3, 4 に相当する結果を得ることができるけれども，①，②の場合は，かなり制限された結果になる。③の場合は，decay という現象はおこらない。

3. 具体的な問題 (I) は，必ずしも $\mathcal{H} = L^2(-a, a)$, $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{M}; \mathcal{H})$ の中で解かれる必要はない。$\mathcal{H}$ のかわりに $L^1(-a, a)$，あるいは区分的に連続な関数の空間 $\check{C}[-a, a]$ をとり，これに応じて $\mathfrak{H}$ の代わりに $\mathfrak{X} = L^1(\mathcal{M}; \mathcal{H})$ あるいは $\mathfrak{Y} = C(\mathcal{M}; \check{C}[-a, a])$ をとることもできる。この場合はまだよく考えてないが，$\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{X}$ の関係をうまく使い，作用素 $L$ の条件を適当に設定しておけば，定理 2, 4 に相当する

(いくらか弱い)結果を示すことができると思われる。

4. $\mathfrak{H}_0$ における $A_0$ と $B_0(\kappa)$ との関係については，何も述べることができなかった。$\mathfrak{H}_0$ において，$A_0$ は skew selfadjoint であるから，unitary 群 $e^{tA_0}$ を生成する。$B_0(\kappa)$ のスペクトルは $\sigma(B_0(\kappa)) = \{i\mathbb{R}\} \cup \{\beta_1(\kappa), \cdots, \beta_{N(\kappa)}(\kappa)\}$ であり，固有値 $\beta_n(\kappa)$ の固有空間への projection を $Q_{0,n}(\kappa)$ とすると，$\tilde{J} Q_{0,n}(\kappa) = Q_n(\kappa)$ が成り立つ。$Q_0'(\kappa) = 1 - \sum Q_{0,n}(\kappa)$ とおくと，$B_0(\kappa) Q_0'(\kappa)$ と $A_0$ とは (partial) similar となり，(local) wave operator が存在する。従って，$0$ の近傍を除き，$B_0(\kappa) Q_0'(\kappa)$ のスペクトル分解を作ることができる。

文 献

[1] Kato, T., Wave operators and similarity for some non-self adjoint operators, Math. Ann., 162 (1966) 258-279.

[2] ——, Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 246-274.

[3] ——, Perturbation theory for liner operators, Springer, (1966)

[4] Lehner, J. and Wing, G. M., On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons, Comm. Pure Appl. Math., 8 (1955) 217-234.

[5] ——, Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry, Duke Math. J., 23 (1956) 125-142.

[6] Lehner, J., The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab, J. Math. Mech. 11 (1962) 173-181.

[7] Vidav, I., Spectra of perturbed semi groups with applications to transport theory, J. Math. Anal. Appl. 30 (1970) 264-279.