数理解析研究所講究録
第164巻 1972年 107-117

Boltzmann方程式の解の存在と一意性について

広島大 理　田中 洋

§1 序. この報告ではBoltzmann方程式の解の存在と一意性に関し，すでに得られている主な結果について簡単な紹介を行い，次にMaxwellian gasの場合の確率微分方程式による取扱いについて述べる．先ず方程式の形から説明しよう。

空間R^3内に互いに衝突(binary collisionだけ)しながら運動しているN個の(気体)分子があるとする(Nは十分大)．時刻tにおいて位置が$d\xi$，速度がdxの範囲にある分子数を$Nu(t,\xi,x)\,d\xi\,dx$とするとBoltzmann方程式は

$$(1)\quad \frac{\partial u(t,\xi,x)}{\partial t}+(x,\nabla_\xi u)+(F(\xi),\nabla_x u)=B[u]$$

と書かれる．ただし $x\in R^3$の関数$u(x)$に対し

$$(2)\quad B[u]=\mathrm{const.}\int_{S^2\times R^3}\{u(x^*)u(y^*)-u(x)u(y)\}|x-y|\,Q(|x-y|,\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dy$$

で，(1)の右辺の$B[u]$は$u(t,\xi,x)$をxの関数と見てBをほど

としたものである．関数 Q (≥ 0) は分子間の力（pair forces だけ）により定まるもので differential collision cross-section と呼ばれる．F は outside potential から定まる外力である．速度 x をもつ分子が速度 y をもつ分子に近ずき collision を起した結果，速度がそれぞれ x^*, y^* になったとする．このとき x^*, y^* は常に x, y を直径の両端とする球面上にあり，かつその球に対するある直径の両端になっている．θ はベクトル（直径）$x-y$ と x^*-y^* とのなす角である，即ち θ は x を北極，y を南極と見たときの x^* の colatitude で，$0 \leq \theta < \pi$．φ は x^* の longitude を表わし，$0 \leq \varphi < 2\pi$ である．x, y を定めるごとに $\varphi=0$ の位置は適当に決めておく（したがって，x^*, y^* は x, y, θ, φ の関数になっている）．

2つの分子がある一定の距離以上はなれていれば interaction がないという場合を cut-off という．cut-off であることと，total collision cross-section $\int_{S^2} Q \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ が有限であることとは同等である．外力 F が 0 で $u(t, \xi, x)$ が位置 ξ に無関係の場合，即ち $u = u(t, x)$ で方程式が $\frac{\partial u}{\partial t} = B[u]$ の場合を空間的に一様の場合という．

3つの典型的な場合をあげておく．

1° gas of hard balls の場合．これは $Q = \text{const.} > 0$ の場合で，(2) の $B[u]$ は次のようにも表わされる：

$$(3)\qquad B[u] = \text{const.}\int_{S^2\times R^3}\{u(x^*)u(y^*)-u(x)u(y)\}|(y-x,l)|\,dl\,dy$$

ただし dl は S^2 上の uniform measure で，

$$x^* = x + (y-x,l)l,\qquad y^* = y-(y-x,l)l.$$

2° Maxwellian gas. 分子間に距離の5乗に反比例する斥力が働く場合で，Q は次のようになっている．

$$|x-y|\,Q(|x-y|,\theta) = Q_M(\theta)\quad(\theta\text{ だけの関数})$$

$$= \text{const.}\frac{(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}}{\sin\theta\sin 2\phi\{\cos^2\phi K(\sin\phi)-\cos 2\phi E(\sin\phi)\}}$$

$$\sim \text{const.}\ \theta^{-\frac{5}{2}},\qquad \theta\downarrow 0.$$

ただし ϕ は $\frac{\pi-\theta}{2} = (\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}K(\sin\phi)$ で定まるもので，$K(x)$, $E(x)$ はそれぞれ第1種，第2種の complete elliptic integrals である．$Q_M(\theta)$ は θ の単調減少関数で $Q_M(\pi)>0$.
(Uhlenbeck & Ford [1] の Chapter IV 参照).

3° Maxwellian gas with cut-off. これは $|x-y|\,Q(|x-y|,\theta)$ が θ だけの関数 $Q(\theta)$ になっており，かつ total collision cross-section が有限の場合である．

§2. Maxwellian gas with cut-off.

空間的に一様な場合を取扱う．(2) における const. は省略して次の方程式を考える．

(4) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int_{S^2\times R^3} \{u(t,x^*)u(t,y^*) - u(t,x)u(t,y)\} Q(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dy$$

ただし $Q(\theta) \geq 0$ で $\int_0^\pi Q(\theta)\sin\theta\, d\theta < \infty$ である．このときは初期条件 $u(0,x) = f(x)$ ($f \geqq 0$, $\int f dx = 1$) のもとで，(4)の解 $u(t,x)$ で $u(t,x) \geq 0$, $\int u(t,x)dx = 1$ をみたすものが unique に存在する．いま $u(t,\Gamma) = \int_\Gamma u(t,x)dx$, $\Gamma \in \mathcal{B}(R^3)$ とおくと，(4)は

(5) $$\frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t} = \int_{R^3\times R^3} g\{\pi(x,y,\Gamma) - \delta(x,\Gamma)\} u(t,dx)u(t,dy)$$

となる．ただし

$$\begin{cases} g = 2\pi \int_0^\pi Q(\theta)\sin\theta\, d\theta \\ \pi(x,y,\Gamma) = \frac{1}{g}\int_{S^2} \delta(x^*,\Gamma) Q(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\phi. \end{cases}$$

R^3上の2つの確率測度 u, v に対し，確率測度 $u*v$ を

$$(u*v)(\Gamma) = \int_{R^3\times R^3} \pi(x,y,\Gamma)u(dx)u(dy)$$

により定義すると，u が prob. measure であるという条件の下で

$$u'(t) = g\{u(t)*u(t) - u(t)\}$$

と書くことが出来る．これは容易に解くことが出来る．f (=確率測度) を initial data とする解は

(6) $$u(t) = e^{-gt}\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-gt})^{n-1}\sum_{\tau\in T_n}|\tau| f_\tau \quad \text{(Wild's sum)}$$

で与えられる．f が density をもてば $u(t)$ もそうである．

記号 τ, $|\tau|$, f_τ, T_n の意味は次の通り：integer $n \geqq 1$ の complete partitions の全体を T_n とする；T_n は次のようにも定義される．T_1 は唯一つの要素から成るものとし，$T_1, \cdots, T_{n-1}$ が定義されたとき

$$T_n = \{\tau = (\tau_1, \tau_2) \mid \tau_1 \in T_{n_1}, \tau_2 \in T_{n_2}, \ n_1 + n_2 = n\}$$

と定義する．そして $|\tau|$ および f_τ は

i) $\tau \in T_1$ ならば $|\tau| = 1$, $f_\tau = f$

ii) $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in T_n$ ならば $|\tau| = \dfrac{|\tau_1||\tau_2|}{n-1}$, $f_\tau = f_{\tau_1} * f_{\tau_2}$

により定義する．

方程式(5)は次のように一般の形にして考えることも出来る．空間 R^3 を一般の空間 Q (diff. collision cross-section とは別)にし，$\pi(x, y, \Gamma)$ も一般にし（ただし $x, y \in Q$ を固定したとき，Γ につき Q の上の確率測度），さらに g を $x \in Q$ の関数 $g(x)$ にとる．このような場合でも上記 Wild's sum (6) の一般化が可能で（[6], [7]），さらに上野，高橋氏により collisions の様子を示唆するような無限粒子のマルコフ過程の構成や，線型化の問題 (interaction semigroup)，分枝マルコフ過程との関係等が研究されている．これらについては上野 [7]，高橋 [9]，池田 [10, §5] を見られたい．

§3. Gas of hard ballsの場合．空間的一様の場合は，Carleman [3], Povzner [5] の研究がある．

1° Carlemanの結果：fが

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \text{ continuous}, & \int_{R^3} f(x)\,dx = 1 \\ f(x) \leq \dfrac{a}{(1+|x|^2)^{\kappa}}, & \kappa > 3, \ a\text{は定数} \end{cases}$$

をみたせば，fを初期値とする

$$(7) \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3} \{u(t,x^*)u(t,y^*) - u(t,x)u(t,y)\} |(y-x,l)|\,dl\,dy$$

の解$u(t,x)$で

$$0 \leq u(t,x) \leq \frac{\text{const.}}{(1+|x|^2)^{\kappa}}, \quad \int u(t,x)\,dx = 1$$

をみたすものが存在する．またこの様な解はuniqueである．

2° Povznerの結果：Povznerはmodified spatially inhomogeneousの場合を扱っているが（もともとの意味でのspatially inhomogeneousの場合は含まない——この様な場合の解の存在と一意性についてはわかっていない），ここでは空間的に一様の場合の結果を述べる．前節と同様に$u(t,\Gamma)$を考えると(7)より

$$\frac{\partial u(t,\Gamma)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3 \times R^3} |(y-x,l)| \{\delta(x^*,\Gamma) - \delta(x,\Gamma)\}\,dl\,u(t,dx)\,u(t,dy)$$

となる．$C_b(R^3)$をR^3上の有界連続な実数値関数の全体とし，

$\varphi \in C_b(R^3)$ に対して $u(t,\varphi)=\int_{R^3}\varphi(x)u(t,dx)$ とおき，方程式

$$(8)\quad \frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t}=\int_{S^2\times R^3\times R^3}|(y-x,l)|\{\varphi(x^*)-\varphi(x)\}dl\,u(t,dx)u(t,dy),\quad \forall\varphi\in C_b(R^3)$$

を考える．いま，mass, momentum, energy の保存とはそれぞれ $\int u(t,dx)=\text{const.}$, $\int x\,u(t,dx)=\text{const.}$, $\int|x|^2u(t,dx)=\text{const.}$ を意味するものとすると，Povzner の結果は次のようになる（f は R^3 上の確率測度とする）：

(a) $\int|x|^2f(dx)<\infty$ ならば，f を initial data とする (8) の解で mass, momentum を保存するものが存在する．

(b) $\int|x|^3f(dx)<\infty$ ならば，f を initial data とする (8) の解で mass, momentum, energy を保存するものが存在する．

(c) $\int|x|^4f(dx)<\infty$ ならば，f を initial data とする (8) の解 $u(t,\cdot)$ で mass, momentum, energy を保存し，かつ $\mu(t)=\int|x|^4u(t,dx)$ が t の任意の有限区間で有界となるようなものが存在する．またこのような解は unique である．もし f が density をもてば $u(t,\cdot)$ もそうである．

§4. マルコフ過程．　空間的に一様な gas of hard balls の場合，Povzner の結果をもとにして次のことを証明することが出来る．

「初期分布 f が $\int|x|^4f(dx)<\infty$ をみたすとき，§3 (c) でのべ

た(8)の unique solution を $u(t,\cdot)$ とする．このとき，任意の $x \in R^3$ に対し，$v(t,\Gamma)$ を未知とする方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,\Gamma)}{\partial t} = \displaystyle\int_{S^2\times R^3\times R^3} |(y-x,l)| \left\{ \frac{\delta(y^*,\Gamma)+\delta(z^*,\Gamma)}{2} - \delta(x,\Gamma) \right\} dl\, v(t,dy)\, u(t,dz) \\ v(0,\Gamma) = \delta(x,\Gamma) \qquad\qquad (y^* = y+(z-y,l)l,\ z^* = z-(z-y,l)l) \end{cases}$$

は unique な解をもち，それを $P_f(t,x,\Gamma)$ とするとき

$$\begin{cases} u(t,\Gamma) = \displaystyle\int_{R^3} P_f(t,x,\Gamma) f(dx), \quad P_f(t,x,R^3)=1 \\ P_f(t+s,x,\Gamma) = \displaystyle\int_{R^3} P_f(t,x,dy) P_{u(t)}(s,y,\Gamma) \end{cases}$$

が成立する. ┘

これより，次のようなマルコフ過程 $(\Omega, X(t,\omega), \mathcal{B}, P_f)$ が存在することがわかる：

(i) $X: [0,\infty)\times\Omega \longrightarrow R^3$ で，各 ω に対し $X(t,\omega)$ は t の関数として step function である．

(ii) $\mathcal{B}_t = \sigma\{X(s,\omega) : 0\le s\le t\}$，$\mathcal{B} = \bigvee_t \mathcal{B}_t$ とするとき P_f は $(\Omega,\mathcal{B})$ における確率測度で，

$$P_f\{X(t+s,\omega)\in\Gamma/\mathcal{B}_t\} = P_{u(t)}(s, X(t,\omega),\Gamma) \quad \text{a.s.}$$

ただし記号 $\sigma\{$——$\}$ は $\{$——$\}$ のものをすべて可測にするような最小の σ-field を意味する．このようなマルコフ過程は通常の(時間的一様な)マルコフ過程と異なる

ものでMcKean[4]によりはじめて導入されたものである.

§5. Maxwellian gas (without cut-off).

この場合は空間的一様に限っても解の存在・一意性に関することは殆んどわかっていない. しかし, 確率微分方程式を用いることにより, 前節でのべたようなマルコフ過程を直接的に構成することが出来る. 詳しいことはいずれ何らかの形で発表することにし, ここでは結果だけのべておく.

$S=(0,1)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$ とし, S 上の測度 λ を

$$d\lambda = d\alpha \otimes Q_M(\theta)\sin\theta\, d\theta \otimes d\psi$$

により定める. f を R^3 上の確率分布で $\int |x| f(dx) < \infty$ とする. このとき, 適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の上に

$$\begin{cases} \text{sub-}\sigma\text{-fields の増大族 } \{\mathcal{B}_t\}_{t\geq 0} \\ dt\otimes d\lambda \text{ に対応する } (0,\infty)\times S \text{ 上の Poisson 加法系 } \{p(A,\omega)\} \\ R^3\text{-valued process } \{x(t,\omega),\ 0\leq t<\infty\} \end{cases}$$

を, 次の (i)—(iv) をみたすように構成することが出来る.

(i) $x(0,\omega)$ の分布 $= f$

(ii) $x(t,\omega)$ は右連続, 左極限をもち, t を固定したとき ω の関数として $\mathcal{B}_t$－可測.

(iii) $\sigma\{p(A,\omega) : A\subset(0,t]\times S\} \subset \mathcal{B}_t$

$\sigma\{p(A,\omega) : A\subset(t,\infty)\times S\}$ と $\mathcal{B}_t$ とは独立.

(iv) 確率空間 $((0,1), \mathcal{B}(0,1), d\alpha)$ の上で定義された R^3-valued process $\{y(t,\alpha), 0 \leq t < \infty\}$ で $\{x(t,\omega), 0 \leq t < \infty\}$ と同法則のものが存在して

$$x(t,\omega) = x(0,\omega) + \int_{(0,t]\times S} \{x^*(x(s,\omega), y(s,\alpha), \theta, \phi) - x(s,\omega)\}\, p(ds\, d\alpha\, d\theta\, d\phi, \omega) \quad (a.s.).$$

さらに，次のことが成立する.

(v) 確率過程 $\{x(t,\omega), 0 \leq t < \infty\}$ の分布は f より unique に定まり，前節の意味でのマルコフ過程になる.

(vi) $u(t,\cdot)$ を $x(t,\omega)$ の分布とするとき

$\forall \varphi : R^3 \longrightarrow R^1, \in C^1$, $supp(\varphi)$: compact

に対して

$$\frac{\partial u(t,\varphi)}{\partial t} = \int_{(0,\pi)\times[0,2\pi)\times R^3\times R^3} \{\varphi(x^*) - \varphi(x)\} Q_M(\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, u(t,dx)\, u(t,dy)$$

(vii) (a) momentum が保存される： $E\{x(t,\omega)\} = const.$

(b) $\int |x|^2 f(dx) < \infty$ ならば energy が保存される：

$$E\{|x(t,\omega)|^2\} = const.$$

References

[1] G. E. Uhlenbeck and G. W. Ford: Lectures in Statistical Mechanics, Amer. Math. Soc. 1963.

[2] E. Wild: On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Proc. Camb. Phil. Soc. 47(1951), 602-609.

[3] T. Carleman; Problemes Mathematiques dans la Theorie Cinetiques des Gaz, Uppsala 1957.

[4] H. P. McKean, Jr.: A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. 56(1966), 1907-1911.

[5] A. Ya. Povzner: On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases, Mat. Sb. 58(1962), 63-86.

[6] S. Tanaka: An extension of Wild's sum for solving non-linear equation of measures, Proc. Japan Acad. 44(1969), 884-889.

[7] T. Ueno: A class of Markov processes with interaction I, II, Proc. Japan Acad. 45(1969), 348-353, 437-440.

[8] H. Tanaka: Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo, Sec. 1, 17(1970), 259-272.

[9] Y. Takahashi: Markov semigroups with simplest interactions I, II, (to appear in Proc. Japan Acad.).

[10] 池田信行：確率過程と非線型方程式
(数理科学講究録106 非線型発展方程式とその近似理論).